2002RP-21

Partage des coûts et tarification des infrastructures
Les jeux de coûts
Principaux concepts de solution

Marcel Boyer, Michel Moreaux, Michel Truchon

Rapport de projet
Project report

Montréal
Novembre 2002
Révisé en juin 2003

CIRANO
Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

CIRANO

Le CIRANO est un organisme sans but lucratif constitué en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Québec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the Ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, and grants and research mandates obtained by its research teams.

Les organisations-partenaires / The Partner Organizations

- École des Hautes Études Commerciales
- École Polytechnique de Montréal
- Université Concordia
- Université de Montréal
- Université du Québec à Montréal
- Université Laval
- Université McGill
- Ministère des Finances du Québec
- MRST
- Alcan inc.
- AXA Canada
- Banque du Canada
- Banque Laurentienne du Canada
- Banque Nationale du Canada
- Banque Royale du Canada
- Bell Canada
- Bombardier
- Bourse de Montréal
- Développement des ressources humaines Canada (DRHC)
- Fédération des caisses Desjardins du Québec
- Hydro-Québec
- Industrie Canada
- Pratt & Whitney Canada Inc.
- Raymond Chabot Grant Thornton
- Ville de Montréal

ISSN 1499-8610 (Version imprimée) / ISSN 1499-8629 (Version en ligne)

Partage des coûts et tarification des infrastructures Les jeux de coûts Principaux concepts de solution*

Marcel Boyer[†], *Michel Moreaux*[‡], *Michel Truchon*[§]

Résumé / *Abstract*

Nous présentons dans ce mémoire les principaux concepts de solution proposés pour les jeux coopératifs dont plusieurs ont été utilisés pour résoudre les jeux de coûts. Nous consacrons à l'étude du concept de *coeur* une place privilégiée. Nous étudions également les concepts de *semi-coeur*, d'*ensemble stable de von Neumann et Morgenstern*, du *nucléole* et de la *valeur de Shapley*. Par ailleurs, nous ne présentons pas ici les concepts de pré-noyau (prekernel), de noyau (kernel) ni d'ensemble de marchandage.

Mots clés: Partage des coûts, tarification, infrastructures, jeux de coûts.

In this paper, we present the main solution concepts for cooperative games, which have been used in the context of cost games. We put a special emphasis on the concept of *core*. We also present the concepts of *semicore*, *von Neumann-Morgenstern stable set*, *nucleolus* and *Shapley value*. However, we do not cover the concepts of prekernel, kernel or bargaining set.

Keywords: *Cost sharing, Pricing, Infrastructures, Cost Games.*

---

* Cette version du rapport a été remise au Ministère des Finances du Québec (MFQ) dans le cadre d'un partenariat de recherche entre le MFQ et le CIRANO. Les auteurs tiennent à remercier le Ministère pour son soutien financier. Il va de soi qu'ils sont les seuls responsables des opinions et analyses contenues dans ce document, qui ne représentent pas nécessairement celles du CIRANO ou du MFQ. Les auteurs acceptent également la responsabilité de toute erreur qui aurait pu se glisser dans le texte.

[†] CIRANO et Département de sciences économiques, Université de Montréal

[‡] LEERNA, IDEI, IUF, Université de Toulouse I, **auteur principal**

[§] CIRANO, CIRPÉE et Département d'économique, Université Laval

Table des matières

Liste des tableaux

1 Introduction

Nous présentons dans ce mémoire les principaux concepts de solution proposés pour les jeux coopératifs dont plusieurs ont été utilisés pour résoudre les jeux de coûts.[1] Le concept de solution "peut être le plus intuitif" pour reprendre l'expression de B. Peleg (1986) est le concept de *coeur* parce que c'est le concept de solution qui prend totalement en compte les menaces de sécession, et que, dans un monde où la liberté contractuelle ou d'association prévaut, une solution qui ne tiendrait pas compte de ces menaces serait certainement contestable et contestée. Pour cette raison nous consacrons à l'étude de cette solution une place privilégiée. La section 2 a pour objet la définition même du concept et l'examen des conditions de non-vacuïté de l'ensemble des imputations ainsi définies. On verra que le coeur d'un jeu de coûts peut être vide bien que les joueurs aient intérêt à coopérer. Dans certains jeux au contraire l'ensemble des imputations du coeur aurait plutôt tendance a être trop vaste. Dans ces deux cas il est nécessaire d'explorer d'autres voies pour trouver une solution.

On recense à la section 3 les différentes propriétés du coeur ainsi que celles qu'il ne possède pas et dont on pourrait penser que, pour diverses raisons, en particulier des raisons d'équité, toute solution devrait les posséder. Le concept de *semi-coeur* présenté à la section 4 est un affaiblissement de la notion de coeur qui consiste à ne prendre en compte que les menaces de retrait des coalitions d'un seul joueur et, symétriquement, de tous les joueurs sauf un. On verra qu'elle permet de rationaliser certaines pratiques. Nous montrons à la section 5 les liens qui existent entre l'*ensemble stable de von Neumann et Morgenstern*, historiquement le premier concept de solution proposé pour les jeux coopératifs, et le coeur. Les sections 6 et 7 sont respectivement consacrées à deux autres concepts de solution, le *nucléole* et la *valeur de Shapley*, qui sélectionnant une seule imputation, contrairement aux concepts précédents qui simplement définissent un sous-ensemble d'imputations parmi lesquelles la répartition des

[1] Pour une présentation des jeux de coûts, voir Boyer, Moreaux et Truchon -ci-après BMT- (2002), le document [4] de la présente série sur le partage des coûts communs et la tarification des infrastructure. La liste de ces documents est donnée en annexe.

coûts entre les joueurs devrait être choisie. Nous ne présentons pas les concepts de pré-noyau (pre-kernel), noyau (kernel) ni d'ensemble de marchandage.

2 Le coeur

2.1 Définition

Puisque les différents joueurs sont libres de réaliser leurs projets avec qui ils veulent, tout concept de solution devrait tenir compte des menaces de sécession. On appelle coeur d'un jeu coopératif le concept de solution exclusivement fondé sur la prise en compte de ces menaces et de toutes ces menaces. Plus précisément le coeur d'un jeu de coûts est l'ensemble maximal des pré-imputations qui résistent aux menaces de retrait coordonné de toute coalition. Formellement, pour tout jeu (c, N) on appelle coeur le sous-ensemble des pré-imputations suivant :

$$\mathcal{C}(c,N) = \left\{ x \in \overline{PX}(c,N) : \sum_{i \in N} x_i \leq c(S) \quad \forall S \in \mathcal{N} \backslash \phi \right\}$$

Par définition, une pré-imputation $x \in \mathcal{C}(c,N)$ doit vérifier, la condition $x_i \leq c(\{i\})$ $\forall i \in N$, c'est-à-dire la condition de rationalité indiviluelle. Cette pré-imputation est donc une imputation.

2.2 Existence

On exclut du champ de l'analyse les jeux de coûts qui ne sont pas sous-additifs. Or la propriété de sous-additivité, on l'a souligné dans le mémoire consacré à la présentation de la notion de jeu de coût (voir BMT, 2002), implique en particulier que pour toute partition $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ de l'ensemble des projets, la somme des coûts de réalisation coordonnée des parties, $\sum_{h=1}^{m} c(P_h)$, n'est pas inférieure au coût de réalisation coordonnée de l'ensemble des projets, $c(N)$. L'incitation à coopérer est donc très forte mais, et c'est peut-être un peu surprenant, cette incitation forte à coopérer, ne garantit pas la non-vacuïté du coeur de tout jeu de coûts, sauf dans le cas où il n'y a que deux projets à réaliser.[2] Pour comprendre pourquoi la sous-additivité ne garantit pas la non-vacuïté lorsque trois projets au moins doivent être menés à terme, le plus simple est de considérer un jeu symétrique.

Exemple 1 Soit le jeu symétrique à quatre joueurs dont la fonction de coût est la fonction suivante :[3]

$$\bar{c}(1) = 1, \quad \bar{c}(2) = 1.9, \quad \bar{c}(3) = 2.5 \ \text{ et } \ \bar{c}(4) = 3.5.$$

La fonction de coûts est bien sous-additive car :

$$\bar{c}(2) = 1.9 \leq 2 = 2\bar{c}(1)$$

$$\bar{c}(3) = 2.5 \leq \begin{cases} 3 = 3\bar{c}(1) \\ 2.9 = \bar{c}(1) + \bar{c}(2) \end{cases}$$

$$\bar{c}(4) = 3.5 \leq \begin{cases} 4 = 4\bar{c}(1) \\ 3.9 = 2\bar{c}(1) + \bar{c}(2) \\ 3.5 = \bar{c}(1) + \bar{c}(3) \\ 3.8 = 2\bar{c}(2) \end{cases}$$

Pour les coalitions de taille $m = 3$, on a : $\bar{c}(3)/3 = 2.5/3 < 3.5/4 = \bar{c}(4)/4$. Le coût que doivent supporter les agents d'une coalition de trois joueurs est inférieur à trois fois la charge $\bar{c}(4)/4$ que doivent supporter en moyenne tous les agents pour réaliser en commun l'ensemble des quatre projets.

Considérons alors une pré-imputation quelconque qui répartit $\bar{c}(4)$ entre les quatre joueurs. Les trois joueurs dont les charges sont les plus lourdes, si cette pré-imputation ne répartit pas $\bar{c}(4)$ de façon égale entre les quatre projets, ou trois joueurs quelconques, si cette pré-imputation répartit $\bar{c}(4)$ de façon égale entre tous les joueurs, doivent payer au moins, ensemble, $3\bar{c}(4)/4 > \bar{c}(3)$. Cette pré-imputation n'est donc pas robuste à la sécession des

[2] S'il n'y a que deux projets à réaliser, la sous-additivité implique que $c(\{1\}) + c(\{2\}) \geq c(\{1,2\})$. Répartissons alors le gain de la mise en commun des projets $c(\{1\}) + c(\{2\}) - c(\{1,2\}) \geq 0$, proportionnellement à leurs coûts de réalisation isolée, i.e. affectons au projet i, $i = 1,2$, la partie x_i du coût global défini par :

$$x_i = c(\{i\}) - \tfrac{c(\{i\})}{c(\{1\})+c(\{2\})}\left[c(\{1\}) + c(\{2\}) - c(\{1,2\})\right].$$

On a bien $x_1 + x_2 = c(\{1,2\})$ et $x_i \leq c(\{i\})$, $i = 1,2$ et donc $x = (x_1,x_2)$ est une imputation du coeur. Cette méthode, sous l'hypothèse de sous-additivité dont on s'est servie, définit ici une imputation du coeur parce que, dans un jeu à deux joueurs, il n'y a pas de coalition intermédiaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de coalitions autre que les coalitions d'un seul joueur et la grande coalition.

[3] Rappelons que pour les jeux symétriques nous sommes convenus de noter $\bar{c}(m)$ le coût de réalisation coordonnée de m projets, quels qu'ils soient.

trois joueurs en question. Puisqu'aucune pré-imputation n'est robuste à une telle menace, le coeur de ce jeu est vide. Il est clair que c'est le coût de réalisation des groupes intermédiaires de trois projets qui, parce qu'il est relativement faible, est responsable ici de la vacuïté du coeur.

Un autre exemple classique de jeux de coûts à coeur vide est celui des jeux essentiels à somme constante parce que, dans ces jeux, les coalitions de $n-1$ joueurs, quel que soit n, sont trop efficaces.[4]

Pour que le coeur soit non-vide il faut donc, et il suffit, que les coûts de réalisation coordonnée des projets des coalitions intermédiaires $S \subset N$, soient suffisamment élevés par rapport au coût de réalisation de tous les projets. Dans les jeux symétriques cette condition prend la forme relativement simple, suivante :

Proposition 1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que le coeur d'un jeu de coûts symétrique soit non-vide est que :*

$$\forall m < n : \frac{m}{n}\bar{c}(n) \leq \bar{c}(m)$$

Démonstration. La condition est suffisante. Soit $\overline{x}$ la pré-imputation répartissant le coût global $\bar{c}(n)$ de façon égale entre tous les projets : $\overline{x}_i = \bar{c}(n)/n$, pour $i = 1, \ldots, n$. Cette pré-imputation résiste à toute menace de sécession puisque :

$$\forall S \subset N : |S| = m \Rightarrow \bar{c}(m) \geq \frac{m}{n}\bar{c}(n) = \sum_{i \in S} \overline{x}_i$$

La condition est nécessaire. Supposons qu'on ait $\bar{c}(m) < \frac{m}{n}\bar{c}(n)$ pour un certain $m < n$. Pour toute pré-imputation x convenons d'indicer les joueurs par ordre décroissant des charges qui leur sont imputées : $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, de sorte que $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq \frac{m}{n}\bar{c}(n) > \bar{c}(m)$. Aucune pré-imputation ne peut donc être robuste aux menaces de retrait d'une coalition de taille m. ■

[4] Voir l'Appendice A pour les détails.

On remarquera que la condition de la Proposition 1 est satisfaite par tout jeu symétrique concave. Pour de tels jeux on a en effet :[5]

$$\bar{c}(m) - \bar{c}(m-1) \geq \bar{c}(m+1) - \bar{c}(m), m = 1, \ldots, n-1$$

La fonction $\bar{c}(m)/m$ est donc décroissante de sorte que $\bar{c}(m)/m \geq \bar{c}(n)/n$ pour $m = 1, \ldots, n-1$.

Pour les jeux non-symétriques, l'expression des conditions nécessaires et suffisantes de non-vacuïté est un peu plus complexe car il est plus difficile de formaliser l'idée que les coalitions intermédiaires ne sont pas trop fortes, i.e. que le coût de réalisation coordonnée de leurs projets n'est pas trop faible, comparé au coût de réalisation coordonnée de l'ensemble de tous les projets. Pour cette formalisation nous devons introduire les notions de familles équilibrées de coalitions et de jeu équilibré.

Soit $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_h, \ldots, S_m\}$ une famille de coalitions non-vides, où $S_h \in \mathcal{N} \backslash \phi$ pour $h = 1, \ldots, m$. On dit que cette famille est une *famille équilibrée* si :

a) tout joueur $i \in N$ est membre d'au moins une coalition de la famille : $\forall i \in N : \exists S_h \in \mathcal{S} : i \in S_h$

b) il existe des nombres positifs $\lambda_h,\ h = 1, \ldots, m$, dits poids d'équilibrage, tels que, pour tout joueur, la somme des poids des coalitions auxquelles il appartient est égale à 1 :

$$\forall i \in N : \sum_{h:i \in S_h} \lambda_h = 1$$

Donnons quelques exemples de familles équilibrées de coalitions. Toute partition de N constitue une famille équilibrée, les poids d'équilibrage étant tous égaux à 1. Toute famille constituée de p partitions différentes constitue une famille équilibrée pour des poids $1/p$ affectés à chaque coalition de chaque famille. La famille constituée de toutes les coalitions d'une même taille $m,\ 1 < m < n$, est équilibrée avec des poids égaux à $1/C_{n-1}^{m-1}$, où C_{n-1}^{m-1} est le nombre des combinaisons différentes de $m-1$ éléments pris dans un ensemble de

[5] Voir BMT (2002).

$n-1$ éléments. Les coalitions de taille m dans lesquelles figurent un joueur i sont en effet les coalitions de $m-1$ joueurs autres que i prises dans l'ensemble $N\backslash\{i\}$ de taille $n-1$, auxquelles on ajoute le joueur i. Il y a donc C_{n-1}^{m-1} coalitions de taille m auxquelles le joueur i appartient.

On remarquera que les poids d'équilibrage ne sont pas nécessairement uniques. Toute famille qui est l'union de l partitions différentes peut s'équilibrer par une infinité de poids différents. Il suffit d'une part que les poids attribués à chacune des coalitions d'une même partition soient identiques et d'autre part que la somme des divers poids affectés à chaque partition s'élève à 1. Soit l partitions $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_g, \ldots, \mathcal{P}_l$, où $\mathcal{P}_g = \left(P_{g_1}, \ldots, P_{g_h}, \ldots, P_{gm_g}\right)$, $g = 1, \ldots, l$, et considérons la famille de coalitions $\mathcal{S} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_g, \ldots, \mathcal{P}_l)$. Cette famille est équilibrée par tout système de poids d'équilibrage qui associe à toute coalition P_{g_h} le poids $\lambda_{g_h} = \lambda_g$, pourvu que, pour $g = 1, \ldots, l$, d'une part $0 < \lambda_g < 1$, et d'autre part $\sum_{g=1}^{l} \lambda_g = 1$.

Plus généralement si $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$ et $\mathcal{S}' = \left\{S_1', \ldots, S_h', \ldots, S_p^l\right\}$ sont deux familles équilibrées par des poids respectifs $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h, \ldots, \lambda_m)$ et $\lambda' = \left(\lambda_1', \ldots, \lambda_h', \ldots, \lambda_p'\right)$, alors $\mathcal{S}'' = \left\{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m, S_1', \ldots, S_h', \ldots, S_p'\right\}$ est aussi une famille équilibrée par n'importe quels poids λ_j'' tels que :

$$\lambda_j'' = \begin{cases} \alpha\lambda_g & \text{si } S_j'' = S_g \in \mathcal{S} \\ (1-\alpha)\,\lambda_h & \text{si } S_j'' = S_h' \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

où $\alpha \in (0,1)$. Alors, puisque pour tout i, $\sum_{g:i\in S_g} \lambda_g = 1$ et $\sum_{h:i\in S_h'} \lambda_h' = 1$, il est clair que :

$$\sum_{j:i\in S_j''} \lambda_j'' = \alpha \sum_{g:i\in S_g} \lambda_g + (1-\alpha) \sum_{h:i\in S_h} \lambda_h' = 1$$

On voit qu'en procédant ainsi on peut construire une infinité de familles équilibrées de coalitions qui sont, chacune, équilibrées par une infinité de poids d'équilibrage.

On dit qu'*un jeu de coûts* (c, N) *est équilibré* si, pour toute famille équilibrée $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$ et tout système de poids d'équilibrage $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \ldots, \lambda_m)$, on a :

$$\sum_{g=1}^{m} \lambda_g c\,(S_g) \geq c\,(N)\,.$$

Dans le cas où $\mathcal{S}$ est constituée de toutes les coalitions d'une même taille $m,\ 1 < m < n$, cette condition devient :

$$\forall m < n : \frac{m}{n}\bar{c}(n) \leq \bar{c}(m)$$

Si $\mathcal{S}$ est une partition $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_g, \ldots, P_m\}$, alors les seuls poids d'équilibrage sont tous égaux à 1 et la condition ci-dessus est la condition de sous-additivité $\sum_{h=1}^{m} c(P_h) \geq c(N)$.

Plus généralement cette condition est, pour les jeux qui ne sont pas nécessairement symétriques, l'expression du fait que les coalitions intermédiaires ne sont pas trop puissantes, c'est-à-dire que le coût de réalisation de leurs projets n'est pas trop bas.

Théorème 2 (Bondavera (1963), Shapley (1967)) *Une condition nécessaire et suffisante pour que le coeur d'un jeu de coûts soit non-vide est que ce jeu soit équilibré.*[6]

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit $\bar{x}$ une pré-imputation du coeur et $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$ une famille équilibrée de poids d'équilibrage $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \ldots, \lambda_m\}$. Puisque $\bar{x}$ est dans le coeur, on doit avoir :

$$\sum_{i \in S_g} \bar{x}_i \leq c(S_g)\,,\ g = 1, \ldots, m$$

Multiplions chacune de ces inégalités par le poids λ_g de la coalition concernée et sommons sur l'ensemble des coalitions de la famille. On obtient :

$$\sum_{g=1}^{m} \lambda_g \sum_{i \in S_g} \bar{x}_i \leq \sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g)$$

Permutons l'ordre de sommation dans le membre gauche de l'inégalité :

$$\sum_{i \in N}^{m} \sum_{g:i \in S_h} \lambda_g \bar{x}_i \leq \sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g)$$

Puisque λ est un système de poids d'équilibrage, on a $\sum_{g:i \in S_g} \lambda_g = 1$ pour tout joueur $i \in N$. Par ailleurs $\bar{x}$ est une pré-imputation, de sorte que $\sum_{i \in N} \bar{x}_i = c(N)$. L'inégalité ci-dessus s'écrit donc encore :

$$c(N) \leq \sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g)$$

[6] Cette caractérisation vaut pour tout jeu coopératif, qu'il s'agisse d'un jeu de coûts ou non.

Puisque cette inégalité doit être satisfaite pour toute famille équilibrée, le jeu doit être équilibré. La démonstration de la suffisance, un peu plus technique, est donnée à l'Appendice B. ■

La caractérisation du Théorème 1 peut s'avérer lourde à tester. On vient de remarquer que le nombre des familles équilibrées est infini et que, pour certaines, il existe une infinité de poids d'équilibrage différents. Il est clair que, dans cette infinité de familles et de poids, il y a des redondances. On peut ordonner l'ensemble des familles équilibrées à partir de l'ensemble fondamental des familles équilibrées minimales. On dit qu'une famille équilibrée est une *famille équilibrée minimale* si aucune de ses sous-familles strictes n'est elle-même équilibrée. On peut démontrer que toute famille équilibrée peut s'exprimer comme l'union de familles équilibrées minimales.[7] De plus les familles minimales ne sont équilibrées que pour un seul système de poids d'équilibrage. Toute partition est par exemple une famille minimale dont on a vu plus haut que le système de poids d'équilibrage est unique (chaque coalition est de poids égale à 1, cf supra). Pour déterminer si le coeur est vide ou non il suffit de considérer les familles minimales.

Théorème 3 (Bondavera (1963), Shapley (1967)) *Une condition nécessaire et suffisante pour que le coeur d'un jeu de coûts soit non-vide est que pour toute famille équilibrée minimale $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$, de poids d'équilibrage $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \ldots, \lambda_m)$, on ait :*

$$\sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g) \geq c(N)$$

2.3 Jeux concaves

On a remarqué plus haut que le coeur des jeux symétriques concaves n'est pas vide. C'est une propriété de tous les jeux de coûts concaves, symétriques ou non. Surtout, pour ces jeux, l'ensemble des imputations du coeur est facile à calculer. Montrons comment.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_h, \ldots, a_n)$ un arrangement des joueurs de N et $A(N)$ l'ensemble des arrangements de n joueurs. Pour tout joueur $i \in N$, on note $h(i, a)$ le rang du joueur i

[7] Voir exemple Owen (1995) pour une démonstration.

dans l'arrangement a de ces n joueurs, et on note $i(h,a)$ le joueur qui figure au rang h dans l'arrangement en question. Pour tout arrangement a, on définit le coût incrémental du joueur j dans cet arrangement comme l'accroissement du coût qu'implique l'adjonction de son projet au sous-ensemble des projets de rangs inférieurs au sien, dans l'arrangement en question. Notons $\delta c(j,a)$ ce coût incrémental :

$$\begin{aligned}\delta c(j,a) &= c(\{i(1,a), i(2,a), \ldots, i(h(j,a)-1,a), j\}) \\ &\quad - c(\{i(1,a), i(2,a), \ldots, i(h(j,a)-1,a)\})\end{aligned}$$

On appelle *imputation par les coûts incrémentaux sous l'arrangement* a, le vecteur $\tilde{x}(a)$ de composantes $\tilde{x}_i(a) = \delta c(i,a)\,,\ i \in N$. Il s'agit bien d'une imputation car, sous l'hypothèse de sous-additivité de la fonction de coûts, $\forall a \in A(N)\,,\ \forall i \in N$, on a $\tilde{x}_i(a) \leq c(\{i\})$. Si de plus la fonction de coût est strictement sous-additive le seul joueur i pour lequel on a $\tilde{x}_i(a) = c(\{i\})$ est celui qui figure au premier rang dans l'arrangement a en question.

Dans un jeu concave toute imputation par les coûts incrémentaux est une imputation du coeur (cf Appendice C). De plus toute imputation du coeur est une combinaison linéaire convexe d'imputations par les coûts incrémentaux.

Théorème 4 (Shapley (1971)) *Soit (c,N) un jeu de coûts concave. Quel que soit l'arrangement $a \in A(N)$, l'imputation par les coûts incrémentaux $\tilde{x}(a)$ est une imputation du coeur. Le coeur est la fermeture convexe de l'ensemble $\{\tilde{x}(a), a \in A(N)\}$ de l'ensemble des imputations par les coûts incrementaux, i.e. :*

$$\begin{aligned}&x \in \mathcal{C}(N) \Leftrightarrow \exists \gamma(a), a \in A(N), \gamma(a) \geq 0, \forall a \in A(N), \text{ et} \\ &\qquad\qquad \sum_{a \in A(N)} \gamma(a) = 1 : \forall i \in N : x_i = \sum_{a \in A(N)} \gamma(a)\, \tilde{x}_i(a)\,.\end{aligned}$$

Ré-examinons le jeu de répartition du coût de construction du système d'approvisionnement au gaz de trois régions, présenté dans BMT (2002), dont la fonction de coûts est pour rappel :

$$
\begin{aligned}
c(\{1\}) &= 7000, \quad c(\{2\}) = 4800, \quad c(\{3\}) = 4800 \\
c(\{1,2\}) &= 10616, \quad c(\{1,3\}) = 10462, \quad c(\{2,3\}) = 9600 \\
c(\{1,2,3\}) &= 14002
\end{aligned}
$$

Le tableau 1 donne les six imputations par les coûts incrémentaux correspondant aux six arrangements possibles des trois agents.

	Imputations		
Arrangements	Projet 1	Projet 2	Projet 3
$(1,2,3)$	7000	3616	3386
$(1,3,2)$	7000	3462	3540
$(2,1,3)$	5816	4800	3386
$(2,3,1)$	4402	4800	4800
$(3,1,2)$	5662	3540	4800
$(3,2,1)$	4402	4800	4800

Tableau 1 – Imputations par les coûts incrémentaux dans le jeu de construction du réseau de gazoducs

Toute imputation du coeur est une combinaison linéaire convexe de ces six imputations. L'ensemble des imputations du coeur est donc assez vaste. L'intervalle des charges qui pourraient être retenues dans le coeur varie :

- pour le projet 1 de 4402 à 7000, soit dans un rapport de 100 à 160 ;
- pour le projet 2 de 3462 à 4800, soit dans un rapport de 100 à 138 ;
- pour le projet 3 de 3386 à 4800, soit dans un rapport de 100 à 140.

Ce qui rend ces intervalles assez larges dans les jeux concaves, c'est le fait que, dans cette classe de jeux, pour chaque joueur il existe des imputations du coeur dans lesquelles il se voit demander une contribution aux coûts globaux exactement égale au coût de réalisation isolée de son projet. C'est en effet la contribution qui lui est demandée dans toute imputation par les coûts incrémentaux sous tous les arrangements dans lesquels il figure au premier rang. Donc le pire qu'il puisse lui arriver dans le coeur est qu'il ne retire aucun bénéfice de sa coopération avec les autres joueurs. Ceci ne peut cependant pas se produire simultanément pour tous les joueurs dans un jeu essentiel où $\sum_{i \in N} c(\{i\}) > c(N)$.

La plus petite contribution qu'on puisse demander à un joueur i est l'accroissement de coûts que provoque l'adjonction de son projet à l'ensemble $N \setminus \{i\}$ des projets des autres joueurs. Par exemple pour le projet 1 la plus petite contribution est l'accroissement de coûts 4402, auquel il faut consentir lorsqu'on ajoute ce projet aux projets 2 et 3.

Formellement, dans un jeu concave (c, N), si le concept de solution retenu est le coeur, alors :

$$\overline{\sigma}_i (c, N) = \max_{S \subseteq N : i \in S} \{c(S) - c(S \setminus \{i\})\} = c(\{i\})$$

et :

$$\underline{\sigma}_i (c, N) = \min_{S \subseteq N : i \in S} \{c(S) - c(S \setminus \{i\})\} = c(\{i\}) - c(\phi) = c(N) - c(N \setminus \{i\})$$

2.4 Jeux à rendements croissants

Le coeur des jeux à rendements croissants n'est jamais vide. Considérons un tel jeu et soit $\gamma = (\gamma_1, .., \gamma_n) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ un système de poids pour lequel :

$$\forall S, T \leq N : S \leq T \Rightarrow \gamma(S) c(T) \leq \gamma(T) c(S).$$

Soit x la pré-imputation du coût $c(N)$ proportionnelle aux poids γ_i :

$$x_i = \frac{\gamma_i}{\gamma(N)} c(N)$$

Pour toute coalition ScN, ou x, puisque $\gamma(S) c(N) \leq \gamma(N) c(S)$:

$$\sum_{i \in S} x_i = \frac{\gamma(S)}{\gamma(N)} c(N) \leq c(S)$$

Aucune coalition n'a donc intérêt à faire recession.

2.5 Jeux décomposables

Décomposition en coûts directs et coûts joints On peut ramener l'étude du coeur d'un jeu (c, N) qui admet une décomposition $(d, \hat{c})$ en coûts directs et coûts joints, à l'étude du coeur du jeu $(\hat{c}, N)$, réduit à la seule fonction de coûts joints $\hat{c}$. Il est clair que si $\hat{x}$ est une imputation du jeu $(\hat{c}, N)$ alors le vecteur $\overline{x}$ défini par $\overline{x}_i = \hat{x}_i + d_i$ pour tout i, est une imputation du jeu (c, N). De plus, si $\hat{x}$ est une imputation du coeur de $(\hat{c}, N)$ alors $\overline{x}$ est dans le coeur de (c, N). On a :

$$\forall S \subset N : \sum_{i \in S} \hat{x}_i \leq \hat{c}(S)$$

d'où :

$$\sum_{i \in S} \bar{x}_i = \sum_{i \in S} (\hat{x}_i + d_i) \leq \hat{c}(S) + \sum_{i \in S} d_i = c(S)$$

Décomposition en éléments de coûts Considérons un jeu (c, N) qui admet une décomposition en éléments de coûts $(m, \tilde{c})$, où pour $g = 1, \ldots, m$, $\tilde{N}(g)$ est le sous-ensemble d'agents qui ont besoin d'utiliser l'équipement g de coût $\tilde{c}^g$. Notons $\tilde{n}(g) = \left|\tilde{N}(g)\right|$ le nombre de ces agents. Il semble équitable de répartir cette partie $\tilde{c}^g$ du coût $c(N)$,[8] de façon égale entre tous les projets qui utilisent l'équipement g en question. Appelons *partie équitable du coût* $\tilde{c}^g$ imputée à tout $i \in \tilde{N}(g)$, le montant :

$$y^g = \tilde{c}^g / \tilde{n}(g)$$

L'imputation équitable par décomposition est l'imputation qui demande à chaque joueur une contribution égale à la somme des parties équitables des équipements qu'utilise son projet. En d'autres termes, si $\overline{x}$ est une imputation équitable par décomposition, alors :

$$\forall i \in N : \overline{x}_i = \sum_{g : i \in \tilde{N}(g)} y^g$$

[8] Rappelons que dans ces jeux $c(N) = \sum_{g=1}^{m} \tilde{c}^g$.

Il s'agit bien d'une imputation puisque :

$$\sum_{i\in S}\overline{x}_i=\sum_{i\in N}\sum_{g:i\in\tilde{N}(g)}y^g=\sum_{g=1}^{m}\tilde{n}\left(g\right)y^g=\sum_{g=1}^{m}\tilde{c}^g=c\left(N\right)$$

L'imputation équitable par décomposition appartient au coeur. C'est une conséquence quasi-immédiate du fait que, dans ce genre de jeu :

$$\forall S\subseteq N\backslash\phi:c\left(S\right)=\sum_{g:S\cap\tilde{N}(g)\neq\phi}\tilde{c}^g$$

Si les membres de la coalition S veulent réaliser leurs projets indépendamment des autres joueurs, ils devraient payer, pour chaque équipement g utilisé, la totalité du coût $\tilde{c}^g$ de l'équipement en question. Pout tout équipement g, on a évidemment $\tilde{c}^g\geq\left[\tilde{n}\left(g,S\right)/\tilde{n}\left(g\right)\right]\tilde{c}^g$, où $\tilde{n}\left(g,S\right)$ est le nombre des membres de la coalition S qui appartiennent à $\tilde{N}\left(g\right)$. Or $\left[\tilde{n}\left(g,S\right)/\tilde{n}\left(g\right)\right]\tilde{c}^g$ est ce qu'on demande à l'ensemble des membres de la coalition S au titre de l'équipement g. On a donc :

$$\sum_{i\in N}\overline{x}_i=\sum_{g=1}^{m}\left[\tilde{n}\left(g,S\right)/\tilde{n}\left(g\right)\right]\tilde{c}^g\leq\sum_{g:S\cap\tilde{N}(g)\neq\phi}\tilde{c}^g=c\left(S\right)$$

Le coeur des jeux qui admettent une décomposition en éléments de coûts n'est donc pas vide, et, connaissant la structure de cette décomposition, le calcul d'une imputation du coeur est aisé.

3 Le coeur - Propriétés

Examinons maintenant les propriétés que possède ou ne possède pas le coeur lorsqu'il n'est pas vide.

3.1 Traitement identique et symétrique des projets équivalents

Le traitement identique de projets équivalents requiert que, dans toute imputation du coeur x, les projets d'un même ensemble maximal E de projets équivalents se voient imposer les mêmes charges :

$$x_i=x_j,\forall i,j\in E$$

Bien que ce ne soit pas exclu, on va en donner un exemple, ce n'est généralement pas le cas.

Un exemple de jeu pour lequel la propriété est vérifiée est le jeu suivant.

Exemple 2 Soit le jeu symétrique à quatre joueurs dont la fonction de coûts est :

$$\bar{c}(1) = 1, \bar{c}(2) = 1.5, \ \bar{c}(3) = 2.5 \text{ et } \bar{c}(4) = 3$$

Montrons que la seule répartition du coût global $\bar{c}(4) = 3$ qui appartienne au coeur est l'imputation qui impose à chaque joueur la même charge $x_i = 0.75$. On vérifie aisément que cette imputation n'est bloquée par aucune coalition. Considérons maintenant une imputation x inégalitaire et la coalition, que l'on note $\hat{S}$, des deux joueurs à qui sont demandées les contributions les plus élevées. Par hypothèse, pour cette coalition $\hat{S}$, on a :

$$\sum_{i \in \hat{S}} x_i > \frac{1}{2}\bar{c}(4) = 1.5 = c\left(\hat{S}\right)$$

La coalition $\hat{S}$ bloque donc la pré-imputation en question.

En général cependant les projets équivalents ne sont pas traités de façon identique dans le coeur. C'est le cas en particulier des jeux strictement[9] concaves. Pour un tel jeu on a :

$$\bar{c}(1) > \bar{c}(2)/2 > \cdots > \bar{c}(m)/m > \cdots > \bar{c}(n)/n$$

Considérons un arrangement a quelconque des joueurs. On a vu à la section précédente que l'imputation par les coûts incrémentaux sous cet arrangement, $\tilde{x}(a)$, appartient au coeur. On a donc pour les joueurs $i(1,a)$, $i(2,a), \ldots, \ i(h,a), \ldots, \ i(n,a)$:

$$\tilde{x}_{i(1,a)} = \bar{c}(1) > \bar{c}(2) - \bar{c}(1) = \tilde{x}_{i(2,a)} > \cdots > \tilde{x}_{i(h,a)} > \cdots > \tilde{x}_{i(n,a)}$$

Puisque dans tout jeu symétrique la seule classe maximale de projets équivalents est l'ensemble N de tous les projets, la propriété de traitement identique des projets équivalents n'est pas vérifiée dans le coeur. C'est aussi le cas pour les jeux strictement concaves mains non-symétriques, pour des raisons analogues.

[9] i.e. les jeux concaves pour lesquels les inégalités qui figurent dans les conditions équivalentes de définition, (a) ou (b) ; voir BMT (2002).

On remarque en revanche que, tous les arrangements étant admissibles et le coeur étant l'ensemble des combinaisons linéaires convexes des imputations par les coûts incrémentaux, les imputations du coeur d'un jeu concave vérifient la propriété de traitement symétrique des projets équivalents. Montrons que c'est le cas pour tout jeu de coûts, qu'il soit convave ou non.

Proposition 5 *Le coeur est une solution qui vérifie la propriété de traitement symétrique des projets équivalents.*

Démonstration. Soit $\overline{x}$ une imputation telle que pour deux joeurs j et k d'un même ensemble maximal E de joueurs équivalents, on ait $\overline{x}_j \neq \overline{x}_k$. Alors l'imputation $\tilde{x}$, $\tilde{x}_j = \overline{x}_k$, $\tilde{x}_k = \overline{x}_j$ et $\tilde{x}_i = \overline{x}_i$ si $i \notin \{j,k\}$, est aussi une imputation du coeur. Si ce n'était pas le cas, il existerait une coalition $S \subset N \backslash \phi$ pour laquelle :

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}_i > c(S)$$

Cette coalition S ne peut ni ne comprendre que des joueurs $i \notin \{j,k\}$, ni comprendre les deux joueurs j et k, car dans ces deux cas on a $\sum\limits_{i \in S} \tilde{x}_i = \sum\limits_{i \in S} \overline{x}_i$. Supposons que S ne comprenne que le joueur j et considérons la coalition $S' = \{S \cup \{k\}\} \setminus \{j\}$. Puisque $\overline{x}$ est dans le coeur :

$$\sum_{i \in S'} \overline{x}_i \leq c(S')$$

Or par construction $\tilde{x}_j = \bar{x}_k$, et par ailleurs $\tilde{x}_i = \overline{x}_i$ pour tout $i \in S \backslash \{j\}$, de sorte que :

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}_i = \sum_{i \in S'} \overline{x}_i$$

Enfin, j et k appartennant à une même classe de projets équivalents, on a :

$$c(S) = c(S')$$

On devrait donc avoir :

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}_i \leq c(S)$$

d'où une contradiction. ■

3.2 Anonymat

Une solution anonyme est une solution insensible au changement de dénomination des joueurs. Il est évident que le coeur possède cette propriété.

Proposition 6 *Le coeur est une solution anonyme.*

3.3 Insensibilité à l'élimination des joueurs négligeables

Un joueur négligeable est un joueur i pour lequel : $c(S \cup \{i\}) - c(S) = c(\{i\})$, pour tout $S \subseteq N \setminus \{i\}$. Il est clair que si une pré-imputation x exige du joueur i une contribution $x_i < c(\{i\})$, alors la coalition $N \setminus \{i\}$ des autres joueurs peut menacer de se retirer. On a en effet, puisque x est une pré-imputation :

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = c(N) - x_i = c(N \setminus \{i\}) + c(\{i\}) - x_i > c(N \setminus \{i\})$$

Par ailleurs, la contrainte de rationalité individuelle impose que $x_i \leq c(\{i\})$. On doit donc avoir pour toute imputation du coeur, x, et tout joueur i négligeable : $x_i = c(\{i\})$.

Proposition 7 *Le coeur est une solution qui néglige les joueurs négligeables.*

3.4 Additivité et super-additivité

Il devrait être clair que le coeur est une solution additive et donc à fortiori super-additive. Soit deux jeux (c', N) et (c'', N), et le jeu somme (c, N) : $c(S) = c'(S) + c''(S)$ pour tout $S \subseteq N$. Considérons deux imputations $x' \in \mathcal{C}(c', N)$ et $x'' \in \mathcal{C}(c'', N)$, pour lesquelles $\sum_{i \in S} x'_i \leq c'(S)$ et $\sum_{i \in S} x''_i \leq c''(S)$, pour tout $S \subseteq N$. Alors l'imputation $x = x' + x''$, du jeu (c, N), vérifie les relations suivantes :

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} x'_i + \sum_{i \in S} x''_i \leq c'(S) + c''(S) = c(S)$$

Réciproquement, si $x \in \mathcal{C}(c, N)$, alors il existe $x' \in \mathcal{C}(c', N)$ et $x'' \in \mathcal{C}(c'', N)$ tels que $x' + x'' = x$.

Proposition 8 *Le coeur est une solution additive.*

3.5 Traitement équivalent des jeux équivalents

Il est évident que le coeur vérifie la propriété. Pour tout $\alpha > 0$:

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \Leftrightarrow \sum_{i \in S} (\alpha x_i + \beta_i) \leq \alpha c(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$$

Proposition 9 *Le coeur est une solution qui traite de façons équivalentes les jeux équivalents.*

3.6 Égal partage du gain de la coopération

En général, le coeur, lorsqu'il n'est pas vide, comprend plusieurs imputations. Elles ne peuvent donc pas évidemment toutes, correspondre à un partage égal des gains de la coopération. Rien ne garantit non plus que l'imputation par égal partage du gain de la coopération appartienne au coeur puisque ce mode de répartition ne tient compte que des coûts des coalitions d'un seul joueur et de la grande coalition.

Considérons l'exemple du jeu de coûts suivant :

$$c(\{1\}) = 500, \; c(\{2\}) = 1000, \; c(\{3\}) = 5000, \text{ et, } c(\{1,2,3\}) = 5000.$$

Ce mode d'imputation implique les financements individuels suivants :

$$x_1 = -100, \; x_2 = 900 \text{ et } x_3 = 4400.$$

Puisque $x_1 = -100$, les joueurs 2 et 3 doivent payer ensemble

$$c(\{1,2,3\}) + 100$$

c'est-à-dire plus que le coût de réalisation des trois projets. Puisque le jeu vérifie la condition de monotonicité, on a $c(\{1,2,3\}) \geq c(\{2,3\})$ et cette imputation n'est pas robuste à la menace de retrait de ces deux joueurs.

On a vu que, pour les jeux qui admettent une décomposition en éléments de coût, l'imputation équitable par décomposition appartient au coeur. Il faut souligner que, dans ces jeux, cette imputation est généralement différente de l'imputation par égal partage des gains de la coopération. Soit un jeu (c, N) qui admet la décomposition $(m, \tilde{c})$, où pour $g = 1, \ldots, m, \tilde{N}(g)$ est le sous-ensemble des $\tilde{n}(g)$ joueurs qui ont besoin de l'équipement g pour réaliser leur projet :

$$\forall i \in N : c(\{i\}) = \sum_{g: i \in \tilde{N}(g)} \tilde{c}^g \text{ et } c(N) = \sum_{g=1}^{m} \tilde{c}^g$$

L'imputation $\tilde{x}$ par égal partage des gains de la coopération exige du joueur i qu'il prenne en charge la partie suivante du coût global :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= \sum_{g: i \in \tilde{N}(g)} \tilde{c}^g - \frac{1}{n} \left(\sum_{j \in N} \sum_{g: j \in \tilde{N}(g)} \tilde{c}^g - \sum_{g=1}^{m} \tilde{c}^g \right) \\ &= \sum_{g: i \in \tilde{N}(g)} \tilde{c}^g - \frac{1}{n} \left(\sum_{g=1}^{m} \tilde{n}(g) \tilde{c}^g - \sum_{g=1}^{m} \tilde{c}^g \right) \end{aligned}$$

L'imputation équitable par décomposition $\overline{x}$ met à la charge du joueur i, la partie du coût global :

$$\overline{x}_i = \sum_{g: i \in \tilde{N}(g)} \tilde{c}^g / \tilde{n}(g)$$

Sauf exception ces deux imputation ne coïncident pas, comme le montre l'exemple 3.

Exemple 3 Soit le jeu à trois joueurs, décomposable en éléments de coût, présenté au tableau 2, dans lequel une croix dans une case signifie que le projet correspondant à la ligne a besoin de l'équipement correspondant à la colonne. Dans ce jeu $c(\{1, 2, 3\}) = 600$ et

$$\frac{1}{3} \left[\sum_{i \in N} c(\{i\}) - c(\{1, 2, 3\}) \right] = \frac{1}{3} [1200 - 600] = 200$$

de sorte que l'imputation par égal partage des gains de la coopération, $\tilde{x}$, prend la valeur suivante :

$$\tilde{x}_1 = 400 - 200 = 200,\ \tilde{x}_2 = 500 - 200 = 300, \text{ et } \tilde{x}_3 = 300 - 200 = 100,$$

tandis que l'imputation équitable par décomposition $\bar{x}$ a pour valeur :

$$\bar{x}_1 = 50 + 150 = 200,\ \bar{x}_2 = 100 + 150 = 250, \text{ et } \bar{x}_3 = 50 + 100 = 150.$$

Les deux imputations sont donc différentes. On remarque cependant que l'imputation $\tilde{x}$ est aussi une imputation du coeur. On a en effet, $\forall i,\ j \in N,\ i \neq j,\ c(\{i, j\}) = 600$ et $\max\{\tilde{x}_i + \tilde{x}_j \mid i, j \in N, i \neq j\} = 500$, de sorte que $\tilde{x}$ est robuste aux menaces de sécession des coalitions de deux joueurs. Comme elle est par construction robuste aux menaces de sécession des coalitions d'un seul joueur, elle est dans le coeur. Ce n'est cependant pas une propriété des jeux décomposables en éléments de coût comme le montre l'exemple suivant.

	$g =$			$c(\{i\})$
	1	2	3	
$\tilde{c}^g$	100	200	300	
$i =$ 1	x		x	400
$i =$ 2		x	x	500
$i =$ 3	x	x		300
$\tilde{c}^g / \tilde{n}(g)$	50	100	150	

Tableau 2 – Décomposition en éléments de coût du jeu de l'exemple 3

Exemple 4 Soit le jeu à trois joueurs dont la décomposition en éléments de coûts est présentée au tableau 3. On a $\sum_{i \in N} c(\{i\}) - c(N) = 1300 - 1200 = 100$ et donc l'imputation par égal partage de la réduction de coûts, $\tilde{x}$, est :

$$\tilde{x} = 100 - \frac{1}{3}100 = \frac{2}{3}100,\ \tilde{x}_2 = 200 - \frac{1}{3}100 = \frac{5}{3}100,\ \tilde{x}_3 = 1000 - \frac{1}{3}100 = \frac{29}{3}100.$$

Or $c(\{1,2\}) = 200 < \frac{7}{3}100 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$. C'est une conséquence immédiate du fait qu'avec cette méthode d'imputation le joueur 3 qui est un joueur négligeable se voit demander une contribution inférieure à 1000, le coût de réalisation isolée de son projet, alors qu'on sait (cf. sous-section 3.3 supra) que dans toute imputation du coeur il devrait se voir imposer une contribution exatement égale à 1000.

		$g =$			$c(\{i\})$
		1	2	3	
$\tilde{c}^g$		100	100	1000	
$i =$	1	x			100
	2	x	x		200
	3			x	1000

Tableau 3 – Décomposition en éléments de coût du jeu de l'exemple 4

3.7 Monotonicité

Le coeur est une solution qui n'est pas nécessairement monotone par rapport aux coûts des coalitions, comme le montre l'exemple suivant, emprunté à Young (1994).

Exemple 5 Soit le jeu à cinq joueurs dont la fonction de coûts est définie par :

$$c\left(S^h\right) = Y^h, \quad h = 1,2,3,4,5$$

où :

$$S^1 = \{3,5\}, S^2 = \{2,4,5\}, S^3 = \{1,3,4\}, S^4 = \{1,2,4\}, S^5 = \{1,2,4,5\};$$

$$c(N) = \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{5} c\left(S^h\right) \quad \text{et} \quad c(S) = \min_h \left\{c\left(S^h\right) \mid S \subseteq S^h\right\} \ \forall S \neq S^h,\ h = 1,\ldots,5$$

Pour que c soit monotone, il faut que $Y^2 \leq Y^5$ puisque $S^2 \subseteq S^5$; $Y^4 \leq Y^5$ puisque $S^4 \subseteq S^5$; et $Y^h \leq \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{5} Y^k$, puisque $S^h \subseteq N$, pour $h = 1,\ldots,5$. On verra plus loin que d'autres conditions sur les Y^h doivent être satisfaites.

Pour qu'une imputation x soit dans le coeur de ce jeu, il faut que :

$$\forall h = 1,\ldots,5 : \sum_{i \in S^h} x_i \leq c\left(S^h\right) = Y^h$$

où les coalitions S^h sont choisies de telle sorte que chaque joueur i apparait exactement trois fois dans l'une ou l'autre d'entre elles. On doit donc avoir :

$$3\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{h=1}^{5}\sum_{i \in S^h} x_i \leq \sum_{h=1}^{5} c\left(S^h\right) = \sum_{h=1}^{5} Y^h$$

Mais puisque x est une imputation, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = c(N) = \frac{1}{3}\sum\limits_{h=1}^{5} Y^h$, de sorte que chacune des inégalités faibles qui doivent vérifier les différentes coalitions h doivent être satisfaites avec l'égalité. En d'autres termes x doit être solution des cinq équations linéaires en x_i, $i = 1,\ldots,5$:

$$\sum_{i \in S^h} x_i = Y^h, \quad h = 1,\ldots,5$$

Le déterminant de ce système est égal à 3 et des calculs simples montrent que :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3}\left(0Y^1 - 3Y^2 + 0Y^3 + 0Y^4 + 3Y^5\right) \\
x_2 &= \frac{1}{3}\left(-1Y^1 + 2Y^2 - 1Y^3 + 2Y^4 - 1Y^5\right) \\
x_3 &= \frac{1}{3}\left(1Y^1 + 1Y^2 + 1Y^3 + 1Y^4 - 2Y^5\right) \\
x_4 &= \frac{1}{3}\left(-1Y^1 + 2Y^2 + 2Y^3 - 1Y^4 - 1Y^5\right) \\
x_5 &= \frac{1}{3}\left(2Y^1 - 1Y^2 - 1Y^3 - 1Y^4 + 2Y^5\right) \\
\sum_{i=1}^{5} x_i &= \frac{1}{3}\left(Y^1 + Y^2 + Y^3 + Y^4 + Y^5\right) = c(N)
\end{aligned}$$

Pour que le coeur ne soit pas vide il faut de plus que $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 5$, sinon la coalition des joueurs j pour lesquels $x_j < 0$ ferait sécession. Par hypothèse, $Y^5 \geq Y^2$, de sorte que $x_1 \geq 0$. Le respect de cette condition pour les autres x_i impose des restrictions supplémentaires sur les valeurs admissibles des Y^h. Montrons qu'il existe des valeurs des Y^h pour lesquelles ces conditions de non-négativité sont satisfaites d'une part, et la condition de monotonicité est violée, d'autre part.

Supposons d'abord que les Y^h prennent les valeurs $\overline{Y}^h$ suivantes :

$$\overline{Y}^1 = 3, \overline{Y}^2 = 9, \overline{Y}^3 = 9, \overline{Y}^4 = 3 \text{ et } \overline{Y}^5 = 9, \text{ d'où } c(N) = 11.$$

L'imputation du coeur correspondant à ces valeurs est l'imputation $\overline{x}$:

$$\overline{x}_1 = 0, \overline{x}_2 = 1, \overline{x}_3 = 2, \overline{x}_4 = 7, \text{ et } \overline{x}_5 = 1, \text{ d'où } \sum_{i=1}^{5} \overline{x}_i = 11.$$

Supposons maintenant que les Y^h prennent les valeurs $\hat{Y}^h$ suivantes :

$$\hat{Y}^1 = 3, \hat{Y}^2 = 9, \hat{Y}^3 = 9, \hat{Y}^4 = 3 \text{ et } \hat{Y}^5 = 12, \text{ d'où } c(N) = 12.$$

L'imputation du coeur correspondant à ces valeurs est l'imputation $\hat{x}$:

$$\hat{x}_1 = 3, \hat{x}_2 = 0, \hat{x}_3 = 0, \hat{x}_4 = 6 \text{ et } \hat{x}_5 = 3, \text{ d'où } \sum_{i=1}^{5} \hat{x}_i = 12.$$

Or pour tout joueur, le passage du jeu défini par les $\overline{Y}^h$ au jeu défini par les $\hat{Y}^h$, implique que le coût de réalisation coordonnée des projets d'une au moins des coalitions à laquelle ce joueur appartient, augmente (noter que $c(N)$ passe de 11 à 12) ; tandis qu'aucune des coalitions auxquelles il appartient, ne voit son coût baisser. La condition de monotonicité par rapport aux coûts des coalitions impliquerait donc que pour tout joueur i, on ait : $\hat{x}_i \geq \overline{x}_i$. Or pour les joueurs 2 et 4, on a : $\hat{x}_2 = 0 < 1 = \overline{x}_2$ et $\hat{x}_3 = 0 < 2 = \overline{x}_3$.

Il existe une classe de jeux qui vérifient la propriété de monotonicité stricte par rapport aux coûts des coalitions, la classe des jeux concaves. On a remarqué[10] que pour cette classe

[10] cf sous-section 2.3 supra

de jeux, on a, si le concept de solution envisagé est le coeur : $\overline{\sigma}_i(c, N) = c(\{i\})$ et $\underline{\sigma}_i(c, N) = c(N) - c(N \setminus \{i\})$. Le coeur est donc un concept de solution faiblement monotone pour ces jeux. Il est aussi strictement monotone pour la raison suivante. Supposons deux jeux concaves (c, N) et (c', N) qui diffèrent l'un de l'autre parce que, pour une coalition S, $c'(S) > c(S)$. On sait que dans ces jeux l'ensemble des allocations du coeur est la fermeture convexe de toutes les allocations par les coûts incrémentaux sous tous les arrangements possibles des joueurs. Donc le point extrême du coeur correspondant à l'imputation par les coûts incrémentaux sous l'arrangement dans lequel $i \in S$ figure au rang $|S|$, les autres joueurs $j \neq i$, $j \in S$, occupant les $|S| - 1$ premiers rangs s'obtient dans le jeu (c, N) en ajoutant à la composante i de la même imputation dans le jeu (c', N), l'accroissement $c'(S) - c(S)$.[11]

Pour tous les arrangements dans lesquels les $|S|$ premiers joueurs ne sont pas les joueurs de la coalition S, la composante, d'une imputation par les coûts incrémentaux sous l'arrangement en question, correspondant à un joueur $i \in S$ ne change pas. [12] La condition de monotonicité stricte est donc vérifiée, i.e. si x est une imputation du coeur de (c, N) il existe une imputation x' du coeur de (c', N) telle que $x'_i \geq x_i$ pour tout $i \in S$. Il suffit de considérer l'imputation $x' = \sum_{x \in A(n)} \lambda_a \tilde{x}(a)$, où les $\tilde{x}(a)$, $a \in A(N)$, sont les imputations par les coûts incrémentaux dans le jeu (c', N) et les $\lambda_a \geq 0$ pour tout $a \in A(N)$, sont les poids qui définissent dans le jeu (c, N), l'imputation $x \in \mathcal{C}(c, N)$, à partir des imputations par les coûts incrémentaux dans ces jeux : $x = \sum_{a \in A(N)} \lambda_a \tilde{x}(a)$.

[11] On remarquera que pour un joueur de rang $|S| + 1$, donc un $j \notin S$, la composante j dans le jeu (c', N) déduit de la composante correspondante dans le jeu (c, N) en retranchant $c'(S) - c(S)$. Pour les joueurs de rangs supérieurs à $|S| + 1$ rien ne change.

[12] Il en est de même pour les joueurs $j \notin S$.

3.8 Cohérence

Le coeur est une solution cohérente. Soit un jeu (c, N) et x une imputation du coeur. Considérons le jeu réduit via la coalition T et x, dont la fonction de coûts est,[13] pour tout $S \subset T, S \neq \phi$:

$$c_{T_x}(S) = \min \left\{ c(S \cup U) - \sum_{i \in U} x_i \mid U \subseteq N \backslash T \right\}$$

Soit $\overset{*}{U}(S)$, $\overset{*}{U}(S) \subseteq N \backslash T$, une coalition solution du problème de minimisation définissant $c_{T_x}(S)$. Puisque $x \in \mathcal{C}(c, N)$ on a pour tout $S \subset T$:

$$\sum_{i \in S \cup \overset{*}{U}(S)} x_i \leq c\left(S \cup \overset{*}{U}(S)\right)$$

i.e. :

$$\sum_{i \in S} x_i \leq c\left(S \cup \overset{*}{U}(S)\right) - \sum_{i \in \overset{*}{U}(S)} x_i$$

et donc $\{x_i, i \in T\}$ est une imputation qui est robuste à toute menace de sécession dans le jeu (c_{T_x}, T).

Puisque $\{x_i, i \in T\}$ est dans le coeur de (c_{T_x}, T) pour tout $x \in \mathcal{C}(c, N)$ et tout $T \subset N$, le coeur est une solution cohérente. Un raisonnement similaire montre que c'est aussi une solution cohérente au sens de Hart et Mas-Collel. Enfin il devrait être clair que c'est une solution qui satisfait la condition de cohérence inverse.

En fait le coeur est la seule solution qui soit cohérente et super-additive, comme l'a montré Peleg (1986).[14]

Théorème 10 (Peleg (1986)) *Considérons la classe des jeux de coûts équilibrés. Alors la seule solution effective sur cette classe de jeux qui est cohérente au sens faible et super-additive, est le coeur.*

[13] Il en est de même pour les joueurs $j \notin S$.

[14] La démonstration de ce théorème sort du cadre de ce document. Le lecteur intéressé la trouvera dans Peleg (1986).

4 Le semi-coeur

Le semi-coeur est une solution obtenue en affaiblissant les conditions de robustesse aux menaces de sécession. L'affaiblissement procède ici par réduction du nombre des coalitions considérées comme susceptibles de menacer de se séparer de la grande coalition. Plus précisément ne sont admises que les coalitions d'un seul joueur et symétriquement de tous les joueurs sauf un. Une imputation est dans le semi-coeur si aucun joueur n'a intérêt à se séparer de la grande coalition (rationalité individuelle) et si les autres joueurs n'ont pas non plus intérêt à se séparer de lui. Formellement une pré-imputation x est dans le semi-coeur du jeu (c, N) si :

$$\forall i \in N : x_i \leq c(\{i\})\, et \sum_{j \neq i} x_j \leq c(N \backslash \{i\})$$

Il est clair que dans les jeux à trois joueurs ou moins, coeur et semi-coeur sont confondus.

Certaines méthodes de partage des coûts définissent des imputations extérieures au coeur, mais qui sont dans le semi-coeur. C'est le cas de la méthode des bénéfices résiduels. Rappelons que cette méthode impose à tout projet i une participation x_i qui s'élève à :[15]

$$x_i = \delta(\{i\}) + \frac{c(\{i\}) - \delta(\{i\})}{\sum\limits_{j \in N} [c(\{j\}) - \delta(\{j\})]} \left(c(N) - \sum_{j \in N} \delta(\{j\}) \right)$$

La formule implique qu'on impose d'abord à chaque projet i de payer son coût incrémental $\delta(\{i\})$ et qu'ensuite :

- si ce financement s'avère insuffisant, i.e. si $\sum\limits_{j \in N} \delta\{j\} < c(N)$,[16] on demande un complément à chaque projet i pour couvrir le déficit constaté, complément proportionnel à l'économie de coût (par rapport au coût de réalisation isolée $c(\{i\})$) permise par le seul payement du coût incrémental ;

[15] On note $\delta(S)$ le coût incrémental de la coalition S, $c(N) - c(N \backslash S)$.

[16] Sous les hypothèses posées sur c la différence $c(N) - \sum\limits_{j \in N} \delta(\{j\})$ peut être de n'importe quel signe. Dans les jeux concaves elle est nécessairement positive.

- si ce financement génère des bénéfices, i.e. si $\sum_{j\in N}\delta(\{j\}) > c(N)$, on ristourne les bénéfices ainsi obtenus, $c(N) - \sum_{j\in N}\delta\{j\}$, aux différents projets selon la même règle de proportionalité.

  On remarquera que, sous l'hypothèse de sous-additivité de la fonction de coûts c, on a $c(\{i\}) \geq c(N) - c(N\setminus\{i\}) = \delta(\{i\})$, de sorte que :

- s'il s'avère que la somme des coûts incrémentaux $\sum_{j\in N}\delta\{j\}$ est inférieure au coût global $c(N)$, tous les projets strictement bénéficiaires sous ce seul mode de financement, i.e. les projets $j : c(\{j\}) - \delta(\{j\}) > 0$ et eux-seuls, sont appelés à concourir au comblement du déficit ;
- s'il s'avère que la somme des coûts incrémentaux est supérieure au coût global $c(N)$, tous les projets qui pâtiraient de ce seul mode de financement, i.e. les projets j : $c(\{j\}) - \delta(\{j\}) < 0$, bénéficient de la répartition du surplus ainsi généré.

Il est clair que l'imputation ainsi obtenue n'appartient pas nécessairement au coeur puisque n'apparaissent, dans la formule qui la définit, que les seules coalitions d'un seul joueur et de tous les joueurs sauf un. Si donc cette imputation est robuste à certaines menaces de sécession il ne peut s'agir que des menaces des coalitions d'un seul joueur ou de tous les joueurs sauf un.[17] On peut montrer que cette imputation est dans le semi-coeur.[18]

5 L'ensemble d'imputations stables au sens de von Neuman et Morgenstern

Cette solution proposée par les pères fondateurs de la théorie des jeux est définie en termes de domination.[19] On dit qu'un ensemble de pré-imputations est un ensemble stable si d'une part les pré-imputations de l'ensemble ne se dominent pas l'une l'autre et si, d'autre

[17] Sauf hypothèses additionnelles sur la structure de la fonction de coûts. Par exemple dans les jeux concaves la condition de robustesse aux menaces des seules coalitions de $n-1$ joueurs est une condition très forte.

[18] cf Young (1994).

[19] Pour la définition de la domination d'une pré-imputation par une autre pré-imputation, voir BMT (2002), sous section 4.9.

part, toute pré-imputation extérieure à l'ensemble est dominée par une pré-imputation de l'ensemble.

Formellement, étant donné un jeu (c, N), on appelle ensemble stable tout ensemble de pré-imputations $VNM(c, N) \subseteq PX(c, N)$, tel que :

$$\forall x, x' \in VNM(c, N) : x \not{d} x' \tag{a}$$

$$\forall x' \in PX(c, N) \setminus VNM(c, N), \exists x \in VNM(c, N) : xdx' \tag{b}$$

où la notation $x \not{d} x'$ signifie que la pré-imputation x ne domine pas la pré-imputation x'.

Cette définition est différente de celle du coeur. En termes de domination le coeur se définit comme l'ensemble $\mathcal{C}(c, N)$ des pré-imputations telles que :

$$\forall x \in \mathcal{C}(c, N) \quad , \ \forall x' \in PX(c, N) : x \not{d} x'$$

La condition (a) de la définition d'un ensemble stable est donc satisfaite par l'ensemble des imputations du coeur. Mais une imputation x' d'un ensemble stable pourrait être exclue du coeur parce qu'elle est dominée par une imputation x extérieure à l'ensemble stable, alors qu'elle n'est dominée par aucune imputation de l'ensemble stable lui-même. Les relations entre les deux concepts de solutions sont résumées dans la proposition suivante.

Proposition 11 *Pour tout jeu de coûts* (c, N)*, on a pour tout ensemble stable* $VNM(c, N)$:

a) $\mathcal{C}(c, N) \subseteq VNM(c, N)$.

b) Si $\mathcal{C}(c, N)$ *est lui-même un ensemble stable, alors* $\mathcal{C}(c, N) = VNM(c, N)$*.*

Démonstration. Supposons que la Proposition 7.i soit fausse. Alors il existerait une pré-imputation x' telle que :

$$x' \in \mathcal{C}(c, N) \text{ et } x' \notin VNM(c, N)$$

Puisque $x' \notin VNM(c, N)$, il existe une pré-imputation $x \in VNM(c, M)$ qui domine x'. Il s'agit d'une contradiction car $x' \in \mathcal{C}(c, N)$ implique que x' n'est dominée par aucune pré-imputation.

Considérons maintenant un ensemble stable $VNM(c,N)$. On vient de démontrer qu'on devait avoir $\mathcal{C}(c,N) \subseteq VNM(c,N)$. Supposons que la Proposition 7.ii soit fausse, i.e. que $\mathcal{C}(c,N) \neq VNM(c,N)$. Il existerait alors une pré-imputation x' telle que :

$$x' \in VNM(c,N) \text{ et } x' \notin \mathcal{C}(c,N)$$

Si $\mathcal{C}(c,N)$ est lui-même un ensemble stable, il existe une pré-imputation $x \in \mathcal{C}(c,N)$ qui domine $x' \notin \mathcal{C}(c,N)$. Puisque $\mathcal{C}(c,N) \subseteq VNM(c,N)$, x appartient à $VNM(c,N)$. On a donc trouvé deux pré-imputations x et x' dans $VNM(c,N)$ dont l'une domine l'autre, d'où une contradiction. ∎

Dans les jeux de coûts concaves l'ensemble stable de von Neumann et Morgenstern est unique et confondu avec le coeur. Mais c'est plutôt pour les jeux dont le coeur est vide que l'on serait interessé par une solution du type ensemble stable. Si on pense en effet que les relations de domination, ou les menaces de sécession, devraient être des éléments de structuration forts dans la recherche de solutions, l'ensemble stable est un concept de solution qui pourrait être retenu lorsque le coeur du jeu est vide. Puisqu'un tel ensemble est plus vaste que le coeur, il est non-vide pour certains jeux dont le coeur est vide.

Malheureusement l'ensemble stable présente plusieurs défauts, suffisamment rédhibitoires pour qu'il soit rarement employé. D'abord un jeu de coûts peut posséder plusieurs ensembles stables et on connait assez mal la structure de leurs intersections et la structure de leurs unions. Ensuite on ne sait pas caractériser la classe des jeux qui possèdent un ensemble stable au moins. Enfin les propriétés vérifiées par cette solution, hormis celles utilisées dans la définition même de l'ensemble, sont assez mal connues, sauf pour certains jeux très spécifiques qui n'ont pas d'interprétation naturelle en termes de coûts.

6 Le pré-nucléole et le nucléole

Le pré-nucléole et le nucléole sont des solutions qui sélectionnent une seule pré-imputation. Pour toute pré-imputation x et toute coalition S, on appelle économie réalisée par S dans

x, cette partie du coût de réalisation coordonnée de ses projets qu'elle n'a pas à supporter dans la pré-imputation x. Formellement, en notant $e(x,S)$ cette économie :

$$e(x,S) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

On appelle aussi parfois cette économie, l'excès de la coalition S dans la pré-imputation x en question.

Pour tout x, soit $e(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{2^n-2}$ dont les composantes sont les valeurs de $e(x,S)$ lorsque S décrit l'ensemble $\mathcal{N} \setminus \{\phi, N\}$, composantes arrangées par valeurs croissantes. On dit que le vecteur

$$e(x) = (e_1(x), \ldots, e_h(x), \ldots, e_{2^n-2}(x))$$

est lexicographiquement strictement supérieur au vecteur

$$e(x') = (e_1(x'), \ldots, e_h(x'), \ldots, e_{2^n-2}(x'))$$

ce que l'on note $e(x) >_l e(x')$, s'il existe $h, 1 \leq h \leq 2^2 - 2$ tel que :

$$e_j(x) = e_j(x') \text{ pour tout } j < h, \text{ et, } e_h(x) > e_h(x')$$

La définition implique que si aucun des vecteurs $e(x)$ et $e(x')$ n'est supérieur à l'autre alors, pour $h = 1, \ldots, 2^2 - 2$, $e_h(x) = e_h(x')$, i.e. les vecteurs sont égaux. On dit que $e(x)$ est lexicographiquement supérieur à $e(x')$, $e(x) \geq_l e(x')$ si, ou bien $e(x) = e(x')$ ou bien $e(x) >_l e(x')$.

On appelle *pré-nucléole* du jeu de coûts (c,N) le sous-ensemble de pré-imputations, que l'on note $PNU(c,N)$ tel que :

$$\forall x \in PNU(c,N), \forall x' \in PX(c,N) : e(x) \geq_l e(x')$$

et on appelle *nucléole* de ce même jeu, le sous-ensemble d'imputations, que l'on note $NU(c,N)$, tel que :

$$\forall x \in NU(c,N), \forall x' \in X(c,N) : e(x) \geq_l e(x')$$

Le pré-nucléole est donc le sous-ensemble des pré-imputations qui maximisent la plus petite économie réalisée par une coalition quelconque ; le nucléole est le sous-ensemble des imputations qui présentent la même propriété.

On peut montrer que pour tout jeu de coûts le pré-nucléole et le nucléole non seulement existent mais, de plus, ne comprennent qu'une seule pré-imputation pour le premier et une seule imputation pour le second, évidemment confondues si la pré-imputation du nucléole est individuellement rationnelle. Or sous l'hypothèse de sous-additivité des coûts que nous avons posée, la pré-imputation du pré-nucléole est individuellement rationnelle. Pré-nucléole et nucléole sont donc confondus dans les jeux de coûts. Enfin, lorsque le coeur n'est pas vide, le pré-nucléole en fait partie.

Outre cet aspect maximisation de la plus petite économie, le nucléole admet une caractérisation remarquable en termes de certaines des propriétés passées en revue à la section 4 du document *Définitions et propriétés souhaitables des solutions.*

Théorème 12 (Sobolev (1975)) *Le pré-nucléole est la seule solution qui, sur l'ensemble des jeux de coûts :*

a) sélectionne une pré-imputation unique,

b) traite de façons équivalentes les jeux équivalents,

c) est anonyme,

d) est cohérent.[20]

En revanche, le pré-nucléole a d'assez mauvaises propriétés de monotonicité. Pour le voir il suffit de considérer le jeu de l'exemple 5 examiné à la sous-section 3.7 supra. Dans ce jeu l'unique imputation du coeur est donc aussi l'imputation du nucléole. On a vu qu'elle ne vérifiait pas la condition de monotonicité par rapport aux coûts des coalitions. En fait, comme l'a montré Meggido (1974), le pré-nucléole ne vérifie même pas une propriété de monotonicité

[20] Remplacer la cohérence par la cohérence faible dans cet énoncé, caractérise un autre concept de solution, le pré-noyau (pré-kernel). Nous ne présentons ce concept, qui n'a jamais été employé dans les problèmes de répartition des coûts.

très faible dite *monotonicité globale* qui pose que, pour une solution σ sélectionnant une imputation unique, pour toute paire de jeux (c, N) et (c', N) qui ne diffèrent que par le coût global de réalisation de l'ensemble des projets, $c(N) > c'(N)$ et $c(S) = c'(S)$ pour tout $S \subset N$, on devrait avoir $\sigma_i(c, N) \geq \sigma_i(c', N)$ pour tout $i \in N$.

La maximisation de la plus petite économie réalisée par une coalition quelconque revient implicitement à donner autant de poids à la coalition d'un seul agent i qu'à la coalition complémentaire $N \backslash \{i\}$ de tous les autres projets. Certains auteurs ont proposé de prendre en considération l'économie moyenne par projet, c'est-à-dire de travailler avec une fonction $\bar{e}(x, S) = e(x, S) / |S|$, plutôt que $e(x, S)$. Le pré-nucléole par tête est l'ensemble des pré-imputations qui maximisent la plus petite économie par tête réalisée par une coalition quelconque. Cette pré-imputation est dans le coeur lorsque celui-ci n'est pas vide, et dans ce cas le nucléole par tête est globalement monotone.

7 La valeur de Shapley

L'idée sous-jacente à la valeur de Shapley[21] est que la grande coalition N peut se former par adjonction des joueurs un à un dans un ordre quelconque et qu'il n'y a aucune raison de privilégier l'un de ces ordres. On demande donc à chaque joueur la moyenne des contributions qu'on exigerait de lui dans toutes les imputations par les coûts incrémentaux. Formellement la valeur de Shapley est l'imputation x telle que :

$$\forall i \in N : x_i = \frac{1}{|A(N)|} \sum_{a \in A(N)} \delta c(i, a) = \frac{1}{|A(n)|} \sum_{a \in A(N)} \tilde{x}_i(a)$$

Cette solution est évidemment définie pour tout jeu de coûts. Elle est de plus individuellement rationnelle sous l'hypothèse de sous-additivité de la fonction de coûts puisque c'est la moyenne de pré-imputations qui sont, chacune, sous cette hyphèse, individuellement rationnelles. Mais l'imputation par la valeur de Shapley n'est pas nécessairement dans le coeur lorsque celui-ci n'est pas vide. Pour les jeux concaves dont on a vu que le coeur est la

[21] Shapley (1953).

fermeture convexe de toutes les imputations par les coûts incrémentaux pour tous les arrangements possibles, l'imputation par la valeur de Shapley est l'imputation située au centre du coeur.

La valeur de Shapley admet plusieurs caractérisations en termes des propriétés recensées à la section 4.4 du chapitre 4. La plus commune est la caractérisation donnée par Shapley lui-même.

Théorème 13 (Shapley (1953)) *La valeur de Shapley est la seule solution qui, sur l'ensemble des jeux de coûts :*[22]

a) sélectionne une imputation unique,

b) est insensible à l'élimination des joueurs négligeables,

c) est additive,

d) est anonyme.

La valeur de Shapley possède d'autres propriétés. Il est facile de vérifier que c'est une solution qui traite de façon équivalente les projets équivalents. Pour un jeu (c, N) qui admet une décomposition $(d, \hat{c})$ en coûts directs et coûts joint la valeur de Shapley du jeu s'obtient en ajoutant, pour chaque joueur i, le coût direct d_i dont il est responsable, à l'imputation par la valeur de Shapley qui serait mise à sa charge dans le jeu réduit $(\hat{c}, N)$. Pour les jeux qui admettent une décomposition en éléments de coûts l'imputation équitable par décomposition et l'imputation par la valeur de Shapley coïncident.

[22] Cette caractérisation vaut pour une classe de jeux plus large que la seule classe des jeux de coûts. Voir, par exemple Owen (1995), chapitre XII.

Appendices

A Vacuïté du coeur des jeux de coûts essentiels à somme constante

On a vu au chapitre 4 qu'il existe des jeux de coûts essentiels dits à somme constante, c'est-à-dire pour lesquels, $\forall S \subset N : c(S) + c(N \backslash S) = c(N)$ bien que, puisqu'ils sont essentiels, $\sum_{i \in S} c(\{i\}) > c(N)$. La condition de constance est en réalité une condition qui implicitement pose que les coalitions de tailles intermédiaires sont suffisamment fortes pour que le coeur soit vide. Il découle de la définition de tels jeux que la seule partition des joueurs dont la somme des coûts des parties est supérieure au coût de réalisation coordonnée de tous les projets est la partition $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{i\}, \ldots, \{n\}\}$. On doit donc s'attendre à ce que ce soit la trop grande force des coalitions $S = N \backslash \{i\}$, $i \in N$ quelconque qui est cause de la vacuïté du coeur. Montrons que c'est bien le cas.

Soit (c, N) un jeu de coût essentiel à somme constante et supposons qu'il existe une pré-imputation $\overline{x}$ robuste à toute menace de sécession. Elle est donc robuste aux menaces de retrait des coalitions de la forme $S = N \backslash \{i\}$, $i = 1, \ldots, n$, d'où :

$$\sum_{j \in N \backslash \{i\}} \overline{x}_j \leq c(N \backslash \{i\}), \quad i = 1, \ldots, n$$

Puisque (c, N) est un jeu à somme constante :

$$c(N \backslash \{i\}) = c(N) - c(\{i\}), \quad i = 1, \ldots, n$$

inégalité qui, avec l'égalité précédente, implique que :

$$\sum_{j \in N \backslash \{i\}} \overline{x}_j \leq c(N) - c(\{i\}), \quad i = 1, \ldots, n$$

d'où :

$$\sum_{j \in N \backslash \{i\}} \overline{x}_j + c(\{i\}) \leq c(N) \quad , i = 1, \ldots, n$$

Sommons ces inégalités sur l'ensemble des $i \in N$. Il vient :

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N \backslash \{i\}} \overline{x}_i + \sum_{i \in N} c(\{i\}) \leq n\, c(N)$$

inégalité qu'on peut encore écrire sous la forme suivante, en remarquant que, dans le premier terme du membre gauche, chaque joueur i figure exactement $n-1$ fois :

$$(n-1) \sum_{i \in N} \overline{x}_i + \sum_{i \in N} c(\{i\}) \leq n\ c(N) \tag{A.1.1}$$

Or d'une part $\overline{x}$ est une pré-imputation et donc $\sum_{i \in N} \overline{x}_i = c(N)$, et d'autre part le jeu est essentiel et donc $\sum_{i \in N} c(\{i\}) > c(N)$, de sorte que :

$$(n-1) \sum_{i \in N} \overline{x}_i + \sum_{i \in N} c(\{i\}) > n\ c(N) \tag{A.1.2}$$

Les inégalités (A.1.1) et (A.1.2) sont contradictoires.

B Le coeur de tout jeu équilibré est non-vide

Montrons que le coeur de tout jeu équilibré est non-vide.

Démontrer que le coeur n'est pas vide revient à démontrer que le système d'équation et d'inéquations en x suivant possède une solution :

$$\sum_{i \in N} x_i = c(N)$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \quad S \in \mathcal{N} \backslash \phi$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in N$$

Ce système possède une solution si et seulement si le programme linéaire PL.1 ci-dessous :

$$\max \sum_{i \in N} x_i$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \quad S \in \mathcal{N} \backslash \phi \tag{A.2.1}$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in N \tag{A.2.2}$$

possède une solution $\overline{x}$ telle que :

$$\sum_{i \in N} \overline{x}_i = c(N)$$

Soit $\lambda_S,\ S \in \mathcal{N} \backslash \phi$, les variables duables du problème PL.1. Le programme dual de PL.1 est le programme PL.2 suivant :[23]

$$\min \sum_{S \in \mathcal{N} \backslash \phi} \lambda_S c(S)$$

$$\sum_{S : i \in S} \lambda_S = 1, \quad i \in N \tag{A.2.3}$$

$$\lambda_S \geq 0, \quad S \in \mathcal{N} \backslash \phi \tag{A.2.4}$$

Les contraintes du programme PL.2 définissent un sous-ensemble compact, convexe, non-vide de R^{2^n-1}. Ce programme possède donc une solution finie. En vertu du théorème fondamental de la programmation linéaire, le programme PL.1 admet aussi une solution finie et les valeurs des deux programmes sont les mêmes. En d'autres termes il existe des $\overline{\lambda}_S$, $S \in \mathcal{N} \backslash \phi$ vérifiant les contraintes (A.2.3)-(A.2.4) et des $\overline{x}_i,\ i \in N$, vérifiant les contraintes (A.2.1)-(A.2.2) tels que :

$$\sum_{i \in N} \overline{x}_i = \sum_{S \in \mathcal{N} \backslash \phi} \overline{\lambda}_S c(S)$$

Soit $\overline{\mathcal{S}}$ l'ensemble des coalitions pour lesquelles $\overline{\lambda}_S > 0$. En vertu du théorème des écarts complémentaires, les contraintes correspondantes du programme PL.1 sont vérifiées avec l'égalité :

$$\forall S \in \overline{\mathcal{S}} : \sum_{i \in S} \overline{x}_i = c(S)$$

d'où, en multipliant chacune de ces égalités par le $\overline{\lambda}_S$ correspondant et en sommant :

$$\sum_{S \in \overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S \left(\sum_{i \in S} \overline{x}_i \right) = \sum_{S \in \overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S\, c(S)$$

[23] On trouvera à l'Appendice D le rappel des principaux résultats de la théorie de la programmation linéaire sur lesquels cette démonstration s'appuie.

et en permuttant l'ordre de sommation dans le membre gauche :

$$\sum_{i \in N} \left(\sum_{S : i \in S} \overline{\lambda}_S \right) \overline{x}_i = \sum_{S \in \overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S \, c(S) \tag{A.2.5}$$

Remarquons maintenant que $\overline{\mathcal{S}}$ est une famille équilibrée de coalitions. Les contraintes (A.2.3) du programme PL.2 sont satisfaites et, dans ces contraintes, seuls les $\overline{\lambda}_S > 0$ jouent un rôle.[24] On a donc :

$$\sum_{S \in \overline{\mathcal{S}} : i \in S} \overline{\lambda}_S = 1$$

de sorte que (A.2.5) peut s'écrire :

$$\sum_{i \in N} \overline{x}_i = \sum_{S \in \overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S \, c(S) \tag{A.2.6}$$

Puisque $\overline{\mathcal{S}}$ est une famille équilibrée et que le jeu est supposé équilibré :

$$\sum_{S \in \overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S \; c(S) \geq c(N)$$

d'où, combiné à (A.2.6) :

$$\sum_{i \in N} \overline{x}_i \geq c(N) \tag{A.2.7}$$

Puisque les $\overline{x}_i$, $i \in N$, vérifient les contraintes du programme PL.1 et en particulier la contrainte (A.2.1) pour $S = N$, on a aussi :

$$\sum_{i \in N} \overline{x}_i \leq c(N) \tag{A.2.8}$$

On conclut de (A.2.7) et (A.2.8) que $\overline{x}_i$, $i \in N$, est une solution du programme PL.1 pour laquelle :

$$\sum_{i \in N} \overline{x}_i = c(N)$$

et donc $\overline{x}_i$, $i \in N$, est une imputation du coeur.

[24] cf théorème 15 de l'Appendice D.

C Appartenance au coeur des imputations par les coûts incrémentaux dans les jeux concaves

On montre dans cet appendice que pour tout arrangement $a \in A(N)$, l'imputation par les coûts incrémentaux sous l'arrangement en question, est une imputation du coeur si le jeu est concave.

Soit $a \in A(N)$ un arrangement quelconque des joueurs. L'imputation $\tilde{x}(a)$ n'est évidemment pas sensible à la menace de retrait de la grande coalition. Considérons donc un sous-ensemble stricte S de s joueurs, $s < n$. Notons $h = 1, \ldots, n$ les rangs de l'arrangement et $h_1, \ldots, h_k, ., h_s$ les rangs des joueurs de la coalition S considérée dans l'arrangement a. Pour simplifier on identifiera les joueurs de l'arrangement à leur rang, c'est-à-dire qu'on écrira, par exemple, $\bigcup_{h=1}^{k} \{h\}$ plutôt que $\bigcup_{h=1}^{k} \{a_h\}$. Rappelons qu'on était aussi convenu de noter $i(h, a)$, $i(h, a) \in N$, le joueur qui figure au rang h dans l'arrangement a. Puisque dans tout ce qui suit l'arrangement a est fixé, on notera plus simplement ce joueur $i(h)$.

Enfin rappelons qu'un jeu concave est un jeu pour lequel :[25]

$\forall i \in N$, $\forall Q, R \subseteq N \setminus \{i\}$:

$$Q \subseteq R \Rightarrow c(Q \cup \{i\}) - c(Q) \geq c(R \cup \{i\}) - c(R) \tag{A.3.1}$$

Identifions, dans cette définition, successivement i aux joueurs de la coalition S pris dans l'ordre inverse de leur apparition dans l'arrangement :

$$h_s, h_{s-1}, \ldots, h_k, \ldots, h_2, h_1;$$

R aux sous-ensembles de joueurs de rangs au plus égal à $h_s - 1$, $h_{s-1} - 1, \ldots, h_k - 1, \ldots,$ $h_2 - 1, h_1 - 1$:

$$\bigcup_{h=1}^{h_s-1} \{h\}, \bigcup_{h=1}^{h_{s-1}-1} \{h\}, \ldots, \bigcup_{h=1}^{h_s-1} \{h\}, \ldots, \bigcup_{h=1}^{h_2-1} \{h\}, \bigcup_{h=1}^{h_1-1} \{h\}$$

[25] Définition correspondant à la condition (a) de la sous-section 2.2.1 du document «Les jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables».

Q aux sous-ensembles de joueurs de la coalition S et de rangs au plus égal à $h_{s-1}, h_{s-2}, \ldots,$ $h_{k-1}, \ldots, h_2, h_1$:

$$\bigcup_{g=1}^{s-1}\{h_g\}, \bigcup_{g=2}^{s-2}\{h_g\}, \ldots, \bigcup_{g=1}^{k-1}\{h_g\}, \ldots, \bigcup_{g=1}^{2}\{h_g\}, \{h_1\}$$

De (A.3.1) appliqué successivement, on obtient :

$$\begin{aligned} & c\left(\left\{\bigcup_{g=1}^{s-1}\{h_g\}\right\}\cup\{h_s\}\right) - c\left(\bigcup_{g=1}^{s-1}\{h_g\}\right) \\ \geq\ & c\left(\left\{\bigcup_{h=1}^{h_s-1}\{h\}\right\}\cup\{h_s\}\right) - c\left(\bigcup_{h=1}^{h_s-1}\{h\}\right) = \delta c\left(i\left(h_s\right), a\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c\left(\left\{\bigcup_{g=1}^{s-2}\{h_g\}\right\}\cup\{h_{s-1}\}\right) - c\left(\bigcup_{g=1}^{s-2}\{h_g\}\right) \\ \geq\ & c\left(\left\{\bigcup_{h=1}^{h_{s-1}-1}\{h\}\right\}\cup\{h_{s-1}\}\right) - c\left(\bigcup_{h=1}^{h_{s-1}-1}\{h\}\right) = \delta c\left(i\left(h_{s-1}\right), a\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c\left(\{h_1\}\cup\{h_2\}\right) - c\left(\{h_1\}\right) \\ & \geq c\left(\left\{\bigcup_{h=1}^{h_2-1}\{h\}\right\}\cup\{h_2\}\right) - c\left(\bigcup_{h=1}^{h_2-1}\{h\}\right) = \delta\ c\left(i\left(h_2\right), a\right) \\ & c\left(\{\phi\}\cup\{h_1\}\right) - c\left(\phi\right) \\ & \geq c\left(\left\{\bigcup_{h=1}^{h_1-1}\{h\}\right\}\cup\{h_1\}\right) - c\left(\bigcup_{h=1}^{h_1-1}\{h\}\right) = \delta\ c\left(i\left(h_1\right), a\right) \end{aligned}$$

où, si $h_1 = 1$, alors $\bigcup_{h=1}^{h_1-1}\{h\}$ désigne l'ensemble vide. Sommons ces inégalités. On obtient :

$$c\left(\bigcup_{g=1}^{s}\{h_g\}\right) - c\left(\phi\right) \geq \sum_{g=1}^{s}\delta\ c\left(i\left(h_g\right), a\right)$$

soit encore :

$$c\left(S\right) \geq \sum_{i\in S}\hat{x}_i\left(a\right)$$

En d'autres termes $\hat{x}\left(a\right)$ est robuste à la menace de sécession de S.

D Les théorèmes fondamentaux de la programmation linéaire

Considérons le programme linéaire suivant (P.1) :

$$\max_{x_I, x_J} \; f^I x_I + f^J x_J$$

$$[A_H^I, A_H^J] \begin{bmatrix} x_I \\ x_J \end{bmatrix} \leqq a_H$$

$$[A_K^I, A_K^J] \begin{bmatrix} x_I \\ x_J \end{bmatrix} = a_K$$

$$x_I \geqq 0, \; x_J \text{ quelconque}$$

où pour $U \in \{I, J\}$ et $V \in \{H, K\}$:

- f^U est un vecteur ligne à n_U composantes,
- x_U est un vecteur colonne à n_U composantes,
- a_V est un vecteur colonne à n_V composantes,
- A_V^U est une matrice à n_U colonnes et n_V lignes.

On appelle programme dual du programme (P.1), le programme (P.2) suivant :

$$\min_{y^H, y^K} \; y^H a_H + y^K a_K$$

$$[y^H, y^K] \begin{bmatrix} A_H^I \\ A_K^I \end{bmatrix} \geqq f^I$$

$$[y^H, y^K] \begin{bmatrix} A_H^J \\ A_K^J \end{bmatrix} = f^J$$

$$y^H \geqq 0, \; y^K \text{ quelconque}$$

où, pour $U \in \{I, J\}$, y^U est un vecteur ligne à n_u composantes.

Les théorèmes suivants caractérisent les relations qui existent entre les solutions des deux programmes.

Théorème 14 *Étant donné un couple de programmes duaux (P.1) et (P.2), une condition nécessaire et suffisante pour que l'un des programmes admette une solution finie est que l'autre programme admette une solution finie. Dans ce cas les valeurs optimisées des fonctions d'objectif sont les mêmes, i.e. si* $\left(\overset{*}{x}_I, \overset{*}{x}_J\right)$ *est une solution de (P.1) et* $\left(\overset{*}{y}^H, \overset{*}{y}^K\right)$ *une solution de (P.2) alors :*

$$f^I \overset{*}{x}_I + f^J \overset{*}{x}_J = \overset{*}{y}^H a_H + \overset{*}{y}^K a_k$$

Théorème 15 *Étant donné un couple de programmes duaux (P.1) et (P.2), une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de vecteurs* $(\overline{x}_I, \overline{x}_J)$ *et* $\left(\bar{y}^H, \bar{y}^K\right)$ *vérifiant les contraintes de (P.1) et (P.2) respectivement, soit solution du couple des programmes duaux est que :*

$$\overline{y}^H \left[\left[A_H^I, A_H^J\right] \begin{bmatrix} \overline{x}_I \\ \overline{x}_J \end{bmatrix} - a_H \right] = 0$$

$$\left[f^I - \left[\overline{y}^H, \overline{y}^K\right] \begin{bmatrix} A_H^I \\ A_K^I \end{bmatrix} \right] \overline{x}_I = 0$$

Références

Boyer, M., Moreaux, M. et M. Truchon, 2002. "Les jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables des solutions", CIRANO 2002RP-20.

Meggido, N., 1974. "On the Nonmonotonicity of the Bargaining Set, the Kernel and the Nucleolus of a Game", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 27, 355-398.

Owen, G., 1995. "Game Theory", Third Edition, San Diego : Academic Press.

Peleg, B., 1986. "On the Reduced Game Property and its Converse" *International Journal of Game Theory*, 15 187-206.

Shapley, L.S., 1953. "A Value for n-Person Games," in Kuhn, H., et A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton : Princeton University Press, 307-317.

Shapley, L. S., 1967. "On Balanded Sets and Cores," *Naval Research Logistics Quaterly*, 14, 453,460.

Shapley, L.S., 1953. "Cores of Convex Games," *International Journal of Game Theory,* 1, 11-26.

Sobolev, A.I., 1975. "Characterization of the Principle of Optimality for Cooperative Games through Functional Equations," in N.N. Voroby'ev, ed. *Mathematical Methods in Social Sciences*, Vipusk 6, Academy of Sciences of the Lithuanian SSR, Vilnius, 92-151.

Young, H.P., 1994. "Cost Allocation", in *R.J.Aumann et S. Hart, eds, Handbook of Game Theory, Vol. II,* Amsterdam : North Holland, Chap. 34, 1191-1235.

Documents * CIRANO * sur Le partage des coûts communs et la tarification des infrastructures

http ://www.cirano.qc.ca/publications/

****

[1] 2002RP-17 Le partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence

[2] 2002RP-18 Les méthodes de partage de coûts : un survol

[3] 2002RP-19 Les méthodes de partage de coûts : propriétés

[4] 2002RP-20 Les jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables des solutions

[5] 2002RP-21 Les jeux de coûts : principaux concepts de solution

[6] 2003RP-04 Le cas des réseaux municipaux souterrains

[7] 2003RP-05 Partage des coûts dans l'entreprise et incitations

[8] 2003RP-06 Tarification optimale des infrastructures communes