CIRANO
Allier savoir et décision

MARCEL BOYER | MICHEL MOREAUX | MICHEL TRUCHON

MONOGRAPHIE

Partage des coûts et tarification des infrastructures

Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

MARCEL BOYER | MICHEL MOREAUX | MICHEL TRUCHON

CIRANO
Allier savoir et décision

Le CIRANO est un centre de recherche multidisciplinaire qui a pour mission l'accélération du transfert des savoirs entre le monde de la recherche et celui de la pratique.

Les partenaires du CIRANO

Partenaire majeur
Ministère du Développement économique, de l'Innovation et de l'Exportation

Entreprises partenaires
Alcan inc.
Banque du Canada
Banque Laurentienne du Canada
Banque Nationale du Canada
Banque Royale du Canada
Bell Canada
BMO Groupe financier
Bombardier
Bourse de Montréal
Caisse de dépôt et placement du Québec
Fédération des caisses Desjardins du Québec
Gaz Métro
Hydro-Québec
Pratt & Whitney Canada
Raymond Chabot Grant Thornton

Autres partenaires gouvernementaux
Industrie Canada
Ministère des Finances du Québec
Ville de Montréal

Partenaires universitaires
École Polytechnique de Montréal
HEC Montréal
McGill University
Université Concordia
Université de Montréal
Université de Sherbrooke
Université du Québec
Université du Québec à Montréal
Université Laval

Le CIRANO collabore avec de nombreux centres et chaires de recherche universitaires dont on peut consulter la liste sur son site Web.

ISBN 2-89609-001-0
Dépôt légal - Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2006

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Préface

Une véritable valorisation des infrastructures communes doit reposer sur une approche rigoureuse du partage de leurs coûts et de leur tarification implicites sinon explicites. D'où l'intérêt et la pertinence du présent ouvrage qui se veut à la fois un regroupement en un seul lieu et une mise à jour des travaux que nous avons réalisés sur ce sujet au cours des récentes années au sein du Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO).

La plupart des organisations, sinon toutes, répartissent d'une manière ou d'une autre des coûts communs entre leurs diverses composantes ou encore entre leurs différents partenaires. Ces problèmes de partage de coûts communs se posent avec de plus en plus d'acuité car les règles ou formules de partage sont des facteurs importants de compétitivité et de performance. Bien que leur analyse scientifique explicite soit déjà relativement avancée, leur application au sein des organisations (entreprises, alliances ou réseaux d'entreprises, gouvernements) reste relativement embryonnaire et souvent tributaire d'une approche historique ad hoc, plutôt que rationnellement choisie pour maximiser la performance et la valeur de l'organisation.

Nous croyons que les organisations, entendues au sens large, auraient intérêt à investir des ressources dans l'apprentissage de méthodes de partage de coûts communs plus rigoureuses, plus efficaces, plus équitables et plus incitatives que celles couramment utilisées. Nous insistons sur l'importance de cet investissement dans un contexte économique où les infrastructures communes, tant privées que publiques, sont omniprésentes et conditionnent les gains d'efficacité, devenus eux-mêmes la véritable pierre angulaire de la compétitivité.

Dans le présent ouvrage, nous présentons systématiquement les méthodes de partage qu'on retrouve dans la littérature économique. Nous les regroupons en trois catégories : les règles de proportionnalité, les règles inspirées de la théorie des jeux coopératifs et les règles de répartition séquentielle (serial cost sharing). Chacune des méthodes présentées est illustrée à l'aide d'un exemple, celui d'un gazoduc qui relierait le Saguenay-Lac-Saint-Jean et la Beauce à Montréal, en passant par Québec, capable de desservir ces trois régions.

Il est important de faire le choix d'une méthode de partage des coûts sur la base de ses propriétés, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner. Un objectif de cet ouvrage est de départager les méthodes de répartition des coûts sur la base de propriétés générales qu'elles peuvent ou non satisfaire. Nous énonçons un certain nombre de propriétés relatives à l'équité et à la cohérence, souhaitables de façon générale ou dans certaines circonstances. Nous présentons divers résultats indiquant quelles propriétés sont satisfaites par quelles méthodes dans quels contextes.

Nous présentons ensuite la notion de jeu de coûts. Un jeu de coûts est défini comme un jeu coopératif dans lequel le gain de la coopération est la réduction des dépenses permise par la réalisation coordonnée des projets d'un ensemble d'agents. Le problème est alors de savoir comment ces agents vont se répartir ce gain, c'est-à-dire cette réduction de coûts, ou de façon équivalente comment ils vont contribuer au financement de la dépense ainsi occasionnée. Nous recensons les principaux types de jeux de coûts et introduisons les notions de pré-solution et de solution ainsi que les propriétés habituellement requises d'une solution.

Nous présentons alors les principaux concepts de solution proposés pour les jeux coopératifs dont plusieurs ont été utilisés pour résoudre les jeux de coûts. Nous consacrons à l'étude du concept de cœur une place privilégiée. Nous étudions également les concepts de semi-cœur, d'ensemble stable de von Neumann et Morgenstern, du nucléole et de la valeur de Shapley.

En guise d'application type, nous présentons le cas du partage des coûts de certaines infrastructures municipales. Dans les municipalités d'une certaine taille, les réseaux d'aqueduc, de collecte des eaux usées, de distribution de gaz naturel, de distribution électrique, de télécommunications, etc. passent dans des canalisations regroupées sous terre. La construction de ces ouvrages implique des coûts fixes très importants, qu'il faut partager entre les différents utilisateurs. Le problème de la répartition des coûts d'un réseau de conduits souterrains présente des caractéristiques particulières. Nous les illustrons à l'aide d'un exemple et, après avoir passé en revue les méthodes de répartition proportionnelle, dont celle qui consiste à répartir les coûts proportionnellement à la longueur des conduits attribués aux usagers, nous présentons deux méthodes qui semblent des plus intéressantes dans ce contexte, soit la règle Shapley-Shubik et la méthode de répartition séquentielle. Nous passons en revue les propriétés satisfaites par ces méthodes et nous discutons des données nécessaires à leur application. Nous montrons comment ces considérations permettent d'aboutir, dans le cas considéré, à une recommandation en faveur de la méthode de répartition séquentielle, qui semble à la fois la plus facile à appliquer et la plus susceptible de répondre à la problématique des conduits souterrains.

Nous poursuivons avec la prise en compte des incitations dans le développement des infrastructures communes. Afin de choisir la bonne taille d'une infrastructure et d'économiser autant que possible sur les coûts d'investissement, il faut en général au responsable (le Centre) certaines informations qui lui font typiquement défaut et pour lesquelles il doit s'en remettre à des agents ou partenaires, qui voudront utiliser leurs informations privilégiées de manière stratégique. Ce problème est endémique à toute société, toute alliance, tout partenariat et toute entreprise publique ou privée. Nous considérons à ce titre trois contextes spécifiques particulièrement importants. Dans le premier, une entreprise ou une alliance d'entreprises avec plusieurs divisions veut mettre en place une méthode de répartition des coûts communs qui incite les chefs de division ou les partenaires à contribuer à la minimisation ou du moins à la réduction de ces coûts communs. Dans les deuxième et troisième cas, le problème du partage des coûts communs se pose dans des contextes où les responsables de divisions sont les seuls à connaître certaines informations cruciales pour la détermination du programme optimal de l'entreprise ou de l'alliance. L'entreprise doit alors inciter les divisions ou partenaires à révéler leurs informations privilégiées. Nous proposons une approche méthodologique qui permet d'obtenir des solutions souvent imparfaites mais du moins transparentes et éclairantes.

Partage des coûts communs et tarification des infrastructures sont deux considérations jumelles, différentes mais intimement liées. Par exemple, les préoccupations des régulateurs en ce qui concerne la répartition des coûts et la prise en compte de cette répartition dans la fixation des tarifs ne sont généralement pas au diapason des exigences d'une tarification optimale ou efficace, définie en termes de la contribution des biens ou services considérés à la maximisation du bien-être de la société dans son ensemble. L'intérêt général commanderait qu'on tarife l'usage des infrastructures à leur coût marginal, en prenant soin d'y inclure tous les coûts d'opportunité, dont ceux liés à la congestion et à la pollution. à tout le moins, on devrait abaisser les tarifs de manière à assurer une pleine utilisation de ces infrastructures. Ce résultat est connu par les économistes comme la solution de premier rang. Malheureusement, dans un contexte d'économies d'échelle importantes, ce mode de tarification conduit à un déficit. Pour couvrir les coûts, les gestionnaires doivent alors élever les tarifs au-dessus des coûts marginaux. On cherche alors ce que les économistes appellent la solution de second rang, c'est-à-dire la meilleure solution sous la contrainte d'équilibre budgétaire.

Le problème est de déterminer les tarifs de manière à atteindre cet objectif. Nous débutons cette partie de notre ouvrage par la tarification à la Ramsey-Boiteux ou encore linéaire. Dans ce cas, il n'y a qu'un prix par unité de bien ou service, bien qu'il puisse varier d'un bien à un autre. Ensuite, nous montrons qu'on peut faire mieux avec des tarifs polynômes ou non linéaires, comprenant des charges fixes, des prix d'usage, etc. Nous terminons par un bref survol des applications qui ont été faites de la tarification linéaire et non linéaire.

Rappelons que l'objectif de cet ouvrage est de présenter de manière relativement uniforme l'ensemble des éléments à considérer dans la valorisation des infrastructures communes, en particulier les éléments relatifs au partage des coûts et à la tarification de ces infrastructures. La problématique que soulève cette valorisation est complexe et son analyse n'est pas toujours aussi simple qu'on pourrait le souhaiter. Mais nous invitons les responsables du développement et de la valorisation des infrastructures communes à investir les efforts nécessaires à la maximisation des bénéfices socio-économiques des infrastructures communes. Cette maximisation repose sur une analyse rigoureuse des enjeux.

Marcel Boyer
Michel Moreaux
Michel Truchon

Montréal, février 2006.

À propos des auteurs

MARCEL BOYER, Ph.D. (Carnegie-Mellon University) et M.A. (Université de Montréal), est titulaire de la Chaire Bell Canada en économie industrielle de l'Université de Montréal, C.D. Howe Scholar in Economic Policy du C.D. Howe Institute, Fellow du CIRANO et du CIREQ. Il a été Président de l'Association Canadienne d'Économique (Canadian Economics Association), Président de la Société Canadienne de Science Économique, PDG du CIRANO, membre du Conseil du National Bureau of Economic Research, du Conseil National de la Statistique du Canada, du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada, de l'Institut de finance mathématique de Montréal, du Réseau de Calcul et de Modélisation Mathématique et présentement membre du CA de l'Agence des partenariats public-privé du Québec. Récipiendaire de l'Alexander-Henderson Award (CMU 1971), du Prix Marcel-Dagenais (SCSE 1985), de l'Endowment-for–the–future Distinguished Scholar Award (University of Alberta 1988), du Prix Marcel-Vincent (ACFAS 2002), de la Médaille Guillaume-Budé du Collège de France (2005), Marcel Boyer est membre élu (1992) de la Société Royale du Canada, l'Académie des arts, des lettres et des sciences du Canada.

MICHEL MOREAUX, Docteur 3ème cycle de l'Université de Toulouse et docteur d'Etat, est professeur à l'Université des sciences sociales de Toulouse (Toulouse I). Membre senior de l'Institut universitaire de France (chaire d'économie de l'environnement et des ressources naturelles), il dirige le Laboratoire d'économie des ressources naturelles de Toulouse (LERNA unité mixte de recherche CEA - INRA Université). Il est directeur de recherche à l'Institut d'économie industrielle (IDEI) de Toulouse et Fellow associé au CIRANO (Montréal) et au CIREQ (Montréal). Michel Moreaux est chevalier de la Légion d'Honneur pour services rendus à l'Université et officier des Palmes Académiques. Ses recherches portent pour l'essentiel sur l'économie industrielle et l'économie des ressources dites naturelles.

MICHEL TRUCHON, Ph.D. de Carnegie Mellon University, où il a reçu l'Alexander-Henderson Award pour son excellence en théorie économique, et M.A. de l'Université de Montréal, est professeur retraité de l'Université Laval, où il a enseigné pendant 35 ans et dont il a dirigé le Département d'économie pendant 8 ans. Fellow du CIRANO et du CIRPÉE, il a été Président de la Société Canadienne de Science Économique. Outre le partage des coûts, il s'intéresse aux problèmes d'économie publique et de choix collectifs, notamment à l'agrégation des préférences et des votes, et il a travaillé sur des problèmes d'optimisation, tant empiriques que théoriques.

Remerciements

Nous tenons à remercier le CIRANO ainsi que tous les universitaires, fonctionnaires et gestionnaires des grandes organisations privées et publiques qui, au cours des ans, nous ont apporté leur appui et nous ont fait part de leurs préoccupations en matière de valorisation des infrastructures communes.

Nos partenaires corporatifs directs et indirects ont été nombreux et variés. Sans leur imputer quelque responsabilité que ce soit dans le contenu de cet ouvrage, nous pouvons mentionner les entreprises et organismes suivants : Gaz Métropolitain, Hydro-Québec, Bell Canada, le Gouvernement du Québec (Conseil du trésor, Ministère des finances), la Ville de Montréal, la Corporation de Gestion de la Voie maritime du Saint-Laurent, Raymond Chabot Grant Thornton, Industrie Canada.

Nous voulons également remercier Nicolas Marchetti, stagiaire post-doctoral au CIRANO, pour son aide précieuse et essentielle à la réalisation de cet ouvrage.

Chapitre 1

Partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence

1.1 Introduction

La plupart des organisations, sinon toutes, répartissent d'une manière ou d'une autre des coûts communs entre leurs diverses composantes ou encore entre leurs différents partenaires :

- Les entreprises manufacturières allouent leurs frais généraux entre les produits qu'elles fabriquent ou encore entre leurs différentes divisions, en partie pour fin de tarification des biens en question et en partie pour fin de contrôle des divisions.
- Les entreprises de télécommunications allouent leurs coûts d'infrastructure entre les différents types d'appels ou de communications (tarification).
- Les organismes de réglementation imposent certaines règles de partage des coûts d'infrastructure entre les services et les classes d'usagers (découplage ou *unbundling*). Pour maintenir une certaine concurrence entre plusieurs fournisseurs de services, ces organismes seront de plus en plus appelés à régir les conditions et les prix d'accès aux infrastructures de réseau, infrastructures qui le plus souvent seront la propriété d'une seule entreprise, elle-même utilisatrice du réseau. En d'autres termes, elles seront amenées à préciser les règles de partage des coûts de ces infrastructures entre ceux qui les utilisent.
- Les autorités gouvernementales responsables des infrastructures publiques doivent déterminer de manière explicite ou implicite le partage des coûts de ces infrastructures entre différents types d'usager soit par la taxation générale ou spécifique soit par la tarification directe. Ces autorités allouent également les coûts des produits et des services publics qu'elles offrent entre différents types d'usagers ou de résidents en partie par la taxation et en partie par une tarification directe.
- Des consortiums d'entreprises allouent entre elles les coûts de fournitures et de service commun (couverture de frais de R&D, infrastructure).

1.1.1 L'acuité du partage efficace des coûts

Ces problèmes de partage de coûts communs se posent avec de plus en plus d'acuité pour diverses raisons. Les divers types de réseaux de communication et de transport tiennent une place de plus en plus importante dans nos sociétés. Certains réseaux, par exemple les chemins de fer ou les canaux, sont en relative régression. D'autres au contraire, tels les réseaux de communication, connaissent un développement accéléré. Au total cependant, les industries de réseau et les systèmes lourds d'infrastructures partagées ont tendance à prendre une place de plus en plus grande dans les sociétés développées.

Parallèlement à cet aspect plus technologique du développement de nos sociétés, il y a un aspect organisationnel stratégique qui est certainement aussi fondamental. De nombreuses grandes entreprises privées, de nombreux organismes publics à différents échelons de gouvernement, s'interrogent sur l'opportunité d'une plus grande décentralisation, sur l'intérêt qu'ils ont à conserver telle ou telle activité plutôt que l'impartir ou la sous-traiter. La responsabilisation de certaines divisions ou services et la constitution de partenariats qui abaisseraient les coûts apparaissent alors comme des décisions stratégiques. La rentabilité de l'entreprise, la performance de l'organisme public, le succès du partenariat recherché dépendent souvent de la "qualité" des règles de partage des coûts communs mises en place. La caractéristique principale de ces allocations ou partages fait en sorte que les coûts (ou prix), que chacune des divisions ou chacun des partenaires est appelé à couvrir, ne sont pas déterminés par des marchés libres et anonymes mais plutôt par des règles administratives et des accords mutuels explicites.

De manière générale, le problème de l'allocation des coûts communs constitue un "jeu" entre des partenaires (divisions d'une même entreprise ou entreprises autonomes) dont les activités génèrent ces coûts communs. La théorie des jeux coopératifs est une approche conceptuelle qui débouche sur un ensemble d'outils analytiques rigoureux et systématiques permettant de mieux cerner et comprendre les enjeux considérables des règles de partage et proposant des solutions spécifiques efficaces aux problèmes de design et d'implantation d'une règle appropriée au contexte considéré. Ces outils restent encore trop souvent ignorés des entreprises et des organisations, aux prises avec ces problèmes complexes de partage de coûts. L'objectif de cet ouvrage est de rendre ces outils plus accessibles, d'en démontrer la puissance en termes d'analyse et de résolution des conflits et de les appliquer (avec les développements spécifiques nécessaires) à des cas concrets.

1.1.2 Le contexte de la "nouvelle économie"

L'analyse du partage des coûts communs s'insère dans un contexte plus large de recherche de modes d'organisation efficaces, qui prend en compte l'évolution de l'environnement interne et externe (technologie, concurrence) des entreprises et des organisations et justifie de consacrer des efforts importants à la recherche de règles adéquates de partage des coûts communs. Dans plusieurs contextes, la compétitivité et la performance de l'entreprise ou de l'organisation dépendent, pour une part non négligeable, de la qualité des règles de partage des coûts communs ou des bénéfices à la coopération.

D'où l'importance d'une réflexion sérieuse sur les règles de partage des coûts et leurs propriétés.

L'accélération des innovations et l'ouverture généralisée (globalisation) des marchés ont déjà eu et auront des répercussions importantes pour toutes les organisations, qu'il s'agisse des entreprises privées ou des entreprises et organisations publiques et parapubliques. Le décloisonnement des économies nationales, sous la pression des nouvelles technologies de communication et de production, permettra à plusieurs entreprises nationales d'avoir accès à des marchés étrangers de grande envergure, précédemment réservés aux entreprises des pays concernés, et augmentera la concurrence des entreprises étrangères sur les marchés nationaux précédemment protégés. Ces développements favorisent les alliances entre entreprises, dont l'émergence et la performance dépendent des règles de partage des coûts communs ou des bénéfices communs que ces alliances génèrent.

1.1.3 Les structures d'information

Dans toute entreprise, la prise de décision doit s'appuyer sur la meilleure information possible. De manière générale, cette information est dispersée, plusieurs agents de l'organisation en détenant chacun une partie. Ces agents possèdent donc une information dite privée qui peut affecter la qualité de la décision à prendre. Les situations où l'information sur les "états du système" fait relativement défaut aux supérieurs, par rapport aux équipes sur le front (en contact direct avec les marchés ou présentes au niveau de la production elle-même), deviennent omniprésentes. Cette déficience de l'information porte autant sur la connaissance des marchés et sur les possibilités de production que sur l'observation des "efforts" souhaitables ou nécessaires des équipes. La reconnaissance du fait que l'information au sein d'une organisation est essentiellement fragmentée, imparfaite, incomplète et privée (détenue par les membres individuels à divers niveaux) et que la transmission de cette information implique des coûts non négligeables, est un élément important de toute réflexion sur les modes efficaces d'organisation, entre autres sur les règles de partage des coûts. La détermination de mécanismes adéquats, fiables et efficaces (incitatifs) de transmission et d'utilisation de l'information au sein d'une organisation doit être un des soucis majeurs de la direction supérieure de toute organisation. La négligence de ces caractéristiques et de ces phénomènes est en réalité une des causes majeures d'inefficacité organisationnelle, susceptible de mener à brève échéance à la décroissance voire à la fermeture de l'entreprise, à la disparition de l'organisation ou encore à l'abandon d'un projet par ailleurs rentable.

1.1.4 Les mécanismes de motivation et de coordination

Ainsi, l'efficacité et la rentabilité de l'entreprise et la performance d'une organisation sont le résultat des mécanismes de motivation et de coordination des efforts et activités des travailleurs et gestionnaires de l'entreprise et ce, à tous les niveaux hiérarchiques. Les règles de partage des coûts sont, au premier chef, des mécanismes de coordination et de motivation. S'il est facile d'énoncer ce défi organisationnel, sa concrétisation dans l'organisation l'est beaucoup moins.

Les aspects incitatifs des règles de partage des coûts communs proviennent des asymétries d'information dans les organisations. Deux classes de problème doivent ainsi être prises en compte. Dans certains cas, la réalisation d'un projet dépend de la valeur qu'y attachent les différents partenaires éventuellement appelés à en financer le coût. Lorsque la valeur du projet pour un partenaire donné est une information privée de ce partenaire, ce dernier peut vouloir biaiser à la hausse où à la baisse la véritable valeur du projet pour lui, en particulier si la règle du partage des coûts fait intervenir cette valeur. Ainsi, dans le cadre de la formation d'un consortium de recherche et développement, dont les résultats seront disponibles à l'ensemble des partenaires, ces derniers pourraient avoir intérêt à biaiser vers le bas la valeur de ces résultats, dans la mesure où leurs contributions respectives seront fonction de la valeur déclarée des résultats pour chacun d'eux. Ce biais à la baisse pourrait, dans certains cas, mettre en péril la réalisation d'un projet rentable. Afin d'éviter ce genre de situation, la règle de partage des coûts doit être conçue de manière à ce que chaque partenaire ait intérêt à révéler la véritable valeur qu'il attache au projet.

Considérons le cas d'un projet conjoint (public ou privé) à N partenaires. Chaque partenaire attache aux différentes variantes du projet une valeur différente dont le niveau est une information privée. Le projet devrait être réalisé si et seulement si la valeur totale véritable qu'y attachent les partenaires est supérieure au coût total du projet. Une règle de partage des coûts est dite "efficace" si elle aboutit à la réalisation d'un projet si et seulement si sa valeur totale véritable est supérieure à son coût. La fonction de coût associe un coût monétaire à la réalisation de chaque variante du projet (ou chaque partie ou portion du projet). Une règle de partage des coûts détermine, pour chaque variante, la contribution de chaque agent et elle est dite "équilibrée" si et seulement si le coût total du projet est exactement couvert par ces contributions, sans déficit ni surplus. Le bénéfice net de chaque partenaire dépend ainsi de la variante réalisée, de la valeur pour lui de cette variante et du coût qui lui est assigné. Une règle de partage des coûts est dite "motivante" si et seulement si chaque agent a intérêt à révéler la véritable valeur qu'il attache à chaque variante du projet et ce, quelles que soient les valeurs que les autres partenaires attachent au projet.

Un des résultats les plus importants de la littérature scientifique sur les règles de partage des coûts veut qu'il peut, dans certains cas, n'exister aucune règle efficace, équilibrée et motivante. Mais, pour un ensemble important de problèmes concrets, de telles règles de partage des coûts existent. De manière générale, ces règles veulent que chaque partenaire contribue un montant égal à ce que vaut pour lui sa participation au projet (montant de coût épargné par rapport à faire cavalier seul) moins un pourcentage de l'économie globale de coût que permet le regroupement des partenaires. Ainsi, ces règles dissocient la valeur du projet pour un partenaire donné du coût que ce partenaire devra assumer.

De manière générale, les règles efficaces de partage des coûts communs sont liées aux structures d'information (comportement des partenaires) et à la structure de l'organisation, en particulier au cadre incitatif auquel les partenaires au projet font face. Ces règles de partage des coûts communs ont un effet sur les coûts d'agence dans une organisation. Considérons par exemple une organisation dans laquelle les responsables de centres de décision (centres de coût, centres de profit) sont évalués par leurs supérieurs hiérarchiques et sont rémunérés en fonction de cette évaluation. Si les responsables de centres de décision valorisent non seulement leur salaire et bonis mais également leurs bénéfices accessoires (“perks”), alors ils auront tendance à surconsommer ces accessoires au-delà de leur rentabilité maximale, dans la mesure où cette surconsommation est difficilement observable. Afin de contrecarrer ce comportement, la direction générale peut vouloir allouer les coûts communs de la hiérarchie en taxant les responsables de centres de décision par l'intermédiaire d'une règle de partage des coûts communs à l'ensemble des centres de décisions. Selon les caractéristiques de la règle de partage retenue (taxe forfaitaire plutôt qu'une taxe sur les profits respectifs des centres), la consommation d'accessoires peut effectivement diminuer. Une telle approche peut aussi permettre de générer une plus grande efficacité au niveau de la hiérarchie, car les responsables de centres de décision, sous la gouverne d'un supérieur hiérarchique, auront alors intérêt à surveiller les efforts que fournit ce supérieur hiérarchique pour minimiser les coûts communs.

1.1.5 Le choix d'une méthode sur la base de ses propriétés

Le choix d'une méthode de partage de coûts devrait se faire sur la base de ses propriétés par rapport aux propriétés des méthodes alternatives. Dans le chapitre 3, traitant des propriétés des méthodes, nous présentons les différentes propriétés de chacune des principales méthodes contenues dans le chapitre 2.

Il est en général contre-indiqué de choisir une méthode sur la simple base d'un seul ou même de quelques exemples, comme le font traditionnellement les organisations ou consortiums, à la suite de longues et souvent difficiles négociations entre les parties, chacune d'elles privilégiant évidemment la méthode qui lui est la plus favorable. Il est beaucoup plus simple et logique d'identifier une méthode parmi l'ensemble des méthodes possibles sur la base des propriétés de ces méthodes, avant même de connaître les résultats qu'elles peuvent donner dans des applications concrètes précises. Dans le chapitre 3, nous avons énoncé un certain nombre de propriétés ou caractéristiques que les partenaires à un consortium pourraient souhaiter pour une méthode de répartition, en particulier au niveau de la cohérence et de l'équité. Les propriétés des méthodes peuvent être regroupées en cinq catégories et résumées ainsi :

1. Invariance aux échelles
   - la répartition de coûts ne devrait pas être affectée par une transformation des échelles (par exemple un remplacement des Km par des mètres ou un changement d'unité monétaire)
2. Traitement égalitaire des équivalents
   - les contributions relatives aux coûts totaux des différentes entités devraient aller dans le sens de leurs coûts de faire cavalier seul.
   - si deux entités ont des coûts de faire cavalier seul identiques, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux du regroupement.
   - si les biens sont homogènes et si deux entités demandent les même quantités, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux.
3. Le principe séquentiel
   - la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes plus grandes que la sienne. En d'autres termes, une entité ne devrait pas subir les externalités associées à ces plus grandes demandes, ou en profiter selon le cas.
   - de façon plus générale, la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes des entités dont la contribution est plus élevée que la sienne.
4. Traitement des agents négligeables
   - si une entité a une demande nulle, la contribution des autres ne devrait pas dépendre de la présence ou non de cette entité dans le problème de partage.

  - s'il est possible de fournir une quantité ou une liste de paramètres identique à q_i à toutes les entités à un coût nul, l'entité i ne devrait pas avoir à payer quoi que ce soit et les parts des autres devraient être établies en fonction de leur demande, ajoutée à celle de l'entité i.
  - si une entité est essentiellement négligeable, c'est-à-dire si l'ajout de sa demande à celles de n'importe quel autre sous-ensemble d'entités entraîne une augmentation de coûts égale à son coût de faire cavalier seul, alors sa contribution aux coûts devrait se résumer à son coût de faire cavalier seul.

5. Monotonie
  - les parts des entités ne devraient jamais décroître par rapport à leurs demandes.
  - si les coûts devaient s'avérer plus élevés, quelle que soit l'ampleur du projet ou les niveaux de production à réaliser, alors les parts des coûts imputées aux différentes entités ne devraient pas diminuer.

Nous avons indiqué dans un tableau récapitulatif dans le chapitre 3 quelles méthodes satisfont chacune de ces propriétés. Dans certains cas, une seule méthode satisfait un sous-ensemble donné de propriétés.

1.1.6 L'effort de liaison et de transfert

Les règles de partage des coûts communs et des bénéfices à la coopération sont des facteurs importants de compétitivité et de performance. Bien que leur analyse scientifique explicite soit déjà relativement avancée, leur application au sein des organisations (entreprises, alliances ou réseaux d'entreprises, gouvernements) reste relativement embryonnaire et souvent tributaire d'une approche historique ad hoc, plutôt que rationnellement choisie pour maximiser la performance et la valeur de l'organisation. Il faut reconnaître que l'analyse des règles de partage des coûts communs exige une certaine dose de mathématiques. Il est important, par ailleurs, de préciser que ces mathématiques ne servent qu'à traduire, dans un langage rigoureux et programmable, les contraintes institutionnelles et les objectifs que doit satisfaire ou rencontrer la règle de partage recherchée.

On peut raisonnablement anticiper que les règles explicites de partage, fondées sur une meilleure compréhension des enjeux organisationnels, deviendront des facteurs stratégiques de plus en plus importants, à mesure que ces règles, leurs fondements et leurs propriétés, seront mieux comprises et que leur implantation sera facilitée grâce à l'avènement de dirigeants et partenaires de consortium mieux informés, s'appuyant sur des systèmes d'information de gestion et des systèmes de traitement de l'information plus performants. Or, ce sont là deux développements majeurs de la présente "révolution des technologies de l'information" qui permettront aux économistes mathématiciens d'être complémentaires aux avocats, ingénieurs et relationistes dans la négociation du partage des coûts.

Nous présentons succinctement dans ce premier chapitre trois méthodes rigoureuses de partage des coûts communs, à savoir

- la méthode Shapley-Shubik
- la méthode du nucléole
- la méthode de répartition séquentielle ou sérielle

La méthode Shapley-Shubik et la méthode du nucléole sont toutes deux issues de la théorie des jeux coopératif[1] alors que la méthode de répartition séquentielle ou sérielle procède du design de mécanismes. Nous présentons les deux premières dans le cadre de la détermination des droits d'atterrissage (sous-section 1.2.1) et la troisième dans le cadre du partage des coûts des systèmes urbains sous-terrains (sous-section 1.2.7). Le lecteur intéressé par une présentation plus complète de l'ensemble des méthodes pourra se référer au chapitre 2.

Nous présentons également trois règles de partage des coûts communs d'un réseau, plus communément appelées règles d'accès aux éléments essentiels d'un réseau, à savoir

- la règle de l'*Efficient Component Pricing Rule*
- la règle de tarification à la Ramsey-Boiteux
- la règle du *Global Price Cap*

Les règles de partage des coûts communs d'un réseau sont présentées dans la sous-section 1.2.4.

1.1.7 Les questions préalables

Toute application rigoureuse des théories et méthodes présentées ici exige au préalable que l'on réponde à trois ensembles de questions :

1. D'abord, quels sont les objets pertinents de la fonction de coût ? Ces objets peuvent être des personnes, des atterrissages d'avions, les missions d'un organisme, des municipalités, des entreprises, des passages de bateaux, des canalisations urbaines, des types de transmissions de signaux, etc.
2. Ensuite, quelles sont les informations dont on dispose ou dont on pourrait raisonnablement disposer ? De toute évidence, nous ne pouvons pratiquement jamais

[1] Voir les chapitres 2 et 5.

compter sur toute l'information désirée. Il faut alors formaliser le problème à résoudre, en fonction de l'information actuelle ou potentielle, par une modélisation à deux ou plusieurs niveaux d'agrégation. Dans les situations où le niveau de la demande ou la taille du projet est variable et dépend possiblement de la répartition des coûts, il faut évidemment en tenir compte dans la modélisation. Dans ces situations, on peut vouloir considérer plusieurs tailles différentes du projet ou bien s'en remettre à une tarification efficace (à la Ramsey-Boiteux), lorsque réalisable. Par contre, cette tarification ne satisfait pas toujours la contrainte institutionnelle qu'imposerait le droit de participation ou de retrait volontaire.

3. Finalement, quels sont les objectifs et contraintes que doit rencontrer et satisfaire la règle de partage des coûts ? Ces objectifs ou contraintes porteront sur l'efficacité, l'équité, les incitations, la participation volontaire, le droit de retrait général ou limité, etc. Ces objectifs et contraintes sont interreliés et leur représentation précise dépend du contexte considéré. Ainsi, les contraintes de participation volontaire et du droit de retrait général seront particulièrement effectives lorsque les partenaires sont des entités indépendantes (entreprises, municipalités) mais le seront moins lorsque les partenaires sont des divisions d'une entreprise ou encore des municipalités "fusionnées" obligées de se concerter et de coopérer par la réglementation d'un gouvernement supérieur.

L'analyse rigoureuse des règles de partage des coûts et la diversité de ces règles montrent bien qu'il n'y a pas une règle universellement appropriée, qui pourrait être appliquée dans toute situation. Par contre, une bonne compréhension de la nature et des propriétés des diverses règles peut faciliter la coordination des partenaires dans l'acceptation d'un ensemble restreint de règles de partage, dont l'application au problème à résoudre permettra de réduire sensiblement les conflits explicites ou implicites lors de la négociation. Ainsi, les règles de partage des coûts, dont nous traitons ici, doivent être perçues comme des outils puissants capables de faciliter les négociations entre les parties.

1.2 Exemples concrets

Dans le chapitre 2, nous présentons un certain nombre de règles ou méthodes de répartition des coûts, illustrées à l'aide d'un exemple fictif de gazoduc. Dans le présent chapitre, nous présentons quelques exemples concrets de problèmes de partage de coûts. Certaines des méthodes présentées dans le chapitre 2 ont été appliquées à ces problèmes. Nous décrivons brièvement ces applications. Pour les autres, nous nous bornons simplement à exposer le problème à résoudre, en insistant sur les aspects qui justifieraient l'application des méthodes présentées dans le chapitre 2.

Typiquement, un problème de partage de coût est formalisé comme suit. Soit N un ensemble d'agents autonomes qui ont chacun un *projet* à réaliser. On peut voir N comme l'ensemble des projets eux-mêmes. Ces projets peuvent être de natures très diverses. Le cas le plus simple est celui dans lequel les projets des agents sont soit des quantités d'un même bien privé, soit des ensembles de quantités de biens différents dont ils veulent disposer. Chaque projet peut être au contraire un bien public que différentes autorités veulent mettre à la disposition de leurs administrés. Considérons par exemple les municipalités (ou arrondissements) d'une même communauté urbaine qui veulent, chacune, équiper leur territoire d'un éclairage public. Pour chaque municipalité i, un projet est un plan qui définit, pour chaque voie ou chaque portion de voie du territoire qu'elle administre, un certain niveau d'intensité de l'éclairage à mettre en place.

Comme autre exemple, considérons des villes situées au bord d'un même lac. Pour préserver la qualité des eaux du lac, chaque ville est dans l'obligation légale de traiter les eaux usées des ménages et des entreprises implantés sur son territoire : le projet de la ville i est un système de collecte et de traitement des eaux usées avant rejet dans le lac.

Toute partie S de N est un sous-ensemble des projets à réaliser de façon coordonnée, c'est-à-dire de façon à minimiser le coût total de réalisation des projets en question ; $c(S)$ ou c_S s'interprète comme ce coût total minimisé. La formalisation est en termes de coûts. La seule caractéristique d'un projet ou d'un ensemble de projets à réaliser est son coût plutôt que ses caractéristiques physiques. Le même projet peut avoir des caractéristiques physiques identiques mais des coûts de réalisation différents pour deux agents : ces agents peuvent être à même d'exercer des pressions différentes sur leurs fournisseurs qui leur accorderont des conditions de vente différentes. Si les agents sont des entreprises, elles peuvent également bénéficier, pour la réalisation de ces projets, de compétences qui leurs sont propres et qui diffèrent d'une entreprise à l'autre. Pour les mêmes raisons, deux groupes d'agents qui, chacun, réalisent un ensemble de projets physiquement identiques, peuvent avoir à supporter des coûts différents. Inversement, deux projets différents peuvent avoir des coûts identiques. Ce qui importe, ce n'est pas la différence physique des projets mais la similitude ou la dissemblance de leurs coûts.

1.2.1 Les droits d'atterrissage

Les services publics doivent de plus en plus souvent s'autofinancer. C'est le cas des aéroports au Canada. Ainsi, les droits d'atterrissages sont établis ou devraient l'être de manière à récupérer les coûts de capital, d'entretien et d'opération des pistes d'atterrissage et des autres équipements nécessaires au mouvement des avions. Les pistes sont utilisées par une grande variété d'avions, allant des monoplaces de tourisme aux transporteurs géants. Elles doivent être conçues de manière à pouvoir accommoder toutes les tailles d'avion que les autorités de l'aéroport veulent ou doivent desservir. Il serait plutôt inéquitable d'imposer les mêmes droits au petits et aux gros avions. On risquerait tout simplement de chasser les premiers des aéroports.

Le problème de la détermination des droits d'atterrissage, en fonction de la taille des avions, compte sans doute parmi les premières applications des méthodes inspirées de la théorie des jeux coopératifs à la répartition des coûts. Les coûts reliés aux frais d'atterrissage sont composés de deux parties : une partie variable, fonction du nombre d'atterrissages et de la taille des avions, et un coût fixe provenant des coûts de construction des pistes et de l'aérogare, qui doit être amorti sur un certain nombre d'années. La dimension et la résistance des pistes et des autres équipements fixes d'un aéroport sont généralement déterminées par la taille du plus gros avion qu'on va devoir accommoder.

Les droits d'atterrissage devraient comprendre les coûts variables et une partie des coûts fixes. La partie qui pose problème est celle des coûts fixes. Ces droits devraient tenir compte des exigences des différents types d'avion. En effet, les droits d'atterrissage d'un gros porteur et d'un petit porteur devraient être différents. Mais quelle formule devrait-on utiliser pour calculer les droits à demander aux différents avions ? C'est ici que les méthodes présentées dans le chapitre 2 peuvent être utiles. À titre d'illustrations, nous présentons brièvement deux méthodes empruntées à la théorie des jeux coopératifs, à savoir la méthode Shapley-Shubik et celle du nucléole, qui ont été appliquées à ce problème.

La règle Shapley-Shubik. Supposons qu'on ordonne les N partenaires d'une certaine façon et qu'on fasse payer au premier le coût entier de ses besoins, en supposant qu'il est seul, et au deuxième le coût additionnel (incrémental) imposé par ses besoins, en supposant que seuls ces deux partenaires participent au consortium. On continue ainsi avec les autres partenaires, le cas échéant. On répartirait alors le coût total de tous les besoins. Une telle répartition est dite *répartition selon les coûts incrémentaux*. Elle correspond à un ordonnancement donné des partenaires. Certains usagers pourraient évidemment se plaindre de l'ordre choisi. Entre autres, le premier usager devrait supporter des coûts importants liés au démarrage du projet, alors que le dernier se verrait imputer des coûts minimes, correspondant au simple coût incrémental de ses besoins. Le mathématicien Lloyd Shapley a apporté une réponse élégante à ce problème. Elle consiste à considérer tous les ordres possibles entre les usagers et à prendre comme répartition finale des coûts la moyenne des répartitions selon les coûts incrémentaux. Les usagers se voient ainsi tous traités de façon symétrique. L'économiste Martin Shubik a montré toute la portée de cette idée dans plusieurs cas de partage des coûts.[2] La règle Shapley-Shubik permet de générer, à un coût faible, l'allocation des coûts qui résulterait d'un long et très coûteux processus de négociation entre les parties. On peut montrer que, dans un contexte où il y a économie d'échelles, cette méthode a plusieurs des propriétés souhaitées d'une méthode de partage des coûts, telles d'additivité, l'invariance par rapport aux échelles, la monotonie par rapport aux besoins, l'absence d'interfinancement et la monotonie croisée, chacune de ces propriétés traduisant, en termes mathématiques, diverses demandes exprimées par les partenaires quant aux propriétés souhaitables d'une règle de partage des coûts.[3]

La méthode du nucléole. L'idée derrière ce concept est de chercher à maximiser le bien-être de la moins heureuse des coalitions de partenaires. Considérons une répartition de coûts $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pour l'ensemble des partenaires. Soit une coalition S, c'est-à-dire un sous-ensemble non-vide de N et différent de N. On définit l'excédent $e(x, S)$ de la coalition S avec la répartition x comme l'économie de coûts que réalise la coalition S par rapport à faire cavalier seul. On peut écrire :

$$e(x, S) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Le nombre $e(x, S)$ est égal à ce que gagne la coalition S si elle accepte la répartition x plutôt que de répondre elle-même aux besoins de ses membres. Puisque l'ensemble N comprend $(2^n - 2)$ sous-ensembles stricts non-vides, $e(x, S)$ prend $(2^n - 2)$ valeurs potentiellement différentes. On désigne par $e(x)$ le vecteur des $(2^n - 2)$ valeurs de

[2] La formule Shapley-Shubik s'écrit de manière générale comme suit :

$$x_i = \sum_{S \subset N} \sum_{i \in S} \frac{|S \backslash \{i\}|!|N \backslash S|!}{|N|!} \left[c(S) - c(S \backslash \{i\}) \right]$$

où x_i est le coût que doit supporter le partenaire i, $|S|$ est le nombre de partenaires dans la coalition ou regroupement S, $c(S)$ est le coût total de satisfaire aux besoins des membres de la coalition S.

[3] Voir le chapitre 3.

$e(x, S)$, ordonnées lexicographiquement de la plus petite à la plus grande.[4] Le nucléole est défini comme la répartition x^* qui maximise lexicographiquement $e(\cdot)$. Autrement dit, x^* est la répartition qui maximise le plus petit des gains réalisés par l'ensemble de toutes les coalitions.

Revenons maintenant à l'exemple des droits d'atterrissage. Considérons l'amortissement annuel des coûts fixes pour chaque type d'avion, définis comme les coûts fixes annuels qu'il faudrait encourir pour construire des équipements tout juste suffisants pour accommoder chaque type d'avion, à l'exclusion des plus gros. On désigne ces coûts par C_j, $j = 1, \ldots, m$, où j repère le type d'avion et m est le nombre de types. On pose $C_0 = 0$ et on suppose que les types d'avion sont ordonnés selon ces coûts :

$$C_0 < C_1 < C_2 < \cdots < C_{m-1} < C_m$$

Soit n_j le nombre d'atterrissages par an des avions de type j. Comme un des ingrédients d'un jeu coopératif est l'ensemble des joueurs, ici les atterrissages, désignons par N_j l'ensemble des atterrissages par année des avions de type j et par n_j le nombre d'atterrissages des avions du type j. On a alors :

$$N = \bigcup_{j=1}^{m} N_j$$

et

$$n = \sum_{j=1}^{m} n_j$$

Pour appliquer les méthodes de répartition empruntées à la théorie des jeux coopératifs, il faut une fonction de coût définie sur tous les sous-ensembles $S \subset N$ qu'on notera $c(\cdot)$. La construction de cette fonction est très simple. Si on doit accommoder tous les atterrissages d'un sous-ensemble $S \subset N$, il faudra construire des pistes et des équipements capables d'accommoder les plus gros avions dans ce sous-ensemble. Le coût de ces équipements est celui qu'on attribue à ce sous-ensemble. De façon formelle, désignons par $j(S)$ le type d'avion le plus gros dans S, c'est-à-dire $j(S) = \max \{j : S \cap N_j \neq \emptyset\}$. On a alors :

$$c(S) = C_{j(S)}$$

On pose également $c(\emptyset) = 0$. Il s'agit ensuite d'appliquer les formules de Shapley-Shubik ou du nucléole à cette fonction de coût.

[4] Une suite $e = (e_1, \ldots, e_m)$ est *lexicographiquement inférieure* à une suite $d = (d_1, \ldots, d_m)$ si la première composante de e, différente de la composante correspondante de d, est plus petite que cette dernière. Par exemple, $(3, 1, 9)$ est lexicographiquement plus petit que $(3, 2, 1)$.

Le Tableau 1.1, tiré de Owen (1982), présente la liste des types d'avion qui atterrissaient à l'aéroport de Birmingham en 1968-1969, avec le nombre d'atterrissages et les coûts pertinents pour chaque type d'avion. Les 11 types d'avions sont ordonnés en fonction du coût fixe nécessaire pour leur permettre d'atterrir (colonne 3). Ils sont ordonnés du moins coûteux au plus coûteux. La variable n_i indique le nombre d'atterrissages du type i et la variable C_i le coût fixe, coûts de capital, d'entretien et d'opération des pistes d'atterrissage et des autres équipements nécessaires au mouvement des avions de type maximal i. Ainsi, pour la Caravelle VLR, le montant de £97,436 représente le coût fixe qu'il faudrait encourir si l'ensemble des types d'avion atterrissant à l'aéroport de Birmingham ne comprenait que des avions des types 1 à 5. En ajoutant les frais variables, à la répartition des coûts fixes obtenue selon la méthode choisie, nous obtenons les montants apparaissant dans les colonnes (4) et (5). Nous pouvons comparer les droits ainsi calculés avec les droits qui étaient effectivement exigés durant l'année en question tels que donnés à la colonne (6).

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
i	n_i	C_i	Nucléole	Shapley-Shubik	Actuels
1. Fokker Friendship 27	42	65,899.	13.12	10.09	5.80
2. Viscount 800	9,555	76,725.	13.98	11.75	11.40
3. Hawker Siddeley Trident	288	95,200.	15.44	17.85	21.70
4. Britannia 100	303	97,200.	15.60	18.56	29.80
5. Caravelle VLR	151	97,436.	15.62	18.65	20.30
6. BAC 111 (500)	1,315	98,142.	15.68	18.92	16.70
7. Vanguard 953	505	102,496.	16.02	21.53	26.40
8. Comet 4B	1,128	104,849.	16.21	23.39	29.40
9. Britannia 300	151	113,322.	49.13	53.79	34.70
10.Convair Corronado	112	115,440.	49.30	69.77	48.30
11.Boeing 707	22	117,676.	112.80	171.58	66.70

Tableau 1.1 – Droits d'atterrissage en livres selon les méthodes du nucléole et de Shapley-Shubik

Ce qui frappe dans cette comparaison, c'est le fait que les droits en usage en 1968-1969 amenaient en général les plus petits avions (les types d'avion 3 à 8) à subventionner les plus gros (les types 9 à 11), par rapport à ce qu'auraient prescrit la méthode de partage des coûts de Shapley-Shubik et même celle du nucléole. Ainsi, les droits d'atterrissage des Boeing 707 auraient dû être augmentés de 150% selon la méthode de Shapley-Shubik (de £66.70 à £171.58) et de 70% selon la méthode du nucléole (de £66.70 à £112.80). Mais au delà de ces comparaisons, ce sont les propriétés des méthodes qui doivent déterminer laquelle est la plus apte à représenter les voeux des différents partenaires, voeux qui devraient être exprimés avant même qu'une formule ne soit effectivement appliquée. On est ainsi assuré que ce sont les propriétés des méthodes alternatives qui guident le choix d'une méthode particulière, plutôt que la négociation sur les résultats de l'application de la méthode choisie.

Mentionnons que d'autres méthodes recensées dans le chapitre 2 pourraient être considérées. En particulier, la méthode de répartition séquentielle des coûts, selon laquelle les différents clients sont à l'abri de la taille des demandes des plus gros mais, en contrepartie, ne bénéficient pas des économies d'échelle que pourraient permettre et générer les gros porteurs. Chaque méthode a des propriétés particulières qu'il faut avoir à l'esprit pour déterminer la plus appropriée.

1.2.2 Réseaux de télécommunications

Pour illustrer les problèmes de partage des coûts communs que rencontre couramment l'industrie de télécommunications (vue comme un exemple des industries-réseaux telles l'électricité, le transport ferroviaire, le transport aérien, le réseautage des bibliothèques, le gaz naturel, les aqueducs, les routes, etc.), considérons les deux exemples suivants : l'entrée des entreprises de télécommunications sur le marché de la distribution de signaux vidéo du type Video Dial Tone (VDT) et la détermination des prix et conditions d'accès auxquels différentes entreprises concurrentes peuvent utiliser un réseau de communication ou encore un réseau ferroviaire donné (et typiquement propriété d'une des entreprises en question). De toute évidence, des situations analogues existent dans le transport et la distribution de l'électricité et du gaz naturel, dans la distribution d'eau potable, dans la collecte des eaux usées, dans l'utilisation d'une voie maritime (telle la voie maritime du St-Laurent), etc. Nous discutons le cas du gaz naturel dans le chapitre 2 et nous présenterons les cas de l'eau potable et de la voie maritime plus loin.

En novembre 1993, Pacific Bell a annoncé son intention de reconstruire son réseau à partir d'une architecture intégrant fibre optique et câble coaxial. Ce réseau pourrait transporter à la fois la voix et la vidéo. Les progrès technologiques récents permettaient, selon Pacific Bell, de construire ce réseau à un coût d'environ 1 000 $ par abonné. La construction du réseau commença en mai 1994.

En termes de partage des coûts communs, Pacific Bell proposait d'affecter aux services de télécommunications de base un coût de 837$ par abonné, étant donné que ces services constituaient la principale raison d'être de l'entreprise. Ainsi, le transport de signaux VDT se verrait assigner un coût de 137 $ par abonné. Ce partage des coûts fixes de construction du réseau devait servir par la suite à l'établissement des tarifs que les abonnés des différents services proposés seraient appelés à payer.

Cette allocation des coûts communs souleva la colère des câblo-distributeurs, qui y ont vu l'émergence d'une concurrence déloyale. Selon eux, Pacific Bell allouait au service VDT une part trop faible des coûts communs, afin de pouvoir concurrencer agressivement la câblo-distribution des signaux vidéo qui, dans ces conditions, ne pouvait survivre. Les câblo-distributeurs y voyaient là une forme de subvention croisée, dans laquelle le secteur monopolisé de Pacific Bell, à savoir les services de télécommunications de base, subventionnait le secteur concurrentiel, à savoir la transmission de signaux vidéo.

À l'appui du partage proposé des coûts communs, Pacific Bell affirma que la transmission de signaux vidéo et VDT n'était qu'un des nombreux services qu'un réseau à architecture intégrée pouvait fournir. Dans ces conditions, il fallait se référer au coût incrémental de long terme (CILT) comme base d'allocation des coûts communs : après avoir déterminé les coûts d'investissements et d'opération nécessaire à la fourniture de l'ensemble des services, à l'exclusion de services vidéo (le service téléphonique de base, les services de transmission voix et données non commutés, l'interconnection ethernet des réseaux LAN, la téléphonie vidéo, les services cellulaires et SCP, etc.), et les coûts d'investissement et d'opération de l'ensemble des services incluant les services vidéo, le CILT des services vidéo pouvait être obtenu en soustrayant les premiers des seconds.

Les câblo-distributeurs ont répliqué en affirmant que les propositions de Pacific Bell indiquaient que les abonnés des services de transmission de signaux télévisuels utiliseraient 95% de la bande passante mais ne paieraient que 5% des coûts totaux. Pour Pacific Bell, la méthode des coûts incrémentaux de long terme avait deux avantages importants : elle évitait les subventions croisées et elle offrait les incitatifs nécessaires au développement d'une saine concurrence entre entreprises de télécommunications et entreprises de câblo-distribution.

Cet exemple montre bien que les règles de partage des coûts communs peuvent avoir des conséquences considérables pour la gouvernance de la concurrence et la structure d'une industrie. Le cas de la tarification des routes, des trajets et des circuits dans le transport aérien est un autre exemple dans lequel les règles de partage des coûts communs et la réglementation des pratiques de saine concurrence, en particulier la réglementation et les tests empiriques visant à empêcher les pratiques prédatoires en matière de tarification, sont interreliées.

Cette situation n'est pas exclusive aux industries-réseaux. Elle se retrouve dans pratiquement tous les cas où une concurrence entre secteur public et secteur privé est mise en place pour des fins d'incitation à la productivité, de contrôle des coûts, de *benchmarking* et de *compulsory competitive tendering (CCT)*.[5] Considérons le cas typique de la collecte des déchets et supposons que des mécanismes de concurrence soient mis en place entre secteur public et secteur privé. Afin de garantir une saine concurrence, il faut s'assurer que, de part et d'autre, le partage des coûts communs soit adéquatement fait, afin d'éviter que les autres activités du secteur public ou les autres activités des impartiteurs privés ne viennent subventionner la collecte des déchets et ne donne lieu ainsi à une concurrence "déloyale" entre les deux secteurs, qui mettrait en péril l'atteinte des objectifs visés. D'où l'importance de bien comprendre les fondements de ces règles.

Les méthodes de partage des coûts présentées dans le chapitre 2 sont susceptibles de définir un concept de coût favorisant le développement d'un niveau adéquat de saine concurrence grâce à une tarification non-prédatoire, dont le test serait simplement de vérifier que le prix d'un "produit ou service" donné permet de couvrir non seulement les frais directs de production mais aussi une part adéquate des frais fixes de l'entreprise, telle que déterminée par la formule de partage des coûts fixes retenue par l'organisme responsable de la gouvernance de la concurrence.

Dans les cas de Pacific Bell, et possiblement des autres cas discutés dans les sous-sections ci-dessus, la règle Shapley-Shubik est susceptible de rencontrer ces exigences. Cette règle veut que le coût d'un produit ou service soit égal à ses frais directs plus la part des frais fixes obtenue comme la moyenne des coûts incrémentaux de long terme (CILT), calculée sur tous les ordres d'entrée possibles du produit dans le panier des produits et services offerts par l'entreprise. On évite ainsi l'écueil que pose, dans les cas où les économies d'échelle ou d'envergure sont importantes, l'ordre d'entrée des produits dans le panier.

1.2.3 Réseaux de voies ferrées

Un autre problème intéressant de partage des coûts vient de l'utilisation conjointe d'une voie ferrée par plusieurs utilisateurs. De manière similaire, le besoin de régir la concurrence entre divers modes de transport (ferroviaire, aérien, terrestre, maritime)

[5] Voir Le Gallo (1998).

nous amène à préciser comment les coûts communs à un ensemble de produits et services doivent être alloués, afin d'éviter l'apparition de prix prédatoires sur certains marchés (produits ou arêtes d'un réseau).

Prenons comme exemple la situation illustrée à la Figure 1.1. Une entreprise veut construire, pour ses propres besoins, une voie ferrée allant du point A (un port de mer) au point B (une exploitation minière). Une deuxième entreprise désire également construire une voie ferrée allant du point A (le même port de mer) au point C (une exploitation forestière) ; ou encore construire à un coût sensiblement plus faible un embranchement qui partirait d'un point intermédiaire D sur le tronçon AB projeté, pour aller au point C. Les deux partenaires auraient intérêt à coopérer afin de profiter de l'économie de coûts que représenterait la deuxième option, une fois pris en compte la possibilité que la "qualité" de la voie entre les points A et D doive être plus élevée, étant donné le trafic plus intense que ce tronçon devrait alors supporter. Le partage des coûts communs du tronçon AD ou de l'ensemble du système soulève des problématiques similaires à celles du gazoduc traité dans le chapitre 2.

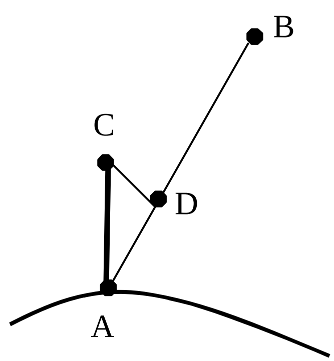


Figure 1.1 – Exemple d'un réseau ferré

1.2.4 Détermination des conditions et des prix d'accès aux réseaux

L'industrie des télécommunications a été et reste réglementée à cause des économies d'échelle importantes qui la caractérisent, en particulier au niveau du réseau de transmission. Mais l'existence d'économies d'échelle significatives au niveau de la transmission (transport) des signaux n'implique pas qu'il faille laisser au propriétaire du réseau le monopole de la production des services de communications empruntant le réseau. Au contraire, il apparaît souhaitable que la production de ces services (de plus en plus nombreux et différenciés) soit soumise à la concurrence, sans pour autant exiger une duplication coûteuse et inutile du réseau de transport lui-même ou du moins des arêtes du réseau qui constituent la véritable source de la position de monopole naturel. D'où l'idée de permettre l'accès au réseau à tout producteur de services, sur une base non discriminatoire, et d'où la nécessité de déterminer et de réglementer les prix et conditions de cet accès.

Déterminer les prix d'accès revient à formuler une règle de partage des coûts du réseau et donc des coûts communs à l'ensemble des utilisateurs. Cette règle doit, non seulement assurer le financement adéquat du réseau, mais aussi inciter l'entreprise responsable (propriétaire) du réseau à en assurer de manière optimale le développement et l'entretien. Ainsi, sont apparues diverses règles d'accès dont :

- la règle ECPR (*Efficient Component Pricing Rule*) proposée par Willig (1979) et Baumol (1983),
- la règle RBPR (*Ramsey-Boiteux Pricing Rule*) proposée par Ramsey (1927) et Boiteux (1956),
- la règle GPC (*Global Price Cap*) proposée par Laffont et Tirole (1994).

L'Efficient component pricing rule (ECPR). La règle de tarification ou de partage des coûts de Baumol-Willig (ECPR) a pour objectif de favoriser l'entrée, au sein d'un réseau, de firmes efficaces eu égard à des prix finaux soit concurrentiels soit réglementés pour empêcher toute rente de monopole. La détermination de ces prix finaux est une question importante en pratique, en raison de la difficulté pour le régulateur de fixer ces prix unilatéralement. Baumol et Sidak (1994) préconisent la fixation de prix finaux plafond, suivant une mesure des coûts de faire cavalier seul (*stand alone costs*), notamment ceux d'un entrant hypothétique. En pratique, cette mesure peut être difficile à réaliser. Pour éviter toute prédation, l'entreprise en place devrait aussi satisfaire à des prix plancher, définis par ses coûts marginaux (incrémentaux) ou évitables. Le but de l'ECPR est de s'assurer que les règles d'accès à l'élément essentiel du réseau ne favorisent pas l'entrée de firmes moins efficaces tout en n'empêchant pas l'entrée d'une entreprise qui pourrait utiliser l'élément essentiel de façon plus efficace que l'entreprise en place.

Il est important de maîtriser le pouvoir qu'a l'entreprise en place de bloquer systématiquement l'entrée de ces entreprises plus efficaces. En ce sens, c'est une règle basée sur les coûts.[6] Mais comme nous allons le voir, sa justesse en tant que règle normative est limitée lorsqu'on impose à la firme en place de satisfaire une contrainte d'équilibre budgétaire. Sa simplicité apparente et donc sa supériorité par rapport aux

[6] Voir à ce sujet Sirois et Forget (1995).

règles de tarification de Ramsey-Boiteux peuvent être mises en doute à la lumière de cas concrets. D'après l'ECPR, la charge d'accès (ainsi que les autres conditions) devrait être définie comme le coût direct de l'accès ajouté au coût d'opportunité pour l'entreprise en place de donner ainsi accès au réseau à ses concurrents. Soit a le coût unitaire de l'accès, C_2 le coût marginal (incrémental) que supporte l'entreprise en place en donnant l'accès à une entreprise concurrente, p le prix du produit (homogène) final, et C_1 le coût marginal de production de l'entreprise en place. L'ECPR se traduit par $a = C_2 + (p - C_1)$. Le coût d'opportunité $p - C_1$ représente en fait la perte de part de marché de l'entreprise en place à laquelle s'ajoute éventuellement une contribution au coût social de l'obligation de service (coût de service universel), si ce dernier est considéré comme la responsabilité sociale de l'entreprise en place. La perte de part de marché de l'entreprise en place se traduit par une diminution de ses profits variables.

Étant donné les prix finaux, choisis de façon optimale (par le régulateur) pour supprimer les rentes de monopole, la réduction des profits variables de l'entreprise en place (ses recettes moins ses coûts variables) a pour conséquence que ses coûts fixes ne sont plus couverts. Par conséquent, l'entreprise entrante devrait compenser cette perte de profits variables de l'entreprise en place : c'est là une condition pour que l'entrée soit génératrice d'efficacité. En ce qui concerne la contribution au coût des obligations sociales (une forme de produit différencié vendu à perte par l'entreprise en place qui doit par ailleurs compenser cette perte sur les secteurs profitables du marché) imposées à l'entreprise en place, notons que la réduction des profits variables de cette dernière pourrait la rendre incapable de complètement couvrir les coûts de ses obligations de service universel. D'où la condition requise que l'entrant contribue à ces obligations sociales, à moins que cette contribution puisse être considérée comme incluse dans la réduction des profits variables.

La règle ECPR a deux propriétés importantes. D'une part, elle envoie le bon signal aux entrants potentiels, puisque seuls les plus efficaces trouveront profitable d'entrer sur le marché. D'autre part, l'entreprise en place, étant complètement dédommagée, ne s'oppose pas à ce que l'entrant utilise l'élément essentiel (du moins dans le contexte statique et non stratégique considéré). Le coût d'opportunité et la perte de part de marché de l'entreprise en place peuvent être évalués dans différents contextes, depuis le cas relativement simple ci-dessus, qui correspond au cas original pour lequel l'ECPR a été proposée, jusqu'à des cas de plus en plus complexes mais plus réalistes. À mesure que l'on se déplace du cas simple aux cas plus réalistes, prenant en compte la différenciation des produits, le contournement (*bypass*), l'incertitude de la demande, la substituabilité des inputs, les entreprises multi-produits et les accès multiples (c'est-à-dire en différents points ou nœuds du réseau), l'évaluation du coût d'opportunité de l'entreprise en place est de plus en plus complexe.

La règle de tarification de Ramsey-Boiteux (RBPR). L'objectif de la règle de partage (tarification) de Ramsey-Boiteux est d'atteindre une efficacité globale dans le marché des biens et services du réseau plutôt que de favoriser l'entrée de firmes efficaces dans le réseau. Elle vise à garantir qu'en présence d'économies d'échelle importantes, les bons biens et services seront produits et offerts en bonnes quantités et donc que les distorsions de production que causera inéluctablement la tarification de ces biens et services seront aussi faibles que possible par rapport à la situation optimale (de premier rang). La règle RBPR veut que les écarts entre les prix et les coûts marginaux des différents biens, exprimés en pourcentage de leurs prix respectifs, soient proportionnels à l'inverse des superélasticités des demandes. Afin d'appliquer cette règle, il faut connaître, ou au moins avoir une estimation, de ces superélasticités, une condition qui peut s'avérer exigeante.

La règle de tarification par le plafonnement global des prix (GPC). Quant au plafonnement global des prix (*Global Price Cap*) proposé par Laffont et Tirole (1994), il a pour principal avantage de suivre les préceptes théoriques de l'analyse économique sans nécessiter plus d'information que d'autres règles telles l'ECPR, la règle de Ramsey, ou encore celle des coûts incrémentaux de long terme. La règle du plafonnement global des prix prend en compte simultanément les prix des produits et services finaux et les charges d'accès dans une formule unique de plafonnement des prix.

Une fois le plafond des prix (indice) déterminé, l'entreprise en place est libre de choisir ses prix, y compris les charges d'accès, tant que le plafond global des prix est satisfait. L'entreprise met d'elle-même en œuvre la structure de tarification à la Ramsey si elle connaît ses conditions de demande et de coût. Le régulateur n'a besoin de rechercher ou d'estimer ni ces conditions ni les élasticités. Le rôle des plafonnements de prix 'classiques' a été d'introduire des mécanismes incitatifs puissants dans la réglementation. En effet, une règle de plafonnement des prix permet à l'entreprise régulée de modifier ses prix tant que certains indices de ces prix ne s'élèvent pas au-dessus des valeurs de référence. Étant donné que le régulateur ne contrôle qu'un indice des prix, cela permet à l'entreprise de profiter des bénéfices qu'elle peut réaliser en choisissant bien sa structure de tarification et ses mesures de réduction de coûts. De ce fait, l'entreprise est incitée à adopter des technologies de production et des efforts de gestion favorisant la réduction des coûts et l'augmentation de l'efficacité.

La notion de plafonnement global des prix fait référence au panier de biens que vend l'entreprise. De ce fait, l'accès au réseau devrait être considéré comme un bien du panier pour lequel le régulateur doit définir un plafonnement des prix sous forme d'un indice. L'entreprise est alors libre de déterminer le prix de l'accès et le prix des autres biens et services qu'elle vend, tant que l'indice de ces prix reste inférieur au plafond imposé comme point de référence. Une des caractéristiques intéressantes de ce plafonnement global des prix est qu'il permet d'implémenter la tarification à la Ramsey-Boiteux de manière décentralisée. Les prix choisis par l'entreprise en place, maximisant ses profits tout en satisfaisant la contrainte de plafonnement global des prix, sont les prix de Ramsey-Boiteux.

Nous ne développerons pas davantage ces règles de détermination des prix d'accès. Le lecteur intéressé à une présentation succincte, mais plus complète, peut se référer à Boyer et Robert (1998) qui passent en revue les principes, faits et enjeux pertinents aux mouvements de déréglementation, de restructuration et de privatisation dans les industries-réseaux. Il nous suffit de mentionner ici que ces règles d'accès peuvent être perçues comme des règles de partage des coûts communs permettant et tenant compte de l'ajout et du retrait des partenaires au partage (utilisateurs du réseau et concurrents de l'entreprise propriétaire du réseau).

1.2.5 L'approvisionnement en eau potable

Cet exemple s'inspire d'un cas où 18 municipalités de la région de Skåne en Suède se sont regroupées afin de se doter d'un système d'approvisionnement en eau potable et d'en partager les coûts communs (Young 1994). Un groupe de scientifiques de l'International Institute for Applied Systems Analysis [IIASA, Autriche], dont des théoriciens des jeux coopératifs, reçut le mandat de concevoir un mécanisme équitable, incitatif et équilibré de répartition des coûts communs d'une mise à niveau du système, dont certains éléments remontaient aux années 40. En théorie, le groupe aurait du évaluer les coûts des $2^{18} = 262144$ regroupements (coalitions) possibles, une tâche impossible. Les 18 municipalités furent plutôt regroupées en 6 unités sur la base de leurs expériences passées de coopération, de leur proximité géographique et des caractéristiques de leurs systèmes d'aqueduc respectifs (voir la Figure 1.2). Une fois réalisée la répartition des coûts communs entre les 6 unités, une deuxième ronde de partage deviendrait nécessaire pour partager le coût réparti entre les municipalités de chaque unité. Nous n'allons couvrir ici que la première étape.

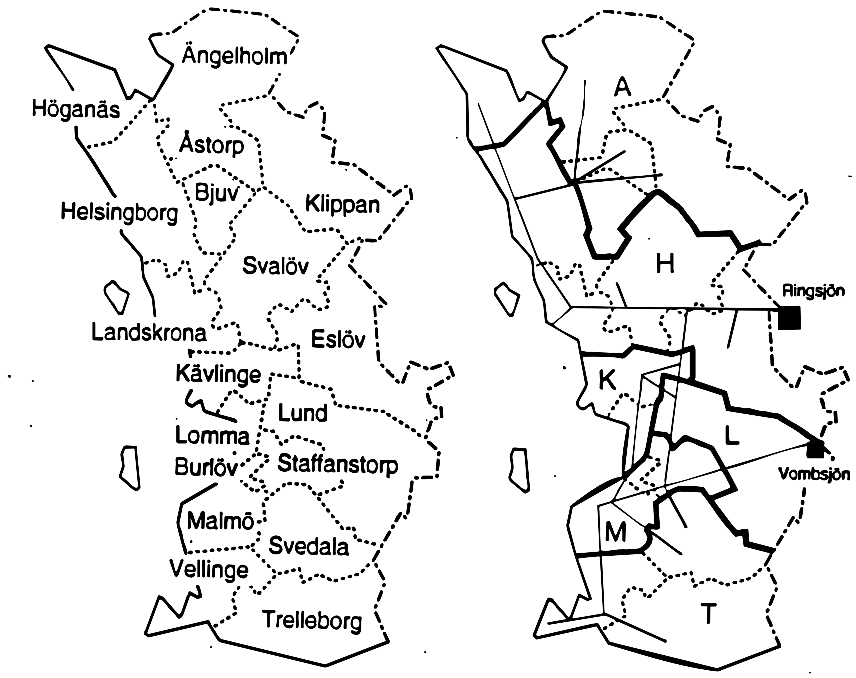


Figure 1.2 – La région de Skäne, Suède

Une première difficulté, souvent rencontrée dans ce genre de projet, est de partager les coûts entre coûts directs et coûts joints. Dans le présent exemple, le coût des équipements de pompage de l'eau dans des réservoirs municipaux (coût direct) dépend de la pression avec laquelle l'eau est distribuée aux unités (coût joint). Il n'est pas toujours facile de déterminer si un coût donné est direct ou joint. Aussi, il serait souhaitable que la règle de partage des coûts joints soit invariante par rapport à une telle décomposition, c'est-à-dire indépendante du critère précis de délimitation entre coûts directs et coûts joints.[7]

Les coûts d'approvisionnement en eau potable pour chaque ensemble (coalition) $S \subseteq N$ furent estimés par des méthodes standard d'ingénierie des eaux. Ces coûts, en MCS (millions de couronnes suédoises), sont présentés au Tableau 1.2, qui fait état éga-

[7] Une fonction de coût c est décomposable en coûts directs $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ et coût joint c^* si :

$$c(S) = d(S) + c^*(S), \quad \text{pour tout ensemble} \quad S \subseteq N$$

une méthode de répartition ϕ est invariante dans les coûts directs si, lorsque c est décomposable, alors $\phi(c) = d + \phi(c^*)$, c'est-à-dire $\phi_i(c) = d_i + \phi_i(c^*)$ pour tout i.

lement de la présence ou non d'économies d'échelle au sein d'un groupe (coalition). Les coalitions sont séparées par des virgules lorsque leur intégration au sein d'un système unique ne génère aucune économie d'échelle.

Groupe	Coût total	Groupe	Coût total	Groupe	Coût total
A	21.95	AHK	40.74	AHKL	48.95
H	17.08	AHL	43.22	AHKM	60.25
K	10.91	AH,M	55.50	AHK,T	62.72
L	15.88	AH,T	56.67	AHL,M	64.03
M	20.81	A,K,L	48.74	AHL,T	65.20
T	21.98	A,KM	53.40	AH,MT	74.10
		A,K,T	54.84	A,K,LM	63.96
AH	34.69	A,LM	53.05	A,K,L,T	70.72
A,K	32.86	A,L,T	59.81	A,K,MT	72.27
A,L	37.83	A,MT	51.36	A,LMT	73.41
A,M	42.76	HKL	27.26	HKL,M	48.07
A,T	43.93	HKM	42.55	HKL,T	49.24
HK	22.96	HK,T	44.94	HKMT	59.35
HL	25.00	HL,M	45.81	HLMT	64.41
H,M	37.89	HL,T	46.98	KLMT	56.61
H,T	39.06	H,MT	56.49	AHKL,T	70.93
K,L	26.79	K,LM	42.01	AHKLM	69.76
KM	31.45	K,L,T	48.77	AKHMT	77.42
K,T	32.89	K,MT	50.32	AHLMT	83.00
LM	31.10	LMT	51.46	AKLMT	73.97
L,T	37.86			HKLMT	66.46
				AHKLMT	83.82

Tableau 1.2 – Coûts des différents systèmes en millions de couronnes suédoises (MCS)

Notons quelques caractéristiques de la fonction de coût. Bien que l'unité L soit proche des deux sources majeures d'eau (les lacs Ringsjön et Vombsjön), elle a un coût relativement élevé de faire cavalier seul (*stand alone cost*) de 15.88 MCS, car elle ne possède aucun droit de tirage d'eau de ces lacs. Les unités H et M peuvent bénéficier beaucoup d'alliances avec d'autres unités. Le coût incrémental du système possédé par H (Ringsjön) est plus faible (capacité incrémentale plus grande) que celui du système possédé par M (Vombsjön). Ainsi, le coût incrémental d'ajouter des municipalités à celles de M sera plus élevé que le coût incrémental de les ajouter à celles de H. En d'autres mots, H a plus à offrir à des partenaires éventuels que M et cela se reflétera dans le partage des coûts.

	A	H	K	L	M	T
Cavalier seul	21.95	17.08	10.91	15.88	20.81	21.98
Population	10.13	21.00	3.19	8.22	34.22	7.07
Consommation	13.07	16.01	7.30	6.87	28.48	12.08
Bénéfices résiduels	19.54	13.28	5.62	10.90	16.66	17.82
Nucléole	20.35	12.06	5.00	8.61	18.32	19.49

Tableau 1.3 – Répartition des coûts communs de 83.82 MCS selon 4 méthodes

Le Tableau 1.3 présente la répartition des coûts totaux de 83.82 MCS, selon 4 méthodes différentes. Les deux premières sont des méthodes "naïves" qui partage les coûts sur une base proportionnelle à la population et à la consommation respectivement. Elle sont naïves en ce sens qu'elles ne considèrent ni les alternatives des unités, en particulier la possibilité pour elles de se séparer du système et de faire cavalier seul, ni les règles d'équité, en particulier celle qui veut que chaque unité paie au moins le coût incrémental qu'elle impose à l'ensemble du système. En effet, certaines unités, telles H et M, se voient allouer des coûts supérieurs à leurs coûts de faire cavalier seul alors que d'autres unités, telles A et T, ne paieraient même pas le coût marginal ou incrémental de les inclure dans la grande coalition AHKLMT et seraient ainsi subventionnées par les autres unités.

La *méthode des bénéfices résiduels*, une méthode standard couramment appliquée en ingénierie, évite de facturer plus que le coût de faire cavalier seul mais elle n'est pas immunisée contre le retrait de certaines coalitions. C'est le cas en particulier de la coalition HKL, qui peut satisfaire ses besoins au coût de 27.26 MCS, alors que la méthode des bénéfices résiduels lui facture 29.80 MCS. Le nucléole, faisant partie du coeur, est immunisé contre les menaces de retrait : aucune coalition ne se voit imposer un coût supérieur à celui qu'elle devrait encourir si elle faisait cavalier seul.

1.2.6 Les poteaux et les tours de diffusion et de communication

La détermination des modes possibles de tarification d'un emplacement sur une tour de diffusion a fait l'objet d'une étude par Raymond Chabot et Martin Paré en 1986. Plusieurs entreprises propriétaires de tours de diffusion ont été consultées. Il en est ressorti que le droit d'utilisation d'un équipement ou d'un emplacement sur une tour ne semble pas déterminé à l'aide d'une technique rigoureuse. Des négociations entre les deux parties déterminent la valeur du droit d'utilisation. Par ailleurs, le milieu insiste pour que "la valeur du marché" soit retenue comme la meilleure base de facturation. Cette "valeur du marché" est sujette à diverses interprétations : le coût de l'alternative pour le locataire, le partage des coûts supportés par le propriétaire, le prix de services concurrents équivalents, ou encore une quote-part égale à ce que paie chacun des copropriétaires actuels.

L'étude en question suggère que les guides suivants servent de base au propriétaire dans la fixation de sa tarification : la valeur basée sur les coûts de l'alternative ; la valeur basée sur les prix du marché ; et la valeur basée sur le principe de partage des coûts. Ces guides forment ce qu'on pourrait appeler "l'intervalle de décision". La valeur négociée devrait se situer, de manière générale, dans l'intervalle de décision.

Le cas de la tarification des emplacements sur une tour de diffusion ou de transmission de signaux est un cas assez classique de partage de coûts communs. Les règles de partage discutées dans le chapitre 2, en particulier la règle Shapley-Shubik et la règle séquentielle, présentées ci-dessus, peuvent être appliquées dans la mesure où les données sur la fonction de coût peuvent être obtenues. Les données devraient permettre de calculer le coût total, le coût direct pouvant être appliqué à chaque entité, les coûts communs, le coût pour chaque entité de faire cavalier seul, le coût marginal ou incrémental de servir chaque entité et le gain marginal de chaque coalition ou sous-groupe d'entités. Il semble à première vue que le calcul de ces différents coûts pourrait être effectué sans trop de difficultés.

Le partage des coûts des poteaux servant à la distribution d'électricité, à l'acheminement des services de téléphonie, à la câblo-distribution, etc. pose des problèmes conceptuels similaires à ceux auxquels on fait face dans le cas d'une tour de diffusion ou de transmission. Ici encore, taille et distance sont des paramètres auxquels nous pensons immédiatement. Différents utilisateurs ont cependant des besoins différents, quant à la taille et la hauteur des poteaux, entre autres, et donc quant à leur sécurité et fiabilité, mais il serait de toute évidence non-économique de déployer plusieurs systèmes similaires côte à côte. Le système à installer doit pouvoir satisfaire aux besoins de l'ensemble des partenaires utilisateurs de l'ouvrage.

Le partage des coûts entre les partenaires risque de soulever beaucoup d'animosités étant donné leurs différents besoins. Ces animosités pourraient être significativement réduites par l'application de règles de partage de coûts dont les propriétés sont bien identifiées. Tout comme dans le cas d'une tour de diffusion, certaines des règles de partage que nous avons présentées dans le chapitre 2 pourraient jouer un rôle de facilitateur dans les négociations entre les partenaires ou les parties en présence et mener plus rapidement et plus efficacement à des accords équitables et bénéfiques pour toutes les parties. Ces règles de partage des coûts seraient particulièrement utiles lorsque les partenaires à la négociation relèvent d'organismes de réglementation différents dont les exigences sont souvent incompatibles, du moins à première vue.

1.2.7 Les systèmes urbains souterrains

Dans plusieurs cas, les réseaux-systèmes urbains d'aqueduc, de collecte des eaux usées, de distribution de gaz naturel, de distribution électrique, de télécommunications, etc. passent dans des canalisations regroupées sous terre. Ainsi, la construction de ces ouvrages implique souvent des coûts fixes très importants, qu'il faut partager entre les différents utilisateurs. Par exemple, lorsque la voie publique est ouverte pour les besoins de développement ou de réfection de l'un de ces réseaux, les autres partenaires en profitent pour développer ou inspecter leurs propres installations et procéder aux entretiens et réparations nécessaires. Il peut s'avérer efficace d'ouvrir la voie sur une plus grande largeur ou longueur que strictement nécessaire et ce pour permettre à ces autres partenaires de développer, entretenir ou vérifier leurs ouvrages. Quel montant ou quel pourcentage le coût fixe commun d'ouvrir la chaussée et de procéder au développement des massifs communs devrait être supporté par chacun des partenaires, actuels et futurs ?

La réponse à cette question soulèverait de multiples discussions et négociations si les partenaires devaient partir de zéro dans l'étude de la question. Les règles de partage dont nous avons discuté peuvent encore une fois venir à la rescousse et servir de mécanisme de facilitation dans la recherche d'une règle de partage efficace et équitable.

Nous avons analysé le cas de la Commission des services électriques de la Ville de Montréal (CSEVM). Nous avons décrit la problématique de la CSEVM et le contexte dans lequel elle opère et nous avons procédé à un survol des principales méthodes de répartition des coûts communs que les différents partenaires de la CSEVM pourraient considérer. Nous avons affirmé qu'il faudrait idéalement choisir une méthode de répartition de coûts sur la base des propriétés qu'elle respecte intrinsèquement, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner en termes de partage des coûts. C'est sur ces propriétés que les usagers devraient être amenés à s'entendre au départ, plutôt que sur une formule précise. On discuterait ainsi d'abord et avant tout des vrais enjeux, plutôt que de prendre des positions stratégiques difficiles à réconcilier par la suite.

Le sous-comité de travail du comité “demandeur-payeur” de la CSEVM avait d’ailleurs énoncé cinq critères qui devraient être pris en compte dans le choix d’une méthode de répartition. Il s’agissait de l’équité, de la responsabilité, de la transparence, de la faisabilité et de la légalité. Le problème est évidemment de donner une formulation précise à ces critères. L’équité, entre autres, peut prendre différentes formes. On retrouve dans la littérature économique plusieurs propriétés reliées aux trois premiers critères et l’étude de méthodes de répartition est faite en fonction de ces propriétés. Dans certains articles, on démontre qu’il existe une et une seule méthode satisfaisant un ensemble donné de propriétés. Nous avons, dans le contexte de cette analyse, énoncé un certain nombre de ces propriétés, pertinentes dans le contexte de la CSEVM, et avons ensuite ciblé deux méthodes de répartition de coûts qui nous semblaient rencontrer le plus grand nombre de propriétés désirables pour la CSEVM. Il s’agit de la méthode Shapley-Shubik que nous avons présentée plus haut et de la méthode de répartition séquentielle.

La méthode de répartition séquentielle. On ordonne d’abord les I usagers, selon l’ampleur du coût de leurs besoins d_i, c’est-à-dire selon le coût $c(d_i)$ de répondre à ces besoins de manière isolée. Ainsi, $c(d_1) < c(d_2) < \cdots < c(d_I)$. Puis, on construit une suite de demandes intermédiaires. La première consiste à ramener les besoins de tous les usagers au niveau de ceux du ou des plus petits en termes de coût. Autrement dit, on suppose que la demande de chaque agent est d_1. On répartit ensuite le coût $c(d_1, d_1, \ldots, d_1)$ d’un projet fictif ou d’une capacité tout juste suffisante pour répondre à cette demande, de façon égalitaire entre tous les usagers. Le plus petit (ou les plus petits) usager n’aura rien d’autre à payer. Les autres usagers se voient imputer, en plus, une part égale de l’accroissement de coût qu’entraînerait un accroissement de capacité suffisant pour répondre à des demandes de leur part qui seraient toutes égales à celle du deuxième plus petit usager, $d_i = d_2$ $\forall i > 1$. Ce dernier n’aura rien d’autre à payer par la suite. On continue ainsi à imputer, de façon itérative, les coûts incrémentaux associés aux accroissements de capacité nécessités par des demandes de plus en plus grandes.

Par l’application itérative du partage des coûts incrémentaux, les plus petits usagers sont à l’abri de l’ampleur de la demande des gros, pour le meilleur et le pire. Ils ne vont pas payer pour des demandes dont ils ne sont pas responsables mais, dans un contexte d’économies d’échelle, ils ne vont pas profiter non plus des externalités (réduction des coûts incrémentaux) amenées par ceux qui ont des demandes plus grandes. La méthode de répartition séquentielle serait une façon systématique d’appliquer les principes qui ont été suggérés dans le cadre des travaux du comité “demandeur-payeur” de la CSEVM. Une première proposition, soumise dans le cadre de ces travaux, suggérait de séparer les coûts reliés aux puits d'accès et aux conduits selon leur dimension. La facturation aux usagers comporterait trois volets. Elle tiendrait d'abord compte des coûts des structures exclusives. Ensuite, la somme demandée serait fonction du nombre de puits d'accès par lesquels passent les conduits qui lui sont attribués. Finalement, le taux de la redevance tiendrait compte des diamètres des conduits attribués (occupés ou libres). Une seconde proposition suggérait de répartir les coûts par projet. Les coûts qui peuvent être rattachés directement à une structure ou à une section de conduits seraient imputés aux usagers présents dans la structure ou les conduits. Les coûts de construction d'un puits d'accès commun seraient répartis également entre les usagers présents dans celui-ci et les coûts des exigences additionnelles seraient absorbés par les usagers demandeurs.

La méthode de répartition séquentielle prendrait toutes ces suggestions en compte, tout en dispensant la CSEVM de la définition de coefficients de proportionnalité. Tout repose sur la construction des demandes intermédiaires. La première de ces demandes ramène les besoins de tous les usagers au niveau de celui des plus petits. Les conduits sont donc ramenés à leur plus petit diamètre et leur nombre est réduit à celui demandé par les petits usagers. Il en va de même des puits d'accès. Il n'y a pas de structure exclusive dans cette première demande intermédiaire. Le coût de cette dernière est réparti de façon égalitaire entre tous les usagers. À mesure qu'on avance dans l'application de la méthode, on incorpore des besoins de plus en plus grands dans les demandes intermédiaires et le coût supplémentaire de ces plus grands besoins est partagé de façon égalitaire entre les usagers qui en sont responsables. Si un usager est l'unique demandeur d'une structure particulière, cette méthode lui en impute le coût entier.

La méthode de répartition séquentielle satisfait en plus à d'autres propriétés intéressantes. Elle est robuste au choix des unités de mesure, un problème qui peut se poser à la CSEVM. Elle traite tous les usagers de façon symétrique et donne des imputations qui ne décroissent pas par rapport à l'ampleur des demandes. L'ordre de ces imputations correspond à celui des coûts de faire cavalier seul. Ces propriétés vont dans le sens de l'équité et de la responsabilité.

On sait aussi que cette méthode est la seule à satisfaire au traitement égalitaire de ceux qui ont des coûts de faire cavalier seul identiques et à l'invariance des contributions par rapport aux plus grandes demandes. De plus, la présence d'un usager dont la demande est nulle n'a aucune influence sur les parts des coûts imputées aux autres et l'ordre entre les parts de deux usagers est indépendant des demandes des autres usagers. En fait, elle est la seule à satisfaire à ces deux propriétés, en même temps qu'à l'indépendance par rapport au choix des unités.

Finalement, dans un contexte où il y a des économies d'échelle, la méthode de répartition séquentielle donne des imputations qui sont toujours à l'abri des contestations de la part de sous-ensembles d'usagers : la part des coûts imputée à une coalition n'est jamais plus élevée que le coût total auquel elle pourrait fonctionner seule. Par contre, elle n'est pas robuste à la décomposition en éléments de coût, directs et indirects par exemple. La littérature économique sur la répartition des coûts nous enseigne qu'on ne peut pas avoir toutes les propriétés à la fois. Certaines sont tout simplement incompatibles entre elles.

La méthode de répartition séquentielle exige non seulement les coûts de satisfaire à la demande exprimée mais également les coûts de demandes intermédiaires. L'estimation de ces coûts nous semble réalisable. Le nombre des demandes intermédiaires est au maximum égal à celui des usagers différents.

Par comparaison, avec n usagers, la méthode Shapley-Shubik exigerait l'estimation du coût de (2^n-1) demandes, un nombre qui croit rapidement avec le nombre de partenaires. Dans la mesure où plusieurs usagers sont pratiquement identiques ou du moins assez semblables, il ne serait pas nécessaire de tous les distinguer. On pourrait très bien fonctionner avec des catégories d'usagers. La méthode retenue servirait à répartir les coûts entre ces catégories. Une méthode plus simple pourrait ensuite être utilisée pour répartir le coût imputé à une catégorie, entre ses membres. Pour la même raison, il ne serait pas nécessaire de refaire tous les calculs à chaque fois qu'arrive un nouvel usager ou une nouvelle demande. Il pourrait tout simplement être traité à l'intérieur d'une catégorie.

Les coûts dont il est question ici sont des coûts de remplacement (constructions nouvelles) et non des coûts historiques. Or, le mandat actuel de la CSEVM est de répartir les coûts historiques et plus précisément des annuités sur des coûts historiques. Pour réconcilier les deux approches, rien n'empêcherait d'utiliser une méthode comme celles proposées pour estimer la part des coûts de remplacement qui reviendrait à chaque usager et de répartir ensuite les coûts historiques proportionnellement à ces parts. De façon équivalente, les répartitions données par la méthode retenue pourraient être ajustées pour ramener le montant total réparti au niveau des coûts historiques. Nous croyons toutefois qu'une réflexion s'impose sur les coûts à répartir. Nous avons fait état des problèmes d'incitation que pouvait entraîner la répartition de coûts historiques plutôt que l'utilisation des coûts d'opportunité, dont les coûts de remplacement. Nous avons aussi traité des conséquences, à cet égard, du choix d'amortir les dettes sur 20 ans.

En résumé, nous avons recommandé le choix de la méthode de répartition séquentielle parce qu'elle nous semble la plus susceptible de répondre à la problématique de la CSEVM. Son application exigerait l'estimation de certains coûts, un exercice que les ingénieurs et autres experts qui préparent des soumissions sont habitués à faire. L'application de cette méthode nous semble donc tout à fait possible dans le contexte de la CSEVM.

1.2.8 Voie maritime

Le partage des coûts communs d'une voie maritime est un bel exemple auquel les méthodes de partage des coûts communs discutées dans le chapitre 2 pourraient être appliquées avec profit. Cet exemple s'inspire de notre analyse des options de tarification de la Voie Maritime du Saint-Laurent (VMSL) réalisée en 2001 à la demande de la Corporation de Gestion de la Voie Maritime du Saint-Laurent (CGVMSL).

Une voie maritime est un ouvrage dont les coûts sont en bonne partie fixes. Les partenaires de ce projet, à savoir les différents armateurs/utilisateurs, utilisent la voie maritime de manière différenciée, certains ayant besoin de l'ensemble du projet (longueur, largeur et profondeur de la voie) alors que d'autres n'utilisent la voie que partiellement tant en longueur qu'en largeur et/ou en profondeur. Certains transportent des marchandises de grande valeur alors que d'autres ne transportent que des marchandises en vrac de valeur unitaire faible. De plus, il est de connaissance commune que la capacité de la voie maritime resterait supérieure à son utilisation même si les passages étaient tout à fait gratuits. Étant donné qu'en l'absence de contrainte de capacité, le coût marginal d'un passage additionnel dans la Voie maritime est nul ou quasi-nul, on a demandé aux autorités de la VMSL de pratiquer une tarification qui vise, non pas à récupérer l'ensemble des coûts (capital et opérations) de l'ouvrage, mais uniquement les coûts quasi-fixes d'opération, tout en assurant par ailleurs une valorisation maximale (usage maximal) de la voie maritime.

La structure actuelle de la tarification est constituée d'une combinaison de prix – par écluse, passager, tonnage, cargaisons différenciées et segment – établie en tenant compte de contraintes de compétitivité par rapport aux autres modes de transport. La nouvelle tarification devrait être choisie de manière à maximiser l'utilisation de la voie maritime, sous contrainte de couverture des coûts quasi-fixes de fonctionnement et de maintenance. le principe d'une telle tarification est largement développé dans la littérature, sous le nom de tarification de second rang (second-best pricing). Le premier rang (first best pricing) consisterait à réduire les prix jusqu'à ce qu'ils atteignent le coût incrémental d'un bateau supplémentaire navigant sur la voie maritime, ou jusqu'à ce que la route maritime soit utilisée à pleine capacité. Par conséquent, les prix pourraient être nuls si le coût marginal associé à un bateau supplémentaire était nul. Cela aboutirait au bien-être maximal pour la société. Si l'on se conforme à la contrainte de revenu et que l'on se restreint à des tarifs simples par cargaison, la règle de tarification efficace à la Ramsey-Boiteux veut que les prix par cargaison soient inversement proportionnels aux élasticités de demandes pour les différents types de cargaisons. L'élasticité de la demande pour les services de voie maritime mesure la sensibilité du trafic maritime au prix de ces services.

La théorie économique nous enseigne aussi que l'on peut faire mieux qu'une tarification simple par tonne de cargaison, grâce à un menu de tarifs en plusieurs parties. Un tarif multiparties consiste en un ensemble de prix, charges fixes et coûts unitaires. Les tarifs actuels (frais par écluse, frais de tonnage, frais par type de cargaison) sont de cette nature. L'idée d'un menu va plus loin. Un menu de tarifs est constitué d'au moins deux tarifs multiparties et les clients sont libres de choisir celui qui leur convient le mieux. Autrement dit, on pourrait appliquer pour chaque passage dans la voie maritime le tarif qui correspond au coût minimum pour ce passage. A titre d'exemple, on pourrait construire un menu en offrant le choix entre les tarifs actuels du segment Montréal-Lac Ontario (MLO) et du segment Welland, pour n'importe quel passage sur n'importe quel segment de la voie maritime.

En construisant soigneusement le menu de tarifs, on peut s'assurer que la société, les clients, les transporteurs et la CGVMSL en bénéficient. Il existe aussi un menu optimal de tarifs multiparties. La construction d'un tel menu nécessite à nouveau de connaître les élasticités des différentes fonctions de demande qui s'adressent au service, en fonction des différentes parties du tarif. Malheureusement, nous n'avons pratiquement jamais les données nécessaires pour aller aussi loin. De plus, un tel menu optimal comprendrait un nombre considérable de tarifs différents, parmi lesquels il serait presque impossible de choisir, sans mentionner la difficulté de l'administrer. Cependant, cette approche pourrait être prometteuse dans le contexte de la voie maritime du Saint-Laurent en conservant la structure actuelle avec frais par écluse et frais de tonnage, mais en donnant un certain choix aux transporteurs.

En fait, nous avons recommandé à la CGVMSL d'adopter un menu de deux tarifs binômes (en deux parties) pour la tarification sur l'ensemble de la voie maritime. Le premier choix offert aux clients serait un tarif ne comprenant aucun droit par écluse, mais des prix en fonction du tonnage et de la cargaison. Ce tarif est similaire à celui existant déjà sur le segment MLO. Le deuxième choix serait une combinaison d'un droit fixe par écluse et d'un prix unitaire par unité de tonnage et par cargaison, identique au tarif qui prévaut sur le canal Welland. Nous avons suggéré aussi que ce menu de tarifs soit défini et appliqué par écluse plutôt que par segment, et qu'il soit le même pour les deux segments de la voie maritime. Cela implique que les écarts actuels entre les prix relatifs sur les deux segments devraient disparaître. Insistons sur le fait que l'idée principale d'un tel menu est que les transporteurs peuvent choisir parmi plusieurs tarifs celui qui leur est le plus avantageux (le moins onéreux). Aucun transporteur ne pourra se plaindre que d'autres bénéficient d'un tarif plus avantageux, puisqu'il a toujours la possibilité de demander d'être facturé suivant cet autre tarif.

1.2.9 La construction d'un barrage multi-objectifs

On peut considérer la construction d'un barrage comme un projet avec plusieurs objectifs, tels produire de l'électricité, assurer l'irrigation des terres agricoles et garantir l'étiage en période de basses eaux, afin de préserver l'abondance de poissons (pêche sportive). Un tel projet multi-objectifs peut exiger que le coût total de l'ouvrage soit partagé entre ces objectifs soit pour fins de tarification ou simplement pour fins de transparence. Ce problème a une structure analogue à celui de la détermination du coût relatif des différentes missions d'un organisme lorsque des économies d'échelle ou d'envergure importantes sont présentes.

Nous illustrons ce problème à l'aide d'un exemple tiré du chapitre 4 sur les définitions et les propriétés souhaitables des solutions aux jeux de coûts. Dans une vallée, on retrouve une compagnie d'électricité, un syndicat d'agriculteurs et l'association des pêcheurs à la ligne. La compagnie d'électricité voudrait construire un barrage pour turbiner l'eau et produire de l'électricité selon un profil intra-annuel d'appels de charge bien spécifié. Les agriculteurs voudraient construire eux aussi un barrage qui leur garantirait un certain profil intra-annuel de disponibilités en eau pour irriguer les terres qu'ils cultivent. Le profil intra-annuel de leurs besoins n'est généralement pas le même que celui des hydro-électriciens. Enfin, les pêcheurs voudraient aussi construire un barrage qui permettrait de régulariser le débit de la rivière et garantir l'étiage en période de basses eaux, préservant ainsi la richesse de la flore aquatique, donc la qualité des frayères et par conséquent l'abondance des poissons.

Pour la compagnie d'électricité, le projet est un certain type de barrage, équipé de turbines[8], et un réseau de transport de l'électricité, du barrage jusqu'aux divers points d'entrée de son réseau de distribution. Pour le syndicat d'agriculteurs le projet est un barrage sans turbine, d'une capacité de rétention différente, et un réseau d'adduction de l'eau aux différentes parcelles à cultiver. Pour l'association des pêcheurs le projet est un barrage d'une capacité de rétention différente de la capacité requise pour les deux autres projets. Le débit naturel de la rivière et les besoins des trois agents sont ceux du Tableau 1.4. Supposons aussi, pour simplifier, que :

- au cours de chaque mois, les débits instantanés sont constants ;
- la loi oblige ceux qui retiennent l'eau, qui construisent une retenue, à laisser dans la rivière le débit d'étiage lorsque le débit naturel lui est supérieur ;
- les pertes par évaporation sont négligeables ;
- l'eau prélevée pour irrigation ne retourne pas dans le réseau hydrographique : elle part en totalité dans l'atmosphère soit par évaporation du sol, soit par évapo-transpiration des plantes, de sorte que les prélèvements pour irrigation sont des prélèvements nets.

Mois	Débit naturel de la rivière	Débit voulu Électriciens	Débit voulu Agriculteurs	Débit voulu Pêcheurs
Janvier	1000	3000	0	500
Février	1000	2000	0	500
Mars	2500	1000	0	500
Avril	3500	0	0	500
Mai	2500	0	1000	500
Juin	1500	0	2000	500
Juillet	500	0	2500	500
Août	500	0	1500	500
Septembre	100	0	0	500
Octobre	2000	0	0	500
Novembre	3500	1500	0	500
Décembre	2500	3000	0	500

Tableau 1.4 – Débit naturel et débits demandés par les agents

S'il n'y a que le projet des pêcheurs à réaliser, il suffit de construire un réservoir dont la capacité de retenue est de $500 - 100 = 400$, pour palier à l'insuffisance du

[8] On suppose pour simplifier que l'eau est turbinée au pied du barrage.

débit naturel de la rivière au mois de septembre. S'il n'y a que le projet du syndicat d'agriculteurs à réaliser, il faut tenir compte du fait que l'eau prélevée pour irriguer est totalement perdue et donc le syndicat doit laisser dans la rivière le volume du débit d'étiage, lorsque le débit naturel lui est supérieur. Il faut donc construire un barrage d'une capacité de $(2000+500-1500)+(2500+500-500)+(1500+500-500) = 5000$, pour palier au déficit du débit naturel au cours des mois de juin, juillet et août. En général, du fait que les flancs des vallées sont évasés, et à cause de la pente du lit du fleuve, il est moins coûteux de construire un seul barrage d'une capacité de 5400 plutôt que deux barrages, l'un d'une capacité de 5000, l'autre d'une capacité de 400.[9] La réalisation du seul projet des électriciens nécessite l'érection d'une retenue d'une capacité de 3500. En décembre la compagnie veut turbiner 3000, le débit naturel n'est que de 2500, d'où un déficit de 500 ; en janvier elle veut turbiner 3000 alors que le débit n'est que de 1000, d'où un déficit de 2000 ; enfin, en février elle veut turbiner 2000 tandis que le débit naturel n'est que de 1000, d'où un déficit de 1000.[10] Le coût de réalisation coordonnée des projets des électriciens et des pêcheurs est égal au coût de réalisation du seul projet des électriciens. La retenue construite pour réaliser le seul projet des électriciens permet de satisfaire les besoins des pêcheurs. Le coût de réalisation coordonnée des trois projets est le coût d'érection d'un barrage d'une capacité de retenue de 5400, équipé de turbo-alternateurs et des réseaux de transport de l'énergie et de l'adduction de l'eau. Ce coût sera généralement moindre que le coût de réalisation de deux barrages, l'un d'une capacité de 3000 équipé des mêmes turbo-

[9] On notera qu'on dispose de débits suffisants tout au long de l'année pour constituer un stock de 5400 disponible fin mai, pour utilisation en juin, juillet, août et septembre. En effet, compte tenu de la contrainte d'étiage, en mai le solde du débit naturel net des retraits pour irrigation s'élève à $2500 - 500 - 1000 = 1500$. En avril, le respect de la seule contrainte d'étiage permet d'accumuler $3500 - 500 = 3000$. Enfin en mars on peut accumuler $2500 - 500 = 2000$. Ce projet commun des agriculteurs et des pêcheurs est réalisable indépendamment du projet des électriciens qui turbinent 1000 au mois de mars. Il suffit que la retenue commune soit située en aval de celle des électriciens qui restituent l'eau après l'avoir turbinée.

[10] Là encore le débit naturel est suffisamment élevé pour accumuler un stock de 3000 disponible fin novembre. Compte tenu de la contrainte d'étiage, il est possible de constituer, au cours du mois de novembre un stock de $3500 - 1500 = 2000$, car après turbinage les 1500 que veulent utiliser les électriciens sont restitués à la rivière de sorte que la contrainte d'étiage est satisfaite, et, au cours du mois d'octobre, un stock de $2000 - 500 = 1500$. La constitution de cette réserve au cours des mois de novembre et d'octobre n'interfère pas avec la constitution de la réserve nécessaire à la réalisation des projets des agriculteurs et des pêcheurs qui a lieu au cours des mois de mars, avril et mai. Il n'y a donc pas de conflit pour l'appropriation de l'eau. C'est ce qui permet une formalisation en termes de pur jeu de coûts de construction de barrages de capacités de retenues différentes et de caractéristiques techniques également différentes.

alternateurs, l'autre d'une capacité de 5400, coût qui devrait être engagé si, d'une part, la compagnie d'électricité agissait seule et si, d'autre part, le syndicat d'agriculteurs et l'association des pêcheurs agissaient de façon coordonnée. A fortiori, le coût de construction du grand barrage équipé pour produire l'électricité est moindre que le coût de construction des trois barrages qu'il faudrait édifier si les trois agents devaient mettre en oeuvre, chacun séparément, leurs projets.

Le partage des coûts du barrage entre les différents objectifs, pour des fins de tarification ou simplement de transparence, pourrait être réalisé à l'aide des méthodes discutées ci-dessus et présentées de manière plus élaborée dans le chapitre suivant.

1.3 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre un ensemble d'arguments à l'effet que les organisations, entendues au sens large et tant publiques que privées, auraient intérêt à investir des ressources dans l'apprentissage de méthodes de partage de coûts communs plus rigoureuses, plus efficaces, plus équitables et plus incitatives que celles couramment utilisées. Nous croyons qu'un tel investissement contribuerait à la maximisation de la valeur des ressources ou infrastructures communes, qu'elles soient privées ou publiques. Nous avons insisté sur l'importance de cette démarche dans un contexte économique où le développement d'infrastructures communes est omniprésent et conditionne les gains d'efficacité, devenus eux-mêmes la véritable pierre angulaire de la compétitivité.

Nous avons brièvement présenté certaines méthodes de partage de coûts (Shapley-Shubik, nucléole, règle séquentielle, ECPR, Ramsey-Boiteux, GPC). L'étude de ces méthodes, susceptibles de mieux "valoriser" les infrastructures communes, est poursuivie plus en profondeur dans les chapitres qui suivent. Nous avons également caractérisé, tout aussi brièvement, l'application possible de ces méthodes à neuf problèmes ou exemples. Ces exemples sont représentatifs d'un ensemble beaucoup plus vaste d'applications possibles.

En conclusion, nous voudrions insister encore une fois sur le rôle de ces méthodes au sein des organisations. Une bonne compréhension de la nature et des propriétés des diverses règles de partage des coûts, ou encore de partage des bénéfices, peut faciliter la coordination et la coopération des partenaires et l'acceptation par ces derniers d'une règle ou d'un ensemble restreint de règles de partage des coûts ou de tarification d'une infrastructure commune. Dans plusieurs cas, la détermination et l'acceptation d'une règle de partage des coûts communs représentent des freins majeurs à la poursuite d'un projet d'alliance qui pourrait être bénéfique à toutes les parties. La recherche et l'application de règles efficaces, équitables et incitatives, permettraient de réduire sensiblement les conflits explicites ou implicites lors des négociations entre les parties. Ainsi, les règles de partage des coûts, dont nous avons illustré les possibilités d'application dans ce chapitre, pourraient s'avérer être non seulement des outils puissants capables de faciliter les négociations entre les parties mais aussi des sources importantes de gains d'efficacité socio-économique.

Références

Armstrong, Mark, Chris Doyle et John Vickers (1996), "The Access Pricing Problem : A Synthesis," PURC-IDEI-CIRANO Conference (Montréal 1995), *The Journal of Industrial Economics*, 44, 131-150.

Baumol, William J. (1983), "Some Subtle Issues in railroad Regulation," *International Journal of Transport Economics*, 10, 341-355.

Baumol, William J. et Gregory Sidak (1994), *Towards Competition in Local Telephony,* MIT Press.

Boiteux, Marcel (1956), "Sur la gestion des monopoles publics astreints à l'équilibre budgétaire," *Econometrica,* 24, 22-40.

Boyer, Marcel et Jacques Robert (1998), "Competition and Access in Electricity Markets : ECPR, Global Price Cap and Auctions," in G. Zaccour (ed.), *Deregulation of Electric Utilities*, Kluwer Academic Pub.

Laffont, Jean-Jacques et Jean Tirole (1994), "Access Pricing and Competition," *European Economic Review,* 38, 1673-1710.

LeGallo, Véronique (1998), "Compulsory Competitive Tendering : L'expérience britannique," CIRANO 1998RP-06, Montréal.

Owen, G. (1982), *Game Theory*, San Diego, CA : Academic Press.

Ramsey, Frank P. (1927), "A Contribution to the Theory of Taxation," *The Economic Journal,* 37, 47-61.

Sidak, Gregory [editor] (1994), *Reforming Postal Regulation*, American Enterprise Institute, New York.

Sirois, Charles et Claude Forget (1995), *Le medium et les muses,* Éditions Renouf, Montréal.

Willig, Robert D. (1979), "The Theory of Network Access Pricing," in H.M. Trebing (ed.) *Issues in Public Policy Regulation,* Michigan State University Press, East Lansing.

Young, H.P., (1994), "Cost Allocation", in R.J.Aumann et S. Hart, eds, *Handbook of Game Theory, Vol. II,* North-Holland : Amsterdam, chap. 34, 1191-1235.

Chapitre 2

Méthodes de partage de coûts : un survol

2.1 Introduction

Dans le chapitre 1, on a insisté sur l'omniprésence des problèmes de partage de coûts dans nos sociétés modernes. On l'a illustré avec plusieurs exemples concrets. On a également présenté succinctement trois méthodes de partage dans le cadre de deux problèmes concrets. Dans le présent chapitre, on entreprend une présentation systématique des méthodes de partage qu'on retrouve dans la littérature économique. On les regroupe en trois catégories : les règles de proportionnalité, celles qui sont inspirées de la théorie des jeux coopératifs et celles de répartition séquentielle (serial cost sharing).

On commence par définir le problème de la répartition des coûts communs de la manière la plus générale possible. Un problème peut impliquer des clients d'une entreprise ou d'un organisme quelconque, les divisions d'une entreprise, les partenaires d'un projet, les missions d'un organisme, les divers usages d'un équipement, etc. On les désignera sous le terme générique d'*entités*. Ces dernières ont des besoins qui peuvent porter sur un ou plusieurs biens, qui peuvent être différents d'une entité à l'autre, et qui peuvent être publics ou privés. Ces besoins peuvent aussi porter sur les caractéristiques d'un équipement, pourvu qu'ils puissent être représentés par des nombres réels, un par caractéristique. Ce problème très général est illustré par un exemple fictif, celui d'un gazoduc qui relierait le Saguenay-Lac-Saint-Jean et la Beauce à Montréal, en passant par Québec, capable de desservir ces trois régions. Chacune des méthodes présentées est illustrée à l'aide de cet exemple.

Le problème de la répartition des coûts communs est défini dans la prochaine section. Les méthodes de répartition sont présentées dans la section 2.3. Les notations sont introduites au fur et à mesure des besoins. On trouve un récapitulatif et certains détails plus techniques en annexe.

L'analyse rigoureuse des règles de partage de coûts et la diversité de ces règles montrent qu'il n'y a pas une règle universellement appropriée, qui pourrait être appliquée dans toute situation. Le choix d'une méthode en particulier devrait se faire en fonction de l'ensemble des propriétés qu'elle satisfait. Il est donc important de s'assurer d'une bonne compréhension de la nature et des propriétés des diverses règles. Elle pourra faciliter la coordination des partenaires dans l'acceptation d'un ensemble restreint de règles de partage. L'étude des propriétés des règles fait l'objet du chapitre 3.

2.2 Le problème de la répartition des coûts communs

On suppose qu'il y a n *entités* concernées par un projet bien défini. Ces entités sont repérées par un indice i (parfois j lorsqu'il faut distinguer entre deux entités). Elles forment un ensemble $N = \{1, \ldots, n\}$. Ces entités ont des besoins, généralement différents, qui peuvent prendre des formes diverses. Dans certains cas, les besoins ou demandes peuvent être exprimés par un nombre réel. On examine d'abord ce cas. On présente ensuite le cas plus général où les demandes, plus complexes, sont exprimées sous forme de suites ou vecteurs de paramètres.

2.2.1 Les demandes

Dans les situations les plus simples, les besoins des n entités portent sur un même bien privé homogène. Elles peuvent être représentées par des nombres réels non négatifs $q_1, \ldots, q_n$. On convient alors d'indicer les entités par ordre croissant de leurs besoins : $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n$. On désigne ces quantités par le vecteur $Q = (q_1, \ldots, q_n)$. La demande totale est donnée par $\sum_{i=1}^{n} q_i$. On dit alors que les *demandes sont unidimensionnelles.*

De façon plus générale, les besoins ou demandes des entités comportent plusieurs caractéristiques qui peuvent être communes ou propres aux entités. On suppose que la demande de l'entité i peut être décrite à l'aide de m_i caractéristiques, par exemple la hauteur, la largeur et la longueur d'un tunnel ou les volumes de gaz requis respectivement en été et en hiver. On suppose de plus que ces caractéristiques peuvent être représentées par des nombres réels non-négatifs. La demande de l'entité i peut donc être représentée par un vecteur $q_i = (q_{i1}, \ldots, q_{im_i})$ dont les éléments sont les valeurs des différentes caractéristiques de cette demande.

On pose $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$. La suite des demandes des différentes entités est notée $Q = (q_1, \ldots, q_n) = (q_{11}, \ldots, q_{1m_1}, \ldots, q_{n1}, \ldots, q_{nm_n})$. Il s'agit d'une suite de m nombres. Dans la mesure où les biens peuvent avoir un caractère public, la demande globale n'est plus nécessairement donnée par la sommation des demandes individuelles, qui peuvent d'ailleurs comporter des nombres de biens différents d'une entité à l'autre. On parle de *demandes multidimensionnelles* pour ce contexte plus général.[1]

Comme exemples de cette classe plus générale de problèmes, mentionnons :

- la construction d'un réservoir hydraulique dont les différents usages exigeraient normalement des capacités et des configurations fort différentes,

[1] Pour plus de détails sur la représentation de ce type de demandes, voir Téjédo et Truchon (2002).

– la construction d'une route dont la capacité portante de la chaussée et la taille des viaducs sont largement déterminées par la nécessité d'acheminer un trafic de poids lourds, alors que le seul trafic automobile n'exigerait que des ouvrages plus légers,
– la construction d'un réseau de distribution (gaz, électricité, communications, routes) dans lequel les capacités peuvent différer d'un segment à l'autre alors que les demandes peuvent différer d'une période à une autre ainsi que d'un segment à un autre.

Dans ce chapitre, on suppose que la demande Q est donnée une fois pour toutes, c'est-à-dire qu'elle est inélastique. On se place aussi dans un contexte où les entités n'ont pas d'autre choix que de se mettre ensemble pour répondre à leurs besoins, que ce soit pas intérêt ou décret. De plus, l'ampleur des besoins d'une entité n'est pas affectée par la part du coût qui lui est éventuellement imputée. Bon nombre de situations se présentent de cette façon dans la réalité.

2.2.2 Fonctions de coût

La formulation du problème est complétée par l'introduction d'une fonction de coût, c'est-à-dire d'une règle qui attribue des coûts aux valeurs possibles des demandes. Cette fonction est notée C. De façon précise, on désigne par $C(Q)$ le coût de satisfaire à une demande Q.

On aura aussi besoin des coûts des demandes de sous-ensembles d'entités S. Comme C est défini sur l'ensemble des suites Q, qui sont de dimension m, il faut mettre les demandes individuelles et celles de tout sous-ensemble d'entités sous cette forme pour pouvoir leur appliquer C. On représente la demande d'un sous-ensemble S d'entités par Q^S, qui est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes, autres que celle des entités de S, sont ramenées à 0. Le coût de satisfaire uniquement aux demandes des entités de S est donc $C\left(Q^S\right)$. Comme cas particulier, on a $C\left(Q^{\{i\}}\right)$, qui est le *coût de faire cavalier seul*. En fait, on aura besoin du coût de faire cavalier seul pour différentes demandes Q. Aussi, on définit les fonctions de coût de faire cavalier seul pour les différentes entités. Elles sont notées c_i et définies par :

$$c_i\left(q_i\right) = C\left(Q^{\{i\}}\right),\ i = 1, \ldots, n$$

où q_i est, rappelons-le, la composante de Q qui concerne l'entité i. On suppose que C est non décroissante. Une augmentation de la demande de la part d'une ou plusieurs entités ne peut entraîner une diminution de coût. Elle pourrait cependant laisser les coûts inchangés. C'est le cas s'il est possible de répondre à une plus grande demande de la part d'une entité sans changer la production. Par contre, on suppose que la fonction C induit des fonctions c_i croissantes.

Il peut y avoir plusieurs façons de satisfaire à une demande, c'est-à-dire de traduire une demande en un projet commun. Différents projets peuvent avoir des coûts différents. Le nombre $C(Q)$ doit s'entendre comme le coût du projet qui permet de répondre aux besoins exprimés de la manière la moins coûteuse possible. Ce meilleur projet peut changer avec la demande elle-même et les conditions du marché comme les prix. Rappelons-nous cependant qu'on suppose Q donné.

On désigne par $\alpha(Q)$ un projet capable de répondre à la demande Q et par $A(Q)$ l'ensemble de tous ces projets. Un projet $\alpha(Q)$ est généralement défini par une liste de caractéristiques qui peuvent plus ou moins correspondre à celles qui servent à exprimer les demandes. La fonction α peut aussi être vue comme une fonction d'agrégation des demandes des entités en demande globale. Soit $c(\alpha(Q))$ le coût d'un projet $\alpha(Q)$. La fonction de coût est alors définie par :

$$C(Q) = \min_{\alpha(Q)\in A(Q)} c(\alpha(Q))$$

Un cas particulier est celui où les demandes des entités portent toutes sur une même liste de biens privés. La fonction α est alors définie de façon unique par $\alpha(Q) = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Autrement dit, la demande globale est la somme des demandes individuelles. La fonction C est alors de la forme :

$$C(Q) = c\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)$$

et on dit qu'elle est *homogène*.

Un autre cas particulier est celui où les entités demandent encore les mêmes biens mais où ces derniers sont des *biens publics purs*. La quantité consommée par une entité ne restreint pas la consommation des autres. La fonction α est encore définie de façon unique, cette fois par $\alpha(Q) = (\max_i y_{i1}, \ldots, \max_i y_{ik})$ où k est le nombre de ces biens. Autrement dit, la quantité à produire de chaque bien est la quantité maximale demandée par les entités. C est alors de la forme :

$$C(Q) = c\left(\max_i y_{i1}, \ldots, \max_i y_{ik}\right)$$

La dérivée de la fonction C par rapport à un de ses arguments, lorsqu'elle existe, est le *coût marginal* de la quantité correspondante. Pour des changements discrets de quantité, on parlera plutôt de *coût incrémental.* Par exemple, $C\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - C\left(Q^S\right)$ est le coût incrémental de l'ajout de la demande de l'entité i à celles des entités de S.

2.2.3 Règle de répartition

Une règle de répartition est une fonction x qui, pour toute demande Q et toute fonction de coût C, spécifie la part du coût $C(Q)$ supportée par les différentes entités. On note $x_i(Q,C)$ la charge imputée à l'entité i et $x(Q,C)$ la liste de ces dernières :

$$x(Q,C) = (x_1(Q,C), \ldots, x_n(Q,C))$$

Une règle de répartition satisfait normalement : $\sum_{i=1}^{n} x_i(Q,C) = C(Q)$. Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on peut écrire x_i pour $x_i(Q,C)$.

2.2.4 Exemple

Pour illustrer les définitions qui précèdent et les méthodes de répartition qui vont suivre, on introduit un exemple fictif. Imaginons la construction d'un gazoduc qui relierait le Saguenay-Lac-Saint-Jean et la Beauce à Montréal, en passant par Québec, capable de desservir ces trois régions. On suppose qu'il y a deux périodes dans l'année : l'été et l'hiver. La consommation peut être différente selon la période mais elle est supposée uniforme à l'intérieur d'une même période. On pourrait évidemment augmenter le nombre de périodes pour tenir compte d'un plus grande hétérogénéité dans la consommation. Deux périodes sont cependant suffisantes pour illustrer le propos. Les demandes des trois régions pour chacune des périodes, en mètres cubes, apparaissent dans le tableau qui suit :

Indice	Région	été	hiver
1	Beauce	12	16
2	Saguenay	9	0
3	Québec	25	49
	Total	46	65

On peut voir le Saguenay comme une région où tous les clients souscrivent à un service interruptible. On leur coupe l'approvisionnement durant l'hiver pour pouvoir desservir complètement les deux autres régions. Il faut donc deux nombres pour décrire la demande de chaque région. Plus précisément, la demande de la région i est décrite par un couple (q_{i1}, q_{i2}) où les indices 1 et 2 représentent respectivement l'été et l'hiver. L'ensemble des demandes est donc donné par la liste qui suit :

$$Q = ((q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22}), (q_{31}, q_{32})) = ((12, 16), (9, 0), (25, 49)) \tag{2.1}$$

On suppose que le gaz puisse être acheminé directement de Montréal vers la Beauce ou passer par Québec. Quant au gaz destiné au Saguenay, il doit nécessairement passer par Québec. La configuration possible du réseau est représentée dans la Figure 2.1. Les lettres M, Q, B et C sont les initiales des villes ou régions concernées.

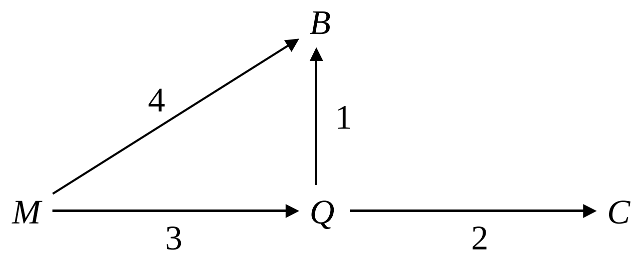


Figure 2.1 – Les sections possibles du réseau

Un gazoduc capable de desservir ces trois régions comprend donc trois ou quatre sections dont les longueurs apparaissent dans le tableau qui suit :

	Section	longueur
1	Beauce-Québec	100 km
2	Saguenay-Québec	250 km
3	Québec-Montréal	250 km
4	Beauce-Montréal	270 km

Formellement, un réseau peut être représenté par un quadruplet $\alpha(Q) = (\alpha_1(Q), \alpha_2(Q), \alpha_3(Q), \alpha_4(Q))$ dont les éléments spécifient la capacité de chaque segment, en fonction de la demande Q. On suppose que le coût marginal de la capacité d'un conduit est décroissant. Cela implique qu'une seule des sections 1 et 4 doit être utilisée si on veut minimiser les coûts. Selon la demande, la première ou la quatrième composante du quadruplet sera donc nulle. Il y a donc deux façons de répondre aux besoins exprimés, c'est-à-dire deux réseaux possibles. On note $\alpha^1(Q)$ le réseau qui ne comprend pas la section 4 et $\alpha^2(Q)$ celui qui ne comprend pas la section 1. Autrement dit, $A(Q) = \left\{\alpha^1(Q), \alpha^2(Q)\right\}$.

La capacité du premier réseau possible est donnée par :

$$\alpha^1(Q) = \left(\max\{q_{11},\ q_{12}\},\ \max\{q_{21},\ q_{22}\},\ \max\left\{\sum_{i=1}^{3} q_{i1},\ \sum_{i=1}^{3} q_{i2}\right\},\ 0\right) \tag{2.2}$$

Les capacités sur les tronçons 1 et 2 doivent être suffisantes pour transporter la plus grande quantité demandée respectivement par la Beauce et le Saguenay en cours d'année. De plus, la section Québec-Montréal doit avoir une capacité suffisante pour satisfaire à la demande maximale des trois régions au cours de l'année.

De façon similaire, la capacité du deuxième réseau possible est donnée par :

$$\alpha^2(Q) = \left(0,\ \max\{q_{21},\ q_{22}\},\ \max\left\{\sum_{i=2}^{3} q_{i1},\ \sum_{i=2}^{3} q_{i2}\right\},\ \max\{q_{11},\ q_{12}\}\right)$$

On définit la fonction de coût c d'un réseau de la manière suivante. Pour simplifier les choses, on suppose que les gazoducs soient carrés plutôt que ronds. Pour transporter un volume v, il faut donc un tuyau dont la hauteur et la largeur est égale à $\sqrt{v}$. Une section de longueur ℓ_s et de capacité α_s va donc exiger une quantité de matériel égale à $4000 \times \ell_s \times \sqrt{\alpha_s}$, en mètres carrés.[2] On suppose que le matériel coûte 1 \$ le mètre carré et qu'il s'agit du seul élément de coût. En particulier, les coûts de construction sont les mêmes pour toutes les sections de même taille, peu importe la région. On pourrait facilement avoir des coûts particuliers pour chacune des sections et leur ajouter des coûts fixes. Cela ne changerait pas grand chose aux illustrations qui vont être faites avec cet exemple. Comme les longueurs des trois sections sont respectivement 100, 250, 250 et 270 km, la fonction de coût, en milliers de dollars, est donc définie ainsi. Pour tout réseau $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$:

$$c(\alpha) = 4 \times [100\sqrt{\alpha_1} + 250\sqrt{\alpha_2} + 250\sqrt{\alpha_3} + 270\sqrt{\alpha_4}] \tag{2.3}$$

Quant à la fonction C, elle est définie par :

$$C(Q) = \min\left\{c\left(\alpha^1(Q)\right), c\left(\alpha^2(Q)\right)\right\}$$

c'est-à-dire par le plus petit des coûts des deux réseaux. Cela donne :

$$C(Q) =$$
$$\min\left\{\left[400\sqrt{\max\{q_{11}, q_{12}\}} + 1000\sqrt{\max\{q_{21}, q_{22}\}} + 1000\sqrt{\max\left\{\sum_{i=1}^{3} q_{i1}, \sum_{i=1}^{3} q_{i2}\right\}}\right],\right.$$
$$\left.\left[1000\sqrt{\max\{q_{21}, q_{22}\}} + 1000\sqrt{\max\left\{\sum_{i=1}^{3} q_{i1}, \sum_{i=1}^{3} q_{i2}\right\}} + 1080\sqrt{\max\{q_{11}, q_{12}\}}\right]\right\}$$

[2]Il faut multiplier par 4 pour les 4 côtés et par 1000 parce qu'il y a 1000 mètres dans un Km.

Si on applique ces formules à la demande définie en (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha^1(Q) &= (16, 9, 65, 0) \\ \alpha^2(Q) &= (0, 9, 65, 16) \end{aligned}$$

et

$$c\left(\alpha^1(Q)\right) = 12662.26 \qquad c\left(\alpha^2(Q)\right) = 14320.00$$

ce qui donne : $C(Q) = 12662.26$.

Dans la suite de ce chapitre, on suppose qu'il y a un seul réseau possible, soit le réseau $\alpha^1(Q)$, qu'on notera simplement $\alpha(Q)$. On laisse d'ailleurs tomber l'indice supérieur qui identifie ce réseau. Cela va simplifier les calculs sans altérer la portée des exemples. Tout au plus y aura-t-il augmentation de la part de la Beauce avec les méthodes qui font intervenir le coût de faire cavalier seul. En effet, lorsque la Beauce est seule, il lui en coûterait moins cher de construire un tronçon direct vers Montréal plutôt que de passer par Québec, une possibilité qui est éliminée avec l'abandon de $\alpha^2(Q)$.

2.3 Les méthodes de répartition

On peut distinguer au moins trois grandes classes de méthodes de répartition des coûts. Elles font l'objet des trois sous-sections qui suivent. Dans la première, on retrouve les méthodes qui consistent à répartir la totalité ou une partie des coûts selon une règle de proportionnalité, à partir de critères plus ou moins ad hoc. Elles sont parfois motivées par certaines considérations éthiques. On peut multiplier à l'infini ce genre de méthodes en variant la partie des coûts qui font l'objet de la répartition proportionnelle et les critères de cette répartition. Ce sont les plus anciennes de toutes les méthodes de répartition et sans doute celles qui sont encore le plus utilisées. Plusieurs raffinements de ces méthodes ont été suggérées dans des revues de comptabilité, entre autres par Moriarity (1975), Louderback (1976), Balachandran et Ramakrishnan (1981). Elles sont présentées sous le titre de méthodes comptables.

La deuxième catégorie de méthodes est empruntée à la théorie des jeux coopératifs. Dans cette catégorie, on retrouve le concept de coeur, la valeur de Shapley, le nucléole et les tarifs à la Aumann-Shapley. Ces derniers sont donnés par la somme (l'intégrale) des coûts marginaux le long d'un rayon allant de l'origine au point qui représente la demande. L'idée est généralisée à d'autres types de sentier et à des changements discrets.

La troisième catégorie de méthodes est beaucoup plus récente. Elle comprend les règles dites de répartition séquentielle (serial cost sharing). Ce type de règle a été proposé pour la première fois par Shenker (1990) pour les demandes unidimensionnelles. Il a été l'objet d'une abondante littérature depuis. Moulin et Shenker (1992, 1994) en ont fait une analyse extensive. Koster et al. (1998) l'ont étendu au contexte où les agents demandent plusieurs biens privés homogènes. Sprumont (1998) l'a étendue au contexte où chaque agent demande un bien qui lui est spécifique. Téjédo et Truchon (2000 et 2002) poussent la généralisation au contexte multidimensionnel décrit à la section 2.2.

2.3.1 Les règles de proportionnalité

Certaines des règles qu'on va examiner font intervenir les éléments de $C(Q)$ qui peuvent être attribués directement aux différentes entités i. On les notera $ca_i(Q)$ et on les appellera *coûts attribuables*. Il ne faut pas confondre ces coûts avec ceux de faire cavalier seul, c'est-à-dire $c_i(q_i)$. Ceci nous amène à définir les *coûts communs* par :

$$cc(Q) = C(Q) - \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q)$$

On aura également besoin du *coût incrémental* de desservir l'entité i en plus des autres dans N, lequel est défini par :

$$cm_i(Q) = C(Q) - C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$$

Dans certains cas, on peut avoir $ca_i(Q) = 0$ pour tout i et donc $cc(Q) = C(Q)$. Le tableau qui suit donne ces différents coûts pour l'exemple du gazoduc. Chaque $ca_i(Q)$ est simplement le coût de la section du gazoduc qui est utilisée exclusivement par la région i. Les autres éléments de coût sont calculés à l'annexe 2.A.3.

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
$c_i(q_i)$	5600	6000	7000	18600
$ca_i(Q)$	1600	3000	0	4600
$cm_i(Q)$	2662.30	3000	3479.68	
$cc(Q)$				8062.26
$C(Q)$				12662.26

Un très grand nombre de méthodes utilisées en pratique et d'autres qui ont été envisagées consistent à exiger une contribution de base xb_i de l'entité i et à répartir le résidu du coût total du projet, une fois soustraites les contributions de base, entre toutes les entités, proportionnellement aux valeurs d'une certaine variable t_i. La formule générale prend donc la forme :

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j}\left(C(Q) - \sum_{j=1}^n xb_j\right) \tag{2.4}$$

Il est à noter que le résidu $C(Q) - \sum_{j=1}^n xb_j$ peut être positif ou négatif.

Par le choix des xb_i et des t_i, on peut obtenir autant de règles que l'on veut. En posant $xb_i = 0$ et $t_i = 1$ pour tout i, ce sont les coûts totaux qui sont répartis de façon égalitaire entre les entités :

$$x_i = \frac{1}{n}C(Q)$$

Certaines règles poussent la sophistication jusqu'à décomposer le terme $C(Q) - \sum_{j=1}^n xb_j$ de (2.4) en plusieurs composantes, disons $\left(C(Q) - \sum_{j=1}^n xb_j\right)_s$, et à répartir chacune de ces composantes selon un critère t_i^s qui lui est propre. Ainsi, la *Formule du Massachusetts* (Biddle et Steinberg, 1985) consiste à répartir le tiers des coûts communs d'une entreprise entre ses divisions, proportionnellement aux ventes s_i des divisions i, un deuxième tiers proportionnellement aux actifs a_i et le troisième tiers proportionnellement aux nombres d'employés e_i. Cela revient à poser $xb_i = ca_i(Q)$ et à remplacer $\frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j}$ dans (2.4) par :

$$\left(\frac{s_i}{3\sum_{j=1}^n s_j} + \frac{a_i}{3\sum_{j=1}^n a_j} + \frac{e_i}{3\sum_{j=1}^n e_j}\right)$$

Inutile de dire qu'une telle règle ne possède aucune justification théorique.

La règle des coûts moyens

Il s'agit sans doute de la méthode la plus répandue et la plus simple. Elle s'applique à la classe générale de problèmes où les demandes sont homogènes et représentées par des nombres non-négatifs q_i. Elle consiste à répartir les coûts totaux ou une partie des coûts selon les quantités demandées. Chaque entité paie un montant qui est le produit de sa demande et du coût moyen. Autrement dit, elle est tarifée au coût moyen. Cette méthode est définie formellement par :

$$x_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j}C(Q) = q_i\frac{c\left(\sum_{j=1}^n q_j\right)}{\sum_{j=1}^n q_j} \tag{2.5}$$

Il s'agit clairement d'un cas particulier de la formule (2.4).

Cette règle ne peut évidemment pas être utilisée dans le cas des demandes hétérogènes ou multidimensionnelles. Certaines des autres règles de proportionnalité peuvent être vues comme des généralisations de la règle des coûts moyens. De façon générale, il s'agit de remplacer les q_i dans (2.5) par des fonctions numériques h_i de q_i. Cela donne :

$$x_i = \frac{h_i\left(q_i\right)}{\sum_{j=1}^{n} h_j\left(q_j\right)} C\left(Q\right) \tag{2.6}$$

Ainsi, on verra que la méthode de Moriarity, présentée ci-dessous, revient à poser $h_i\left(q_i\right) = c_i\left(q_i\right)$ pour chaque entité, c'est-à-dire à répartir le coût total proportionnellement aux coûts de faire cavalier seul. Un autre choix possible pour $h_i\left(q_i\right)$ est le coût marginal de la demande de l'entité i. La *répartition proportionnelle aux coûts marginaux* qui en résulte est présentée de façon formelle à la sous-section 2.3.2.

Dans l'exemple du gazoduc, où les demandes sont multidimensionnelles, on pourrait songer à répartir le coût total en fonction de variables comme la demande de pointe, la demande maximale, la demande moyenne, le coût de faire cavalier seul ou une combinaison de plusieurs de ces critères, c'est-à-dire appliquer des critères différents à différentes portions du coût total. Il s'agit d'autant de formes différentes de h_i.

Ces critères sont évidemment arbitraires et il est difficile d'en choisir un plutôt qu'un autre. Alors que la règle de tarification au coût moyen possède des propriétés intéressantes, ce n'est pas le cas d'une règle plus générale comme (2.6), sauf peut-être pour la répartition proportionnelle aux coûts marginaux. Si on veut une généralisation de la tarification au coût moyen, il faut plutôt regarder du côté de la méthode Aumann-Shapley présentée ci-dessous et qui possède des propriétés intéressantes.

La méthode des bénéfices résiduels

Cette méthode a été proposée pour répartir les coûts des bassins hydrauliques à usages multiples. Son origine remonte aux travaux de la Tennessee Valley Authority en 1938, bien que cette agence se défendait bien de vouloir utiliser une formule mathématique. La méthode, connue aujourd'hui sous le nom de *méthode des bénéfices résiduels*, est un raffinement de celle que cette agence avait conçue pour son propre usage. Elle a été utilisée par le Japon, au moins jusqu'en 1985, pour le partage des coûts de ses réservoirs hydrauliques.[3]

[3] À ce sujet, voir Ransmeier (1942) et Okada (1985).

La méthode est obtenue en posant $xb_i = c_i(q_i)$ et $t_i = c_i(q_i) - cm_i(Q)$ dans la formule (2.4), ce qui donne :

$$x_i = c_i(q_i) - \frac{c_i(q_i) - cm_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n}(c_j(q_j) - cm_j(Q))}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q)\right) \tag{2.7}$$

Elle consiste à faire payer à chaque entité son coût de faire cavalier seul et à redistribuer le surplus ainsi généré au prorata des différences entre coûts de faire cavalier seul et coûts incrémentaux. D'aucuns y ont vu la recherche d'une forme d'équité, ce qui n'est pas évident. Les facteurs de proportionnalité n'étant pas définis lorsque $c_i(q_i) = cm_i(Q)\ \forall i$, on pose alors $x_i = c_i(q_i)$.

Exemple 2.1 Dans le cas du gazoduc, la méthode des bénéfices résiduels donne la répartition suivante :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3755.69	4116.61	4789.95	12662.26
%	30	32	38	100

Les méthodes comptables

Entre 1975 et 1981, on a vu apparaître des propositions de méthodes de répartition proportionnelle dans des revues de comptabilité. On en a recensé trois, qui sont présentées sous le titre de méthodes comptables.

La première a été proposée par Moriarity (1975). Elle consiste à faire payer une contribution de base qui est égale au plus petit des montants $c_i(q_i)$ et $ca_i(Q) + cc(Q)$, noté w_i, et à redistribuer le surplus qui serait généré de cette façon au prorata des w_i. On l'obtient en posant $xb_i = t_i = w_i$ ou, de façon équivalente, $xb_i = 0$ et $t_i = w_i$ dans (2.4), ce qui donne :

$$x_i = w_i + \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}\left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} w_j\right) = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j} C(Q)$$

Dans le cas où $c_i(q_i) \leq ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tous les i, elle revient à partager le coût total au prorata des $c_i(q_i)$.

Moriarity voyait les quatre avantages suivants à sa méthode : elle favorise la participation à un projet commun dans la mesure où ce projet peut amener une réduction des coûts totaux. Chaque entité participe à la réduction des coûts totaux. Aucune entité n'est subventionnée par les autres. Elle incite les entités à chercher à minimiser le coût de faire cavalier seul. Il faut cependant noter que, si le coût de faire cavalier seul est une information privée, les entités sont incitées à prétendre que ces coûts sont plus faibles qu'ils ne le sont en réalité.

Exemple 2.2 Dans le cas du gazoduc, on a $w_i = c_i(q_i)$ pour tout i. La méthode de Moriarity consiste donc à répartir les coûts totaux selon les coûts de faire cavalier seul. Elle donne :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3812.29	4084.60	4765.37	12662.26
%	30	32	38	100

La méthode de Moriarity peut imputer à une entité une contribution inférieure à $ca_i(Q)$, la partie du coût dont elle est directement responsable. On peut donc mettre en doute le deuxième avantage que Moriarity voyait à sa méthode, à savoir qu'aucune entité n'est subventionnée. Tout dépend évidemment de ce que l'on entend par subvention. Il résulte de cette possibilité que les autres entités peuvent avoir intérêt à exclure l'entité subventionnée et à réaliser seules le projet, même en supposant que $cc(Q)$ va rester inchangé après l'exclusion.[4]

Pour remédier à ce défaut de la méthode de Moriarity, Louderback (1976) a proposé de modifier cette dernière en posant $xb_i = ca_i(Q)$ et $t_i = c_i(q_i) - ca_i(Q)$ dans (2.4), ce qui donne :

$$x_i = ca_i(Q) + \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n}(c_j(q_j) - ca_j(Q))} cc(Q)$$

Louderback suppose que $c_i(q_i) \geq ca_i(Q)$, ce qui est assez réaliste. Sa règle consiste à imputer à chaque entité une contribution de base égale aux coûts qui peuvent lui être attribués. On répartit ensuite $cc(Q)$ selon un critère qui donne d'autant plus de poids à une entité que son coût de faire cavalier seul est élevé par rapport aux coûts qui peuvent lui être attribués directement. On fait donc supporter une grande partie de $cc(Q)$ à ceux qui semblent gagner le plus de la réalisation conjointe du projet. Il n'existe plus de subvention d'une entité par une autre et aucun sous-ensemble d'entités n'a intérêt à exclure les autres du projet global. On pose $x_i = ca_i(Q)$ quand $c_i(q_i) = ca_i(Q)\ \forall i$.

[4] C'est dans cette perspective que Gangolly (1981) a proposé une extension de la méthode de Moriarity au contexte où des sous-coalitions peuvent se former parmi les entités.

Exemple 2.3 Dans le cas du gazoduc, la méthode de Louderback donne la répartition suivante :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3903.50	4727.63	4031.13	12662.26
%	31	37	32	100

Balachandran et Ramakrishnan (1981) ont proposé une variante à la méthode de Louderback. Comme dans cette dernière, on pose $xb_i = ca_i(Q)$ dans (2.4) mais $t_i = w_i - ca_i(Q)$, d'où :

$$x_i = ca_i(Q) + \frac{w_i - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n}(w_j - ca_j(Q))} cc(Q)$$

On peut observer que :

$$w_i - ca_i(Q) = \begin{cases} c_i(q_i) - ca_i(Q) & \text{si } c_i(q_i) \leq ca_i(Q) + cc(Q) \\ cc(Q) & \text{si } c_i(q_i) > ca_i(Q) + cc(Q) \end{cases}$$

si bien que, si $c_i(q_i) \leq ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tout i, comme dans l'exemple du gazoduc, cette méthode donne la même répartition que celle de Louderback. Si, au contraire, $c_i(q_i) > ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tout i, elle donne $x_i = ca_i(Q) + \frac{1}{n} cc(Q)$. On pose $x_i = ca_i(Q)$ quand $w_i = ca_i(Q)$ $\forall i$.

2.3.2 Les méthodes inspirées de la théorie des jeux coopératifs

Le point de départ des méthodes présentées dans cette sous-section est la théorie des jeux coopératifs. Un jeu est une situation où plusieurs agents interagissent ou collaborent entre eux. Beaucoup de comportements économiques tombent dans cette catégorie, au même titre que les jeux proprement dits. L'objet de la théorie des jeux est l'étude de ce genre de situation. On distingue deux sortes de jeux : les jeux non-coopératifs et les jeux coopératifs. C'est à ce dernier type de jeu qu'on s'intéresse.

Un jeu coopératif met en relation un ensemble de joueurs N. Ces joueurs peuvent former des coalitions plus ou moins grandes. Formellement, les coalitions possibles sont les sous-ensembles S de N. Les coalitions obtiennent des gains qui résultent de la coopération de leurs membres. La description d'un jeu coopératif comprend donc une règle g qui définit les gains $g(S)$ que peuvent réaliser les différentes coalitions S une fois formées. La théorie des jeux coopératifs s'intéresse aux répartitions, c'est-à-dire au partage des gains entre les joueurs.

Le problème de la répartition des coûts communs peut être vu comme un jeu coopératif, appelé *jeu de coût*. Les entités de l'ensemble N sont les joueurs. Ils peuvent, par la coopération, réaliser des gains sous forme de réduction de coût. On peut cependant aborder ce jeu sous l'angle de la répartition des coûts plutôt que des gains. C'est l'approche adoptée ici.

Parmi les règles de répartition proposées pour les jeux coopératifs, la plus fréquemment utilisée est celle qu'a définie Shapley (1953), connue sous le nom de *valeur de Shapley*. C'est Shubik (1962) qui a suggéré de l'appliquer aux jeux de coût. Une autre contribution marquante de la théorie des jeux coopératifs est celle de Aumann et Shapley (1974). Ils proposent une généralisation de la méthode Shapley-Shubik au cas où il y a une infinité de joueurs (entités), associés à une infinité de niveaux de production possibles. La méthode Aumann-Shapley consiste à imputer à chaque entité la somme (l'intégrale) des coûts marginaux liés à sa demande le long du rayon qui va de l'origine au point qui représente la demande globale.

On peut imaginer d'autres types de sentier le long desquels calculer et imputer des coûts marginaux ou incrémentaux. Ces différents sentiers donnent lieu à autant de méthodes de répartition de coûts. Par exemple, la règle Shapley-Shubik est une moyenne de somme de coûts incrémentaux associés à un déplacement le long de sentiers constitués de segments de droites parallèles aux différents axes et allant de l'origine au point qui représente la demande globale.

Les méthodes sont présentées dans un ordre qui correspond à des sentiers de plus en plus complexes. Comme la plupart des méthodes font intervenir la notion de coût marginal ou incrémental, on commence par la tarification au coût marginal. On introduit ensuite la méthode Aumann-Shapley. Devrait ensuite venir assez naturellement la classe plus générale des méthodes de tarification selon les coûts incrémentaux le long d'un sentier quelconque. La description de ces méthodes est cependant reléguée à l'annexe 2.A.5. La section proprement dite se poursuit avec la méthode Shapley-Shubik, qui est un autre cas particulier de cette catégorie générale. Elle se termine avec la présentation d'une autre méthode empruntée à la théorie des jeux coopératifs, soit le nucléole, et avec le concept de coeur qui vient également de cette théorie. Ce dernier est avant tout une propriété des répartitions plutôt qu'une méthode de répartition stricto sensu.

La tarification au coût marginal

On connaît l'importance que les économistes attachent à la tarification au coût marginal. La dernière unité d'un bien ou service devrait être vendue à un prix égal à la valeur des ressources supplémentaires requises pour sa production. C'est une règle qui doit être respectée pour maximiser le profit dans un contexte de concurrence parfaite. C'est aussi ce qu'exige l'utilisation et la répartition efficace des ressources pour l'ensemble de la société, pour autant que les coûts marginaux soient correctement définis. Ce mode de tarification pose cependant problème puisqu'il donne généralement un surplus ou laisse un déficit, sauf en cas de rendement à l'échelle constant.

On examine d'abord l'application de ce principe dans le contexte des demandes unidimensionnelles. Étant donné un vecteur de demandes $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ et la fonction de coût C, le tarif unitaire appliqué à chaque entité i devrait être égal au coût marginal de sa demande, c'est-à-dire au coût additionnel qu'entraîne la dernière unité demandée, en supposant les demandes des autres fixes. Dans le cas où les demandes sont parfaitement divisibles et où la fonction C est différentiable, le coût marginal est la dérivée partielle de C par rapport à son i^e argument, évaluée en Q. On la note $\partial_i C(Q)$. La tarification au coût marginal consiste à demander le montant $q_i\, \partial_i C(Q)$ à l'entité i.

La même formule est valable pour les demandes multidimensionnelles mais $\partial_i C(Q)$ doit maintenant être interprété comme le vecteur des dérivées partielles de C par rapport aux variables $q_{i1}, \ldots, q_{im_i}$:

$$\partial_i C(Q) = (\partial_{i1} C(Q), \ldots, \partial_{im_i} C(Q))$$

Le terme $q_i\, \partial_i C(Q)$ est donc maintenant le produit scalaire $\sum_{\ell=1}^{m_i} q_{i\ell}\, \partial_{i\ell} C(Q)$.

Le terme $q_i\, \partial_i C(Q)$ peut s'exprimer sous une autre forme. Pour un $Q \in \mathbb{R}_+^{nm}$ et une fonction C donnés, on définit d'abord la fonction $\hat{Q} : [0,1]^n \to \mathbb{R}_+^{nm}$ par :

$$\hat{Q}(\tau) = (\tau_1 q_1, \ldots, \tau_n q_n)$$

$\hat{Q}(\tau)$ est un nouveau vecteur de demandes obtenu en réduisant proportionnellement chacune des demandes originales q_i par le facteur τ_i, c'est-à-dire en multipliant chaque vecteur q_i par le nombre τ_i. L'argument τ est le vecteur des τ_i. On définit ensuite la fonction $\hat{C} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ par :

$$\hat{C}(\tau) = C\left(\hat{Q}(\tau)\right) = C(\tau_1 q_1, \ldots, \tau_n q_n)$$

En toute rigueur, il faudrait écrire $\hat{C}(\tau; Q, C)$ puisque cette fonction dépend évidemment de Q et C. Si les q_i sont des nombres réels (scalaires), cette définition revient simplement à changer les unités dans lesquelles les demandes sont exprimées pour des fractions des demandes originales. Avec des demandes multidimensionnelles, cela revient à se limiter à des changements proportionnels dans la demande de chaque agent. Il n'y a pas de perte de généralité pour autant puisque, en appliquant la règle de différentiation en chaîne, on obtient :

$$\partial_i \hat{C}(\tau) = q_i \, \partial_i C(\tau_1 q_1, \ldots, \tau_n q_n)$$

Avec cette nouvelle définition, la tarification au coût marginal consiste à demander le montant $\partial_i \hat{C}(1, \ldots, 1)$ à l'entité i. Cette formulation peut sembler complexe mais un exemple va démontrer la simplicité de son application.

Exemple 2.4 On considère la demande Q définie en (2.1) et on multiplie q_i par τ_i pour obtenir :

$$\hat{Q}(\tau) = ((12\tau_1, 16\tau_1), (9\tau_2, 0), (25\tau_3, 49\tau_3))$$

Si on applique les fonctions α et c, définies respectivement par (2.2) et (2.3), à $\hat{Q}(\tau)$, on obtient la fonction de coût $\hat{C}$:

$$\hat{C}(\tau) = 1600\sqrt{\tau_1} + 3000\sqrt{\tau_2} + 1000\sqrt{16\tau_1 + 49\tau_3} \tag{2.8}$$

Il s'agit ensuite de trouver les dérivées de cette fonction par rapport à chacun des τ_i et de les évaluer pour $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$. Cela donne les charges du tableau qui suit :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	1792.28	1500.00	3038.85	6331.13

Dans le cas présent, ce mode de tarification permet de couvrir uniquement 50 % du coût total. Il ne résout donc pas le problème de la répartition du coût total. On pourrait toujours le compléter avec une formule de répartition proportionnelle du déficit ou du surplus qu'implique ce mode de tarification. Autrement dit on pourrait utiliser une règle de la forme :

$$x_i(Q, C) = \partial_i \hat{C}(1, \ldots, 1) + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j \hat{C}(1, \ldots, 1) \right)$$

Il s'agit évidemment d'une règle de la forme (2.4). Appliquée aux données du gazoduc avec $t_i = 1$ pour tous les i (répartition égalitaire du déficit), elle donne les résultats suivants :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3902.65	3610.38	5149.23	12662.26
%	31	29	41	100

Il est difficile de donner une justification théorique à une telle règle. Un autre choix possible, et peut-être plus naturel, est $t_i = \partial_i \hat{C}(1,\ldots,1)$. Cela donne :

$$\begin{aligned} x_i(Q,C) &= \partial_i \hat{C}(1,\ldots,1) + \frac{\partial_i \hat{C}(1,\ldots,1)}{\sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1,\ldots,1)} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1,\ldots,1) \right) \\ &= \frac{\partial_i \hat{C}(1,\ldots,1)}{\sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1,\ldots,1)} C(Q) = \frac{\partial_i C(Q)\, q_i}{\sum_{j=1}^n \partial_j C(Q)\, q_j} C(Q) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la *répartition proportionnelle aux coûts marginaux.* Cette règle a été analysée par Wang (2002). Nous montrons dans le chapitre 3 qu'elle peut être caractérisée par un ensemble restreint de propriétés, à la manière des règles qui suivent. Appliquée à l'exemple du gazoduc, cette méthode donne la même répartition du coût total que la méthode Aumann-Shapley, vers laquelle on se tourne maintenant. Cela n'est cependant pas vrai de façon générale.

La tarification à la Aumann-Shapley

Aumann et Shapley (1974) ont proposé une solution élégante au problème du surplus ou du déficit qu'implique la tarification au coût marginal. On considère le vecteur $(\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n)$ où λ est un nombre réel. En faisant varier λ de 0 à 1, on obtient une infinité de telles suites, toutes proportionnelles entre elles. On calcule ensuite le coût marginal de chaque entité pour chaque demande $(\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n)$, c'est-à-dire pour chaque valeur de λ, et on fait la somme de ces coûts marginaux. En utilisant ces sommes comme tarifs unitaires, il n'y a ni surplus ni déficit, du moins s'il n'y a pas de coûts fixes.

En termes mathématiques, la somme de ces coûts marginaux est définie par leur intégrale entre 0 et 1. En multipliant cette intégrale pour l'entité i par la demande q_i, on obtient la part des coûts totaux imputée à l'entité i. Formellement, on a donc :

$$x_i(Q,C) = \int_0^1 q_i\, \partial_i C(\lambda Q)\, d\lambda \tag{2.9}$$

Cette intégrale est en fait la somme des coûts marginaux le long du rayon qui va de l'origine au point Q dans l'espace des demandes. Dans le cas des demandes unidimensionnelles pour un bien privé, cette règle est celle de la tarification au coût moyen.[5]

La formule (2.9) est également valable pour des demandes multidimensionnelles. Il s'agit d'interpréter $q_i\,\partial_i C$ comme un produit scalaire. Comme pour les coûts marginaux, on peut mettre la formule (2.9) sous la forme équivalente :

$$x_i(Q,C) = \int_0^1 \partial_i \hat{C}\,(\lambda,\ldots,\lambda)\,d\lambda$$

L'interprétation de la formule sous cette forme est intéressante. Non seulement les demandes de toutes les entités sont-elles réduites de façon proportionnelle dans le processus d'intégration mais, par définition de $\hat{C}$, le coût marginal de chaque entité est lui-même défini par rapport à des changements proportionnels de tous les éléments de sa demande.

La méthode Aumann-Shapley a été généralisée par Mirman, Samet et Tauman (1983) au cas où il y a un coût fixe CF à partager, le coût total étant alors la somme de ce coût fixe et du coût variable CV. La méthode Aumann-Shapley ne procède qu'au partage de CV. On a donc :

$$CV = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \partial_i \hat{C}\,(\lambda,\ldots,\lambda)\,d\lambda$$

La généralisation proposée par Mirman, Samet et Tauman (1983) consiste à répartir CF proportionnellement aux $\int_0^1 \partial_i \hat{C}\,(\lambda,\ldots,\lambda)\,d\lambda$. La formule exacte s'écrit :

$$x_i(Q,C) = \left(1 + \frac{CF}{CV}\right) \int_0^1 \partial_i \hat{C}\,(\lambda,\ldots,\lambda)\,d\lambda$$

Exemple 2.5 On considère à nouveau la fonction $\widehat{C}$ définie dans (2.8). Il s'agit de dériver cette fonction par rapport à chacun des τ_i, de poser $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \lambda$ et d'intégrer chacune des dérivées par rapport à λ entre 0 et 1. Il n'y a pas de coût fixe ici. Le résultat apparaît dans le tableau qui suit :

[5] On a en effet $\partial_i C\,((\lambda q_1,\ldots,\lambda q_n)) = c'\Big(\lambda \sum_{j=1}^n q_j\Big)$ pour tout i, d'où :

$$\int_0^1 q_i\,\partial_i C\,(\lambda Q)\,d\lambda = \int_0^1 q_i\,c'\left(\lambda \sum_{j=1}^n q_j\right) d\lambda = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j} c\left(\sum_{j=1}^n q_j\right) = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j} C\,(Q)$$

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3584.56	3000.00	6077.70	12662.26
%	28	24	48	100

La méthode Aumann-Shapley consiste à faire la somme (prendre l'intégrale) des coûts marginaux le long du rayon qui va de l'origine au point Q dans l'espace des demandes. On pourrait cependant faire cette somme le long d'un autre sentier, ce qui donnerait une répartition différente. On peut même imaginer de travailler le long d'un sentier discret (ou linéaire par morceau), ce qui est d'ailleurs la seule façon de procéder lorsque les quantités demandées sont indivisibles. Cette approche plus générale est développée dans l'annexe 2.A.5.

La méthode Shapley-Shubik

Supposons que la demande totale de l'entité 1 doive être satisfaite avant celle de l'entité 2 et cette dernière avant celle de l'entité 3, etc. Supposons également qu'on convienne de faire supporter à l'entité 1 la totalité du coût de sa demande, soit $c_1(q_1)$, et à l'entité 2 le coût supplémentaire qu'entraîne l'adjonction de sa demande à celle de l'entité 1, soit $C(q_1, q_2, 0, \ldots, 0) - c_1(q_1)$. De façon similaire, l'entité 3 devra supporter $C(q_1, q_2, q_3, 0, \ldots, 0) - C(q_1, q_2, 0, \ldots, 0)$ et ainsi de suite.[6]

L'ordre d'apparition des entités est évidemment important. Certaines entités pourraient donc contester l'ordre choisi. Shapley (1953) a apporté une réponse élégante à ce conflit. Elle consiste à supposer que l'ordre dans lequel les entités se joignent à une coalition et l'ordre dans lequel les coalitions se forment est aléatoire, avec des chances égales d'arriver premier, deuxième, etc. Si, pour un ordre d'arrivée donné, chacun se voit imputer un montant égal au coût incrémental qu'il impose à la coalition à laquelle il se joint, chacun est alors en mesure de calculer, ex ante, l'espérance du coût qui lui sera imputé. La répartition qui consiste à imputer aux différentes entités un montant égal à cette espérance, autrement dit la moyenne de ces coûts incrémentaux, est appelée *valeur de Shapley.*[7] On donne le nom de Shapley-Shubik à cette méthode parce que c'est Shubik qui a proposé de l'appliquer à la répartition des coûts.

[6] Il s'agit de la répartition selon les coûts incrémentaux, décrite dans l'annexe 2.A.5, avec la suite $\mathbb{Q} = (0, Q^1, \ldots, Q^n)$ où $Q^1 = (q_1, 0, \ldots, 0)$, $Q^2 = (q_1, q_2, 0, \ldots, 0)$, $Q^3 = (q_1, q_2, q_3, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $Q^n = Q$.

[7] Stricto sensu, ce que doit payer le joueur i est la valeur de Shapley du jeu pour ce joueur.

Avec trois entités, il y a six ordres d'arrivée possibles représentés par autant de suites :

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,1,2),\ (2,3,1),\ (3,2,1)$$

La probabilité est donc $\frac{1}{3}$ que l'entité 1 entre en premier dans le consortium, $\frac{1}{6}$ qu'elle entre en deuxième derrière l'entité 2, $\frac{1}{6}$ qu'elle entre encore en deuxième mais derrière l'entité 3 et $\frac{1}{3}$ qu'elle arrive enfin en troisième, l'ordre dans lequel arrivent les deux autres entités n'ayant alors aucune importance.

Pour définir la méthode Shapley-Shubik, il est commode de poser $\hat{c}(S) = C\left(Q^S\right)$. Rappelons-nous que Q^S est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes autres que celle des entités de S sont ramenées à 0. La fonction $\hat{c}$ est définie pour tous les sous-ensembles d'entités. On a en particulier $\hat{c}(\{i\}) = c_i(q_i)$. Cette fonction s'entend pour une demande Q donnée. Elle définit ce qu'on appelle un *jeu de coût.*

Pour le cas de trois alternatives, la méthode Shapley-Shubik est définie par :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{1\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,2\})-\hat{c}(\{2\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,3\})-\hat{c}(\{3\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\})-\hat{c}(\{2,3\})\right]\\
x_2 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{2\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,2\})-\hat{c}(\{1\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{2,3\})-\hat{c}(\{3\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\})-\hat{c}(\{1,3\})\right]\\
x_3 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{3\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,3\})-\hat{c}(\{1\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{2,3\})-\hat{c}(\{2\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\})-\hat{c}(\{1,2\})\right]
\end{aligned}$$

On vérifie que $x_1 + x_2 + x_3 = \hat{c}(N) = C(Q)$. De façon plus générale, la répartition par la valeur de Shapley est définie par :

$$x_i = \sum_{S \subset N} \frac{|S \backslash \{i\}|!\,|N \backslash S|!}{|N|!}\left[\hat{c}(S) - \hat{c}(S \backslash \{i\})\right]$$

où $|S|$ représente le nombre d'éléments dans S.

Certains voient ce mode de répartition comme celui qui pourrait résulter d'une négociation entre les entités. Biddle et Steinberg (1985, p. 42) en parlent comme d'un "costless surrogate for the allocation that would be obtained through bargaining."

Une variante consiste à admettre que certaines entités ont une stature telle que les ordres d'entrée dans le consortium ne sont pas équiprobables. Certains entités devraient en faire partie avant même que d'autres puissent joindre le consortium, ce qui permettrait de représenter leurs pouvoirs de négociation respectifs.

On pourrait aussi appliquer la valeur de Shapley à la répartition des bénéfices tirés de la coopération, c'est-à-dire aux coûts épargnés, plutôt qu'aux coûts. Les résultats ne seraient pas nécessairement les mêmes.

S'il y a un coût fixe, on peut le traiter de deux façons. La première consiste à l'inclure dans chacun des $\hat{c}(S)$, ce qui revient à le répartir de façon égalitaire entre toutes les entités. La deuxième consiste à appliquer la méthode Shapley-Shubik aux seuls coûts variables et à répartir le coût fixe selon une règle quelconque, par exemple dans les mêmes proportions que les coûts variables, comme cela a été proposé par Mirman, Samet et Tauman (1983) pour la méthode Aumann-Shapley.

Exemple 2.6 Les valeurs de la fonction $\widehat{C}$ pour l'exemple du gazoduc sont les suivantes :

$\hat{c}(\{1\}) = 5600$	$\hat{c}(\{2\}) = 6000$	$\hat{c}(\{3\}) = 7000$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 9182.58$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9662.26$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 10000$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 12662.26$	

Les détails des calculs sont donnés à l'annexe 2.A.3. Appliquée à ces données, la méthode Shapley-Shubik donne la répartition qui suit :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3728.22	4097.10	4836.94	12662.26
%	29.4	32.4	38.2	100

Le nucléole

Un autre concept emprunté à la théorie des jeux coopératifs est celui de nucléole. L'idée derrière ce concept est de chercher à maximiser le bien-être de la moins heureuse des coalitions.

Étant donné une répartition $x = (x_1, \ldots x_n)$ et un sous-ensemble S non-vide de N et différent de N, on définit l'excédent de la coalition S avec la répartition x par :

$$e(x,S) = \hat{c}(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Le nombre $e(x,S)$ est ce que gagne la coalition S si elle accepte la répartition x plutôt que de répondre elle-même aux besoins de ses membres. On désigne ensuite par $e(x)$ le vecteur des $(2^n - 2)$ valeurs de $e(x,S)$, pour $S \in \mathcal{N}$, ordonnées de la plus petite à la plus grande. Le nucléole[8] est défini comme l'unique répartition x^* qui maximise lexicographiquement $e(x)$:

$$e(x) \leq_\ell e(x^*) \text{ pour toute autre répartition } x$$

où $\leq_\ell$ désigne la relation «inférieure ou égale à au sens lexicographique».[9] Autrement dit, x^* est la répartition qui maximise le plus petit gain d'une coalition, de même que le deuxième plus petit gain, le troisième, etc. C'est aussi le point central, au sens géométrique, de l'ensemble des répartitions possibles.

Exemple 2.7 Le nucléole[10] pour les données du gazoduc est donné par :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3835.70	4173.44	4653.12	12662.26
%	30	33	37	100

Il existe autant de variantes du nucléole que de façons de définir l'excédent d'une coalition. Certains ont proposé de travailler avec l'excédent per capita, c'est-à-dire :

$$e(x,S) = \frac{\hat{c}(S) - \sum_{i \in S} x_i}{|S|}$$

On obtient alors le nucléole per capita ou le nucléole normalisé.

Le coeur (noyau)

Le coeur n'est pas en soi une méthode de répartition. Il détermine plutôt un ensemble de répartitions des coûts, qui peut d'ailleurs être vide. Il s'agit des répartitions qu'aucune coalition ou sous-ensemble d'entités ne peut contester sous prétexte qu'elles imputeraient à ses membres une charge supérieure au coût auquel la coalition en ques-

[8] En toute rigueur, on devrait parler de pré-nucléole, le terme nucléole étant normalement réservé aux répartitions qui satisfont $x_i \leq c(\{i\})\ \forall i$, une restriction qu'on n'impose pas. L'exemple présenté à l'annexe 2.A.4 donne justement une répartition qui ne satisfait pas à cette restriction alors que cela aurait été possible.

[9] Un vecteur $e = (e_1, \ldots, e_m)$ est *lexicographiquement inférieur* à un autre $d = (d_1, \ldots, d_m)$ si la première composante de e différente de la composante correspondante de d est plus petite que cette dernière. Par exemple, $(3,1,9)$ est lexicographiquement plus petit que $(3,2,1)$.

[10] Un algorithme pour calculer le nucléole est présenté à l'annexe 2.A.4.

tion pourrait seule satisfaire aux demandes de ses membres. Plus précisément, c'est l'ensemble des répartitions qui satisfont les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\leq \hat{c}\,(S)\,, \text{ pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N \\ \sum_{i \in N} x_i &= \hat{c}\,(N) \end{aligned}$$

La première condition spécifie que, quelle que soit la coalition S, la somme des coûts attribués à ses membres ne peut dépasser le coût total $\hat{c}\,(S)$ auquel cette coalition doit faire face si elle décide de se passer des autres. La deuxième condition stipule que la somme des coûts attribués à toutes les entités doit couvrir exactement le coût total de produire l'ensemble des demandes. Cela laisse supposer que c'est la grande coalition qui va se former.

On peut définir le coeur, de façon équivalente, comme l'ensemble des répartitions qui satisfont les conditions :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\geq \hat{c}(N) - \hat{c}\,(N \backslash S)\,, \text{ pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N \\ \sum_{i \in N} x_i &= \hat{c}\,(N) \end{aligned}$$

Sous cette forme, chaque coalition se voit imputer un montant au moins aussi élevé que le coût supplémentaire qu'elle impose à la coalition complémentaire $N \backslash S$ lorsqu'elle la rejoint pour former la grande coalition N. Si ce n'était pas le cas, les membres de la coalition $N \backslash S$ verseraient un subside aux membres de la coalition S, d'où une objection possible de leur part.

Il se peut que les conditions qui définissent le coeur soient mutuellement incompatibles. Le coeur est alors vide. Il existe des conditions sur les fonctions de coût qui garantissent l'existence du coeur. Lorsqu'il existe, il peut par contre être très grand. Les conditions d'existence du coeur et ses propriétés sont examinées en détail dans le chapitre 5.

Le coeur est davantage une propriété désirable des diverses méthodes de répartition. Une répartition se trouve ou non dans le coeur. Le fait d'appartenir au coeur confère à une répartition un caractère de crédibilité non négligeable. L'appartenance au coeur n'est pas garantie, sauf pour les jeux de coûts concaves, c'est-à-dire ceux où les coûts incrémentaux de joindre un sous-ensemble d'entités décroît à mesure que ce sous-ensemble augmente en taille. Le nucléole appartient au coeur lorsque celui-ci existe, ce qui n'est pas nécessairement le cas de la valeur de Shapley, sauf pour les jeux concaves.

Dans ce dernier cas, non seulement la valeur de Shapley appartient-elle au coeur mais elle est située au centre du coeur.[11]

Exemple 2.8 Dans le cas de l'exemple du gazoduc, le coeur est défini par les contraintes suivantes :

$$\begin{array}{lll} x_1 \leq 5600 & x_2 \leq 6000 & x_3 \leq 7000 \\ x_1 + x_2 \leq 9182.58 & x_1 + x_3 \leq 9662.26 & x_2 + x_3 \leq 10000 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 12662.26 & \end{array}$$

Ainsi, avec une répartition qui appartient au coeur, les entités 1 et 2 ne peuvent se voir imputer des montants supérieurs à respectivement 5600 et 6000 parce qu'elles peuvent fonctionner seules à ces coûts respectifs. De plus, comme elles pourraient, ensemble, répondre à leurs besoins pour un coût total de 9182.58, elles ne peuvent se voir imputer des charges dont le total dépasserait ce montant.

2.3.3 La répartition séquentielle

La méthode de répartition séquentielle a été conçue à l'origine pour le cas des demandes portant sur un seul bien privé. On va commencer par présenter la méthode dans ce contexte plus simple. On l'étendra ensuite au contexte plus général décrit dans la sous-section 2.2.1.

Cas des demandes unidimensionnelles

Les demandes des n entités sont données par des nombres $q_i,\ i = 1, \ldots, n$. On suppose $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n$. Typiquement, avec les méthodes de ce type, toutes les entités se voient imputer une part égale du coût d'un projet ou d'une capacité tout juste suffisante pour répondre aux besoins de n entités ayant une demande identique à la plus petite des demandes, celle de l'entité 1 ici. Ensuite, les $n-1$ autres entités se voient imputer, en plus, une part égale de l'accroissement de coût qu'entraînerait un accroissement de capacité suffisant pour répondre à des demandes de leur part qui seraient toutes égales à celle de l'entité 2. On continue ainsi à imputer les coûts associés à des accroissements de capacité nécessités par des demandes de plus en plus grandes jusqu'à l'entité n.

Dans le cas où les coûts incrémentaux croissent avec l'ampleur des demandes, on évite ainsi que les entités ayant des demandes plus faibles se voient imputer des coûts reliés aux externalités imposées par ceux qui ont des demandes plus fortes. À l'inverse,

[11] Pour plus de détails à ce sujet, voir la section 5.7.

si les coûts incrémentaux diminuent avec l'ampleur des demandes, on évite que les entités ayant des demandes plus faibles profitent des externalités amenées par ceux qui ont des demandes plus grandes.

Pour décrire cette méthode de façon formelle, on introduit des suites de demande intermédiaire Q^i, $i = 1, \dots n$, de même dimension que $Q = (q_1, \dots q_n)$. Elles sont définies par :

$$q_j^i = \min\{q_i, q_j\}$$

Autrement dit :

$$Q^i = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_i, \underbrace{q_i, \dots, q_i}_{n-i \text{ fois}})$$

Les i premiers éléments de Q^i sont ceux de Q. Les $n-i$ autres sont tous remplacés par q_i. Il ne faut pas confondre Q^i avec $Q^{\{i\}}$. On a évidemment $Q^n = Q$ et on pose $Q^0 = (0, \dots, 0)$. La méthode de répartition séquentielle est définie par :

$$\begin{aligned}
x_1(Q,C) &= \frac{C\left(Q^1\right)}{n} \\
x_2(Q,C) &= x_1(Q,C) + \frac{C\left(Q^2\right) - C\left(Q^1\right)}{n-1} \\
x_3(Q,C) &= x_2(Q,C) + \frac{C\left(Q^3\right) - C\left(Q^2\right)}{n-2} \\
&\vdots \\
x_n(Q,C) &= x_{n-1}(Q,C) + C\left(Q\right) - C\left(Q^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

La formule générale est :

$$x_i(Q,C) = \sum_{j=1}^{i} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j}, \ i = 1, \dots n \tag{2.10}$$

Cette méthode satisfait : $\sum_{i=1}^{n} x_i(Q,C) = C\left(Q\right)$. De plus $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. À noter que, s'il y a un coût fixe, cette méthode le répartit également entre toutes les entités dont la demande est positive. Ce coût fixe est en effet compris dans le premier $C\left(Q^j\right)$ positif.

Exemple 2.9 On considère une version simplifiée de l'exemple du gazoduc. On suppose qu'il y a une seule section de réseau, celle de Québec à Montréal, trois clients, tous situés à Québec, et une seule période avec le profil de consommation $Q = (4, 9, 25)$. La fonction α est définie par :

$$\alpha(Q) = \sum_{i=1}^{3} q_i$$

d'où $\alpha((4,9,25)) = 38$. Les fonctions c et C deviennent $c(\gamma) = 1000\sqrt{\gamma}$, où γ est la capacité de la section, et $C(Q) = 1000\sqrt{\sum_{i=1}^{3} q_i}$.

La première étape de la répartition séquentielle requiert la construction des demandes intermédiaires Q^1 et Q^2. Elles sont données dans le tableau qui suit, avec les valeurs correspondantes des $\alpha(Q^i)$, c'est-à-dire les capacités requises pour chaque demande intermédiaire, et $c(\alpha(Q^i) \equiv C(Q^i)$:

	1	2	3	$\alpha(Q^i)$	$c(\alpha(Q^i))$
Q^1	4	4	4	12	3464.10
Q^2	4	9	9	22	4690.42
Q^3	4	9	25	38	6164.41

À noter que $Q^3 = Q$, comme il se doit. Il s'agit ensuite d'appliquer la formule (2.10) aux coûts de la dernière colonne. Elle donne la répartition suivante :[12]

	1	2	3	Total
x	1154.70	1767.86	3241.86	6164.41
%	19	29	53	100

Par comparaison, la répartition de ces mêmes coûts proportionnellement aux demandes, c'est-à-dire la règle des coûts moyens, donne la répartition qui suit. On voit que la répartition séquentielle réduit la part du client 3 de façon significative par rapport à la répartition selon le coût moyen. En revanche, celles des clients 1 et 2 sont augmentées. La raison est la suivante. Les volumes requis par les clients 1 et 2 sont très faibles par rapport à celui requis par le client 3. Ces volumes additionnels peuvent être accommodés avec un gazoduc légèrement plus gros que celui qu'exige le client 3 en isolation. L'accroissement de coût qu'entraînent les demandes des deux autres clients est donc beaucoup plus faible, en termes relatifs, que l'importance de leur demande dans la demande totale. C'est encore plus vrai pour le client 1 que pour le client 2. La règle des coûts moyens fait profiter ces deux clients de la baisse du coût moyen qu'amène la demande du client 3. Ce n'est pas le cas avec la répartition séquentielle. Pour établir la part du client 1, on ramène les volumes des deux autres au niveau de celui du client 1.

[12] On a : $x_1 = \frac{3464.10}{3}$, $x_2 = \frac{3464.10}{3} + \frac{4690.42-3464.10}{2}$, $x_3 = \frac{3464.10}{3} + \frac{4690.42-3464.10}{2} + \frac{6164.41-4690.42}{1}$.

En ce faisant, ce dernier profite de la présence des deux autres mais ne profite pas du fait que leurs demandes soient plus grandes que la sienne. De façon similaire, le client 2 profite de la présence du client 3 mais non de l'importance de sa demande.

	1	2	3	Total
x	648.88	1459.99	4055.54	6164.41
%	11	24	66	100

Cas des demandes multidimensionnelles

On peut envisager une généralisation de la méthode présentée au paragraphe précédent au cas des demandes multidimensionnelles. L'approche présentée ici a été initiée par Koster et al. (1998) pour le cas de plusieurs biens homogènes et par Sprumont (1998) pour les biens hétérogènes. Téjédo et Truchon (2000) généralisent la méthode au contexte plus général envisagé ici.[13]

Un premier problème qui se présente dans cette démarche est celui d'ordonner des demandes qui ne sont peut-être pas comparables. La solution adoptée consiste à ordonner les demandes en termes des coûts qu'entraînerait leur réalisation indépendante :

$$c_1(q_1) \leq c_2(q_2) \leq \ldots \leq c_n(q_n) \tag{2.11}$$

Dans le cas unidimensionnel, l'ordre $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n$ est équivalent à celui établi en (2.11).

Avec des demandes multidimensionnelles, se pose aussi le problème de la construction des demandes intermédiaires Q^i. Elle ne peuvent évidemment pas l'être comme pour les demandes unidimensionnelles puisque qu'elles peuvent porter sur des biens différents. Cependant, dans le cas unidimensionnel, Q^1 est défini de manière à ce que :

$$c_1(q_1) = c_2\left(q_2^1\right) = \ldots = c_n\left(q_n^1\right) \tag{2.12}$$

Q^2 de manière à ce que :

$$c_2(q_2) = c_3\left(q_3^2\right) = \ldots = c_n\left(q_n^2\right) \tag{2.13}$$

[13] La méthode de répartition séquentielle peut, elle aussi, être vue comme un cas particulier de répartition selon les coûts incrémentaux, c'est-à-dire de la forme (2.15). On indique comment dans l'annexe 2.A.6.

etc. Autrement dit, Q^1 est défini de manière à ce que le coût de faire cavalier seul soit le même pour tous, Q^2 de manière à ce que le coût de faire cavalier seul soit le même pour les entités 2 à n, etc. C'est ce qui est fondamental.

Pour construire Q^1, il s'agit donc de réduire les demandes des entités 2 à n jusqu'à ce que leur coût de faire cavalier seul soit le même que pour l'entité 1 et ainsi de suite. Il y a cependant plusieurs façons de réduire la demande d'une entité. Ici, on se limite aux réductions proportionnelles, c'est-à-dire le long d'une rayon. Téjédo et Truchon (2002) envisagent des réductions le long de sentiers plus généraux. De façon précise, on définit :

$$Q^1 = \left(\tau_1^1 q_1, \ldots, \tau_n^1 q_n\right)$$

où $\tau_1^1 = 1$ et où les autres τ_i^1 sont les solutions des équations :

$$c_i\left(\tau_i q_i\right) = c_1\left(q_1\right),\ i = 2, \ldots, n$$

De façon similaire, $Q^2 = \left(\tau_1^2 q_1, \ldots, \tau_n^2 q_n\right)$ où $\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1$ et où les autres τ_i^2 sont les solutions des équations :

$$c_i\left(\tau_i q_i\right) = c_2\left(q_2\right),\ i = 3, \ldots, n$$

et ainsi de suite jusqu'à $n-1$. Comme dans le cas unidimensionnel, on a $Q^n = Q$. Il s'agit ensuite de calculer les $C\left(Q^j\right),\ j = 1, \ldots, n$, et de les utiliser dans les fonctions x_i définies en (2.10).

Exemple 2.10 On considère à nouveau l'exemple original du gazoduc de la sous-section 2.2.4. L'ordre original entre les régions respecte l'ordre des coûts de faire cavalier seul $c_i\left(q_i\right)$. Il faut commencer par construire les demandes intermédiaires Q^1 et Q^2. Pour ce faire, il faut trouver, pour $i = 1, 2$ et pour $j > i$, les valeurs des τ_j qui ramènent les demandes des entités j à des niveaux qui font que leur coût soit identique à ceux de q_i. On appelle ces valeurs τ_j^i. Pour obtenir Q^1, il faut donc résoudre les deux équations :

$$\begin{aligned} c_2\left(\tau_2 q_2\right) &\equiv 6000\sqrt{\tau_2} = 5600 \equiv c_1\left(q_1\right) \\ c_3\left(\tau_3 q_3\right) &\equiv 7000\sqrt{\tau_3} = 5600 \equiv c_1\left(q_1\right) \end{aligned}$$

Pour obtenir Q^2, il faut résoudre l'équation :

$$c_3\left(\tau_3 q_3\right) \equiv 7000\sqrt{\tau_3} = 6000 \equiv c_2\left(q_2\right)$$

Ces trois solutions apparaissent dans le tableau qui suit :

τ_j^i	2	3
1	0.871111	0.64
2	—	0.734694

Il faut donc multiplier la demande de l'entité 2 par le facteur 0.871111 et celle de l'entité 3 par le facteur 0.64 pour ramener leurs coûts respectifs à celui de q_1. Il faut aussi multiplier la demande de l'entité 3 par le facteur 0.734694 pour ramener son coût à celui de q_2.

En substituant ces valeurs dans :

$$\hat{Q}(\tau) = ((12\tau_1, 16\tau_1), (9\tau_2, 0), (25\tau_3, 49\tau_3))$$

on obtient ensuite Q^1 et Q^2 de même que les valeurs correspondantes de α et c :

$$\begin{aligned} Q^1 &= ((12, 16),\ (7.84, 0),\ (16, 31.36)) \\ \alpha(Q^1) &= (16, 7.84, 31.36) \\ C(Q^1) &\equiv c(\alpha(Q^1)) = 11281.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= ((12, 16),\ (9, 0),\ (18.3673, 36)) \\ \alpha(Q^2) &= (16, 9, 52) \\ C(Q^2) &\equiv c(\alpha(Q^2)) = 11811.12 \end{aligned}$$

On remarquera la réduction des volumes, par rapport à ceux de Q, dans la deuxième et la troisième composante de Q^1. Dans Q^2, seule la dernière diffère de celle Q. Il s'agit ensuite d'appliquer la formule (2.10) aux coûts ainsi obtenus. Cela donne la répartition suivante :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3760.62	4025.24	4876.40	12662.26
%	30	32	39	100

2.4 Conclusion

Les méthodes de partage de coûts qui ont été présentées dans ce chapitre ont été illustrées à l'aide d'un même exemple. La tentation pourrait être forte de chercher à choisir une méthode sur la base d'un seul ou même de plusieurs exemples ou sur la base des répartitions qu'elle peut donner dans une situation particulière. C'est malheureusement trop souvent la façon de faire. Il en résulte inévitablement des frustrations et des conflits. C'est souvent les cas lorsqu'arrivent de nouveaux partenaires ou que le contexte change de toute autre manière.

Idéalement, il faudrait choisir une méthode sur la base de ses propriétés, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner, un peu comme un pays se dote d'une constitution sans connaître toutes les répercussions qu'elle aura sur les citoyens actuels et à venir. Dans le chapitre 3, on cherche à départager les méthodes de partage de coûts sur la base des propriétés générales qu'elles peuvent ou non satisfaire. Certaines d'entre elles concernent la cohérence des règles de répartition. Les autres peuvent être associées à des considérations d'équité. On verra que certaines méthodes peuvent être caractérisées comme étant les seules à satisfaire à un certain sous-ensemble de propriétés.

2.A Annexes

2.A.1 Sommaire des exemples

Répartition selon la méthode des bénéfices résiduels :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3755.69	4116.61	4789.95	12662.26
%	30	32	38	100

Répartition selon la méthode de Moriarity :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3812.29	4084.60	4765.37	12662.26
%	30	32	38	100

Répartition selon la méthode de Louderback :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3903.50	4727.63	4031.13	12662.26
%	31	37	32	100

Tarification au coût marginal avec répartition égalitaire du déficit :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3902.65	3610.38	5149.23	12662.26
%	31	29	41	100

Répartition à la Aumann-Shapley :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3584.56	3000.00	6077.70	12662.26
%	28	24	48	100

Moyenne des répartitions selon les coûts incrémentaux :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3606.26	4732.05	4323.95	12662.26
%	28	37	34	100

Répartition à la Shapley-Shubik :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3728.22	4097.10	4836.94	12662.26
%	29.4	32.4	38.2	100

Répartition selon le nucléole :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3835.70	4173.44	4653.12	12662.26
%	30	33	37	100

Répartition séquentielle :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3760.62	4025.24	4876.40	12662.26
%	30	32	39	100

2.A.2 Notation

- Étant donnée une suite de nombres $q_1, \ldots, q_n$, $\sum_{i=1}^{n} q_i$ représente leur somme.
- Si $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire si N est l'ensemble des entiers $1, 2, \ldots, n$, la même somme peut être écrite sous la forme $\sum_{i \in N} q_i$.
- $\max\limits_{i \in N} \{q_i\}$ et $\max\{q_1, \ldots, q_n\}$ désignent le plus grand des nombres du vecteur $(q_1, \ldots, q_n)$.

2.A.3 La fonction $\widehat{c}$

Rappelons-nous la définition de $\hat{c}$. Pour tout sous-ensemble S de N, on définit d'abord la demande Q^S en annulant les composantes de Q qui correspondent aux entités qui n'appartiennent pas à S. On définit ensuite $\hat{c}(S)$ comme le coût de desservir le sous-ensemble d'entités S, à l'exclusion des autres. Le coût de desservir toutes les entités à la fois est $\hat{c}(N)$. $\hat{c}$ est une fonction définie sur la famille de tous les sous-ensembles non-vides de N. Le lien entre les fonctions $\hat{c}$, c et C pour l'exemple du gazoduc est le suivant :

$$\begin{aligned}\hat{c}(S) &= C\left(Q^S\right) = c\left(\alpha\left(Q^S\right)\right)\\ \hat{c}(N) &= C\left(Q\right) = c\left(\alpha\left(Q\right)\right)\\ \hat{c}(\{i\}) &= C\left(Q^{\{i\}}\right) = c\left(\alpha\left(Q^{\{i\}}\right)\right)\end{aligned}$$

On calcule ensuite les valeurs de $\hat{c}(\{1,2\})$, $\hat{c}(\{1,3\})$ et $\hat{c}(\{2,3\})$. On obtient celle de $\hat{c}(\{1,2\})$ en appliquant d'abord la règle d'agrégation α à $Q^{\{1,2\}}$, qui est obtenu en annulant la demande de l'entité 3. Essentiellement, on obtient un gazoduc dont la capacité entre Québec et Montréal est égale à la somme des demandes de la Beauce et du Saguenay, soit 25 mètres cubes. On applique ensuite la fonction de coût c à $\alpha\left(Q^{\{1,2\}}\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}Q^{\{1,2\}} &= ((12,16)\,,\ (9,0)\,,\ (0,0))\\ \alpha\left(Q^{\{1,2\}}\right) &= (16,9,21)\\ \hat{c}(\{1,2\}) &= C\left(Q^{\{1,2\}}\right) = c\left(\alpha\left(Q^{\{1,2\}}\right)\right) = 9182.58\end{aligned}$$

On obtient $\hat{c}(\{1,3\})$ et $\hat{c}(\{2,3\})$ de façon similaire :

$$\begin{aligned}Q^{\{1,3\}} &= ((12,16)\,,\ (0,0)\,,\ (25,49))\\ \alpha\left(Q^{\{1,3\}}\right) &= (16,0,65)\\ \hat{c}(\{1,3\}) &= C\left(Q^{\{1,3\}}\right) = c\left(\alpha\left(Q^{\{1,3\}}\right)\right) = 9662.26\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q^{\{2,3\}} &= ((0,0)\,,\ (9,0)\,,\ (25,49))\\ \alpha\left(Q^{\{2,3\}}\right) &= (0,9,49)\\ \hat{c}(\{2,3\}) &= C\left(Q^{\{2,3\}}\right) = c\left(\alpha\left(Q^{\{2,3\}}\right)\right) = 10\,000\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}Q^{\{1\}} &= ((12,16)\,,\ (0,0)\,,\ (0,0))\\ \alpha\left(Q^{\{1,2\}}\right) &= (16,0,16)\\ \hat{c}(\{1\}) &= C\left(Q^{\{1\}}\right) = c\left(\alpha\left(Q^{\{1\}}\right)\right) = 5600\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q^{\{2\}} &= ((0,0)\,,\ (9,0)\,,\ (0,0)) \\
\alpha\left(Q^{\{2\}}\right) &= (9,0,9) \\
\hat{c}\left(\{2\}\right) &= C\left(Q^{\{2\}}\right) = c\left(\alpha\left(Q^{\{2\}}\right)\right) = 6000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{\{3\}} &= ((0,0)\,,\ (0,0)\,,\ (25,49)) \\
\alpha\left(Q^{\{3\}}\right) &= (0,0,49) \\
\hat{c}\left(\{3\}\right) &= C\left(Q^{\{3\}}\right) = c\left(\alpha\left(Q^{\{3\}}\right)\right) = 7000
\end{aligned}
$$

On peut maintenant calculer le coût incrémental de desservir l'entité i en plus des autres dans N. Il est défini par : $cm_i\left(Q\right) = C\left(Q\right) - C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right) = \hat{c}\left(N\right) - \hat{c}\left(N\backslash\{i\}\right).$ On a donc :

$$
\begin{aligned}
cm_1\left(Q\right) &= \hat{c}\left(N\right) - \hat{c}\left(\{2,3\}\right) = 12662.26 - 10000.00 = 2662.26 \\
cm_2\left(Q\right) &= \hat{c}\left(N\right) - \hat{c}\left(\{1,3\}\right) = 12662.26 - 9662.26 = 3000.00 \\
cm_3\left(Q\right) &= \hat{c}\left(N\right) - \hat{c}\left(\{1,2\}\right) = 12662.26 - 9182.58 = 3479.68
\end{aligned}
$$

Ces valeurs et celles de $c_1\left(q_1\right) \equiv \hat{c}\left(\{1\}\right),\ c_2\left(q_2\right) \equiv \hat{c}\left(\{2\}\right)$ et $c_3\left(q_3\right) \equiv \hat{c}\left(\{3\}\right)$ sont reportées dans le tableau de la page 50.

2.A.4 Recherche du nucléole

On trouve le nucléole en résolvant une suite de problèmes linéaires définis par :

$$
P_k = \begin{cases}
\max\limits_{x,\varepsilon} \varepsilon \text{ sous les contraintes} \\
\sum\limits_{i\in S} x_i = \hat{c}(S) - \varepsilon^1 \ \forall S \in \mathcal{N}_1 \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\sum\limits_{i\in S} x_i = \hat{c}(S) - \varepsilon^k \ \forall S \in \mathcal{N}_k \\
\sum\limits_{i\in S} x_i + \varepsilon \leq \hat{c}(S) \ \forall S \in \mathcal{N}\backslash\left(\mathcal{N}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{N}_k\right) \\
\sum\limits_{j\in N} x_j = \hat{c}(N)
\end{cases}
$$

Le dual de ce problème[14] s'écrit :

$$D_k = \begin{cases} \min\limits_{u} \sum\limits_{\kappa=1}^{k} \sum\limits_{S\in\mathcal{N}_\kappa} u(S)\left(\hat{c}(S) - \varepsilon^\kappa\right) + \sum\limits_{S\in\mathcal{N}\setminus(\mathcal{N}_1\cup\cdots\cup\mathcal{N}_k)} u(S)\,\hat{c}(S) - u(N)\,\hat{c}(N) \\ \text{sous les contraintes} \\ \sum\limits_{S\in\mathcal{N}\setminus(\mathcal{N}_1\cup\cdots\cup\mathcal{N}_k)} u(S) = 1 \\ \sum\limits_{S:i\in S} u(S) = 0 \ \forall i \in N \\ u(S) \geq 0 \ \forall S \in \mathcal{N}\setminus(\mathcal{N}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{N}_k) \end{cases}$$

Étant donné un couple de solutions $\left(\left(x^k, \varepsilon^k\right), u^k\right)$ des problèmes (P_{k-1}, D_{k-1}), si :

$$\mathcal{N}\setminus(\mathcal{N}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{N}_{k-1}) \neq \varnothing$$

on obtient le couple de problèmes (P_k, D_k) en posant :

$$\mathcal{N}_k = \{S \in \mathcal{N}\setminus(\mathcal{N}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{N}_{k-1}) : u(S) > 0\}$$

Le premier problème primal de cette suite est P_0 :

$$\begin{gathered} \max_{x,\varepsilon} \varepsilon \text{ sous les contraintes} \\ \sum_{i\in S} x_i + \varepsilon \leq \hat{c}(S) \ \forall S \in \mathcal{N} \\ \sum_{j\in N} x_j = \hat{c}(N) \end{gathered}$$

Si $\left(\left(x^1, \varepsilon^1\right), u^1\right)$ est un couple de solutions des problèmes (P_0, D_0), on a :

$$\varepsilon^1 = \max_{x\in X} \min_{S\in\mathcal{N}} e(x, S) \quad \text{où} \quad X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \textstyle\sum_{j\in N} x_j = \hat{c}(N)\right\}$$

Autrement dit, ε^1 est le plus grand surplus que la coalition la plus défavorisée peut recevoir. Cependant $e(x^1)$ n'est pas nécessairement le plus grand vecteur de surplus, lexicographiquement parlant. Il se peut qu'il y ait une autre répartition qui améliore le surplus de certaines coalitions parmi celles qui obtiennent ε^1 ou qui améliore le surplus des coalitions qui obtiennent le deuxième meilleur surplus sous x^1, le troisième meilleur surplus, etc., au détriment des plus grands surplus.

Un théorème fondamental de la programmation linéaire affirme qu'on a $u^1(S) > 0$ seulement si la contrainte correspondante du primal est serrée, c'est-à-dire si $\sum_{i\in S} x_i^1 +$

[14] On se rapportera à l'annexe 3.A.4 pour un bref rappel sur la programmation linéaire.

$\varepsilon^1 = \hat{c}(S)$. Comme cela doit être vrai pour tout couple de solutions, on doit également avoir $\sum_{i \in S} x_i^* + \varepsilon^1 = \hat{c}(S)$ pour toute autre solution $\left(x^*, \varepsilon^1\right)$ du primal. À l'inverse, si $u^1(S) = 0$ pour un S donné, il se peut qu'il y ait une autre solution $\left(x^*, \varepsilon^1\right)$ qui donne un plus grand surplus à cette coalition. C'est ce qu'on recherche avec les autres problèmes de cette suite, en même temps qu'on cherche à améliorer le deuxième meilleur surplus, le troisième, etc.

La solution x^k du problème P_{k-1} constitue le nucléole si $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{N}_k)$ contient au plus une des coalitions $N \setminus \{i\}$, $i \in N$. En effet, si $N \setminus \{i\} \in \mathcal{N}_\kappa$ pour un $i \in N$ et un $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$, on a $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = \hat{c}(N \setminus \{i\}) - \varepsilon^\kappa$ pour toutes les solutions des problèmes $P_\kappa, P_{\kappa+1}$, etc. En combiant ce fait avec la contrainte $\sum_{j \in N} x_j = \hat{c}(N)$, on a $x_i = \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = \hat{c}(N) - \hat{c}(N \setminus \{i\}) + \varepsilon^\kappa$. Si $n-1$ de ces contributions sont ainsi déterminées, la n^e l'est également.[15] En vertu de ce critère, il se peut qu'on n'ait pas à résoudre les problèmes (P_k, D_k) même si $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{N}_{k-1}) \neq \varnothing$.[16]

Comme le nombre de coalitions croît de façon exponentielle avec n, il en va de même de la taille des problèmes (P_k, D_k). La recherche du nucléole peut donc devenir prohibitive si le nombre d'entités devient très grand. Il existe cependant des façons de simplifier cet algorithme pour des classes particulières de problèmes.[17] Entre autres, il suffit de résoudre le dual, qui est plus facile à traiter, jusqu'à ce que le critère d'arrêt qui vient d'être défini soit satisfait. Seule la solution du primal de la dernière étape, celle qui constitue le nucléole, est requise.

L'exemple du Tableau 2.1 illustre cet algorithme. On notera que, avec x^1, on a $e(\{1\}) = e(\{3\}) = e(\{1,2\}) = \varepsilon^1$. Cependant, comme $u(\{1\}) = 0$, la coalition $\{1\}$ ne fait pas partie de $\mathcal{N}_1$. Autrement dit, le surplus de cette coalition n'est pas fixé à ε^1. Effectivement, il est augmenté de ε^1 à ε^2 à l'itération suivante.[18] On a eu besoin de trois itérations pour satisfaire au critère d'arrêt. Cependant, on aurait pu conclure que x^2 constitue le nucléole du fait que $\{1\}, \{2\}, \{3\} \subset \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. En effet, cela signifie que les valeurs de x_1, x_2 et x_3 ont été déterminées de façon définitive.

[15] Ce raisonnement confirme l'unicité du nucléole.

[16] Comme on va le voir dans l'exemple qui suit, on pourra dans certains cas s'arrêter plus tôt.

[17] Voir, entre autres, Granot, Granot et Zhu (1998), de qui nous nous sommes inspirés pour énoncer cet algorithme.

[18] Ajouter $\{1\}$ à $\mathcal{N}_1$ aurait donné $x = (5.0, 5.5, 4.5)$ comme solution finale, avec un vecteur de surplus $e(x) = (-0.5, -0.5, 0., 0.5, 0.5, 1.)$ lexicographiquement plus petit que $e\left(x^2\right)$.

$\hat{c}(\{1\}) = 5$	$\hat{c}(\{2\}) = 6$	$\hat{c}(\{3\}) = 4$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 10$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 10$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 11$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 15$	

	x_1	x_2	x_3	ε
(x^1, ε^1)	5.5	5.0	4.5	-0.5
(x^2, ε^2)	4.75	5.75	4.5	0.25
(x^3, ε^3)	4.75	5.75	4.5	0.75

	$u(\{1\})$	$u(\{2\})$	$u(\{3\})$	$u(\{1,2\})$	$u(\{1,3\})$	$u(\{2,3\})$	$u(\{1,2,3\})$
u^1	0	0	0.5	0.5	0	0	-0.5
u^2	0.5	0.5	0.5	0	0	0	-0.5
u^3	0	0	0	0.5	0.5	0.5	-1

$\mathcal{N}_1$	$\{3\}, \{1,2\}$
$\mathcal{N}_2$	$\{1\}, \{2\}$
$\mathcal{N}_3$	$\{1,3\}, \{2,3\}$

	$e(\{1\})$	$e(\{2\})$	$e(\{3\})$	$e(\{1,2\})$	$e(\{1,3\})$	$e(\{2,3\})$
x^1	-0.5	1	-0.5	-0.5	0	1.5
x^2	0.25	0.25	-0.5	-0.5	0.75	0.75
x^3	0.25	0.25	-0.5	-0.5	0.75	0.75

Vecteurs de surplus ordonnés
$e(x^1) = (-0.5, -0.5, -0.5, 0, 1, 1.5)$
$e(x^2) = (-0.5, -0.5, 0.25, 0.25, 0.75, 0.75)$
$e(x^3) = (-0.5, -0.5, 0.25, 0.25, 0.75, 0.75)$

Tableau 2.1 – Exemple de calcul du nucléole

2.A.5 Répartition selon les coûts incrémentaux

L'approche qui est présentée ici s'inspire de Moulin (1999) et de Friedman et Moulin (1999). On considère une suite croissante de demandes $\mathbb{Q} = \left(Q^0, Q^1, Q^2, \ldots, Q^h\right)$, de même dimension que $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ et telle que $Q^0 = 0$ et $Q^h = Q$. De plus, pour tout $Q^t \neq Q^h$ de la suite $\mathbb{Q}$, une et une seule composante $q_i^{t+1} - q_i^t$ de $Q^{t+1} - Q^t$ doit être semi-positive, les autres étant nulles. Dans le cas des demandes scalaires, semi-positif signifie positif. Dans le cas des demandes vectorielles, les composantes de $Q^{t+1} - Q^t$ sont des suites (vecteurs). Une composante $q_i^{t+1} - q_i^t$ est semi-positive si au moins un des éléments de $q_i^{t+1} - q_i^t$ est positif, les autres étant non-négatifs. On écrit $q_i^{t+1} - q_i^t > 0$ pour indiquer que la composante est semi-positive.

Pour tout $Q^t \neq Q^h$ de la suite $\mathbb{Q}$, on définit ensuite :

$$\Delta_i^{\mathbb{Q}} C\left(Q^t\right) = \begin{cases} C\left(Q^{t+1}\right) - C\left(Q^t\right) & \text{si} \quad q_i^{t+1} - q_i^t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad q_i^{t+1} - q_i^t = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

$\Delta_i^{\mathbb{Q}} C\left(Q^t\right)$ est le *coût incrémental* pour i de passer de Q^t à Q^{t+1}. Ce coût est imputé à une seule entité, celle qui est responsable de l'accroissement de la demande.

On vérifie facilement que la règle suivante est une règle de répartition des coûts :

$$x_i(Q, C) = \sum_{t=0}^{h-1} \Delta_i^{\mathbb{Q}} C\left(Q^t\right) \tag{2.15}$$

On a en effet :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(Q, C) = \sum_{t=0}^{h-1} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^{\mathbb{Q}} C\left(Q^t\right) = \sum_{t=0}^{h-1} \left[C\left(Q^{t+1}\right) - C\left(Q^t\right)\right] = C\left(Q\right)$$

De plus, $x_i(Q, C) \geq 0$.

La formule (2.15) est la *règle de répartition selon les coûts incrémentaux* correspondant à la suite $\mathbb{Q}$. Chaque suite $\mathbb{Q}$ définit évidemment une règle différente.

Un cas particulier, pour les demandes unidimensionnelles, consiste à définir une suite $\mathbb{Q} = \left(0, Q^1, \ldots, Q^h\right)$ telle que $Q^1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $Q^2 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$, $Q^3 = (1, 1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, Q^n = (1, \ldots, 1)$, $Q^{n+1} = (2, 1, \ldots, 1)$, $Q^{n+2} = (2, 2, 1, \ldots, 1)$, etc., avec la restriction qu'aucune composante des éléments de la suite ne peut dépasser la composante correspondante de Q. Les éléments qui violeraient cette restriction sont tout simplement omis de cette suite. En somme, les entités sont servies à tour de rôle, dans l'ordre où elles sont indexées, jusqu'à ce que leur demande soit complètement satisfaite. Ce cas particulier peut être généralisé au cas des demandes multidimensionnelles. À tour de rôle, on augmente d'une unité les composantes de chaque entité qui sont inférieures à sa demande et ce jusqu'à l'obtention des demandes de toutes les entités.

La règle de répartition qui résulte de cette suite de demandes s'apparente à celle de Aumann-Shapley. Dans le cas où le sentier est confondu avec le rayon allant de l'origine au point Q et où les unités des biens sont infiniment petites, cette règle est effectivement celle de Aumann-Shapley. Sinon, une règle de répartition par les coûts incrémentaux peut donner des résultats différents de ceux auxquels conduit la règle de Aumann-Shapley lorsque la fonction de coût est différentiable.

Exemple 2.11 Dans le cas de l'exemple du gazoduc, on considère une suite où les régions sont servies successivement selon l'ordre Beauce, Saguenay, Québec et où elles reçoivent une unité supplémentaire pour les deux périodes, chaque fois que c'est leur tour, mais sans jamais dépasser leurs demandes totales. Formellement :

$$\begin{aligned}
Q^1 &= ((1,1),(0,0),(0,0)) \\
Q^2 &= ((1,1),(1,0),(0,0)) \\
Q^3 &= ((1,1),(1,0),(1,1)) \\
Q^4 &= ((2,2),(1,0),(1,1)) \\
Q^5 &= ((2,2),(2,0),(1,1)) \\
&\vdots \\
Q^{74} &= ((12,16),(9,0),(25,49))
\end{aligned}$$

On remarque que le Saguenay ne reçoit jamais rien en deuxième période parce que sa demande pour cette période est nulle. La règle de répartition selon les coûts incrémentaux correspondant à cette suite donne la répartition suivante :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	4096.57	4564.19	4001.49	12662.26
%	32	36	32	100

Elle est fort différente de celle obtenue avec la méthode Aumann-Shapley. On pourrait attribuer cette différence à l'ordre dans lequel les régions sont servies. La répartition suivante est la moyenne des répartitions obtenues avec les six ordres possibles entre les régions :

	Beauce	Saguenay	Québec	Total
x	3606.26	4732.05	4323.95	12662.26
%	28	37	34	100

Cette répartition est elle aussi très différente de celle obtenue avec la méthode Aumann-Shapley. Pour se rapprocher davantage de la méthode Aumann-Shapley, il faudrait définir une suite qui soit le plus près possible du rayon allant de l'origine à Q. Avec la suite utilisée, on se déplace d'abord à peu près à 45° par rapport aux axes, c'est-à-dire qu'on sert toutes les entités sur à peu près la même base, puis on bifurque vers le point final Q, i.e. on sert ceux dont la demande est la plus forte. Les derniers déplacements se font parallèlement à certains des axes.

2.A.6 Répartition séquentielle et coûts incrémentaux

La méthode de répartition séquentielle peut être vue comme un cas particulier de répartition selon les coûts incrémentaux. Elle peut être mise sous la forme (2.15), à condition de modifier la définition de $\partial_i C$. Manifestement, le sentier le long duquel les $\partial_i C$ doivent être évalués est défini par $\mathbb{Q} = \left(0, Q^1, \ldots, Q^h\right)$ où les Q^i sont les demandes intermédiaires définies plus haut. Quant à $\partial_i C$, il s'agit de le redéfinir comme suit, avec $Q^0 = 0$:

$$\Delta_i^{\mathbb{Q}} C\left(Q^{j-1}\right) = \begin{cases} \dfrac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} & \text{si} \quad j \leq i \\ 0 & \text{si} \quad j > i \end{cases} \;,\; i = 1, \ldots, n$$

En remplaçant $\dfrac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j}$ par $\Delta_i^{\mathbb{Q}} C\left(Q^{j-1}\right)$ dans (2.10) à la page 67, on peut faire la sommation jusqu'à n plutôt que jusqu'à i, ce qui donne :

$$x_i(Q, C) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_i^{\mathbb{Q}} C\left(Q^{j-1}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_i^{\mathbb{Q}} C\left(Q^j\right),\ i = 1, \ldots n$$

Il s'agit de la formule (2.15) de la page 80.

Dans le cas des demandes unidimensionnelles et homogènes, c'est-à-dire lorsque α est de la forme $\alpha(Q) = \sum_{i=1}^{n} q_i$, la règle de répartition séquentielle peut aussi être définie par l'intégrale du coût marginal de chaque entité le long du sentier continu Γ constitué des segments de droite $\left[0, Q^1\right], \left[Q^1, Q^2\right], \ldots, \left[Q^{h-1}, Q^h\right]$. De façon précise :

$$x_i(Q, C) = \int_\Gamma \partial_i C(Q)$$

où $\partial_i C(Q)$ désigne maintenant la dérivée partielle de C au point Q. Par exemple, sur le segment $\left[0, Q^1\right]$, la portion de cette intégrale est définie par :

$$\int_0^{Q^1} \partial_i C(\lambda, \ldots, \lambda)\, d\lambda$$

ce qui donne $\sum_{i=1}^n \int_0^{Q^1} \partial_i C(\lambda, \ldots, \lambda)\, d\lambda = C\left(Q^1\right)$. Comme toutes les entités sont traitées de façon symétrique, on a donc :

$$\int_0^{Q^1} \partial_i C(\lambda, \ldots, \lambda)\, d\lambda = \frac{C\left(Q^1\right)}{n}$$

Sur le segment $\left[Q^1, Q^2\right]$, la portion de l'intégrale est définie par :

$$\int_{Q^1}^{Q^2} \partial_i C(q_1, \lambda, \ldots, \lambda)\, d\lambda$$

ce qui donne $\int_{Q^1}^{Q^2} \partial_1 C(q_1, \lambda, \ldots, \lambda)\, d\lambda = 0$, vu que q_1 est considéré comme fixe. On a donc :

$$\sum_{i=2}^{n} \int_{Q^1}^{Q^2} \partial_i C(q_1, \lambda, \ldots, \lambda)\, d\lambda = C\left(Q^2\right) - C\left(Q^1\right)$$

Comme les entités 2 à n sont traitées de façon symétrique, on a :

$$\int_{Q^1}^{Q^2} \partial_i C(q_1, \lambda, \ldots, \lambda)\, d\lambda = \frac{C\left(Q^2\right) - C\left(Q^1\right)}{n-1}$$

Et ainsi de suite.

Références

Aumann, R.J. et L.S. Shapley, 1974. *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, NJ : Princeton University Press.

Biddle, G.C. et Steinberg, R., 1985. "Common Cost Allocation in the Firm," in H.P. Young, ed., *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, North-Holland, 31-54.

Balanchandran, B. et Ramakrishnan, 1981. "Joint Cost Allocation : a Unified Approach," *Accounting Revie*w, 56, 85-96.

Friedman, E. et Moulin, H. (1999). "Three Methods to Share Joint Costs or surplus", *Journal of Economic Theory,* 87, pp 275-312.

Gangolly, J.S., 1981. "On Joint Cost allocation : Independent Cost Proportional Scheme (ICPS) et its Properties," *Journal of Accounting Research*, 19, 299-312.

Granot, D., Granot, F. et W.R. Zhu, 1998. "Characterization Sets for the Nucleolus," *International Journal of Game Theory,* 27, 359-74.

Koster, M., Tijs, S., et Borm, P, 1998. "Serial Cost Sharing Methods for Multicommodity Situations," *Mathematical Social Science*, 36, 229-242.

Louderback, J.G., 1976. "Another Approach to Allocating Joint Costs : A Comment," *Accounting Review*, 50, 683-85.

Mirman, L.J., D. Samet et Y. Tauman, 1983 " An Axiomatic Approach to the Allocation of a Fixed Cost through Prices," *Bell Journal of Economics*, 14, 139-151.

Moriarity, S., 1975. "Another Approach to Allocating Joint Costs," *Accounting Review*, 49, 791-795.

Moulin, H. et S. Shenker, 1992. "Serial Cost Sharing," *Econometrica*, 50, 5, 1009-1039.

Moulin, H. et S. Shenker, 1994. "Average Cost Pricing Versus Serial Cost Sharing : an axiomatic comparison," *Journal of Economic Theory*, 64, 1, 178-201.

Moulin, H., 1999. "Incremental Cost Sharing : Characterization by Strategyproofness," *Social Choice and Welfare*, 16, 279-320.

Okada, N., 1985. "Cost Allocation in Multipurpose Reservoir Developmemt : The Japanese Experience," in H.P. Young, ed., *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, North-Holland, 3-29.

Ransmeier, J.S., 1942. *The Tennessee Valley Authority : A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning*, Nashville, TN : Vanderbilt University Press.

Schmeidler. D., 1969. “The Nucleolus of a Characteristic Function Game,” *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17, 1163-1170.

Shapley, L.S., 1953. “A Value for n-Person Games,” in Kuhn, H., et W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton : Princeton University Press, 307-317.

Shenker, S., 1990. “Making Greed Work in Netwoks : A Game-Theoretic Analysis of Gateway Service Disciplines,” Mimeo, Xerox Research Center, Palo Alto.

Shubik, M., 1962. “Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing,” *Management Science*, 8, 325-43.

Sprumont, Y., 1998. “Ordinal cost sharing,” *Journal of Economic Theory*, 81, 126-162.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2000. “Serial Cost Sharing with Many Goods and General Aggregation,” Cahier de recherche 0007, Département d’économique, Université Laval.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2002. “Serial Cost Sharing in Multidimensional Contexts,” *Mathematical Social Science*, 44, 277-299.

Young, H.P., 1994. “Cost Allocation”, in *R.J.Aumann et S. Hart, eds, Handbook of Game Theory, Vol. II,* Amsterdam : North-Holland, Chap. 34, 1191-1235.

Wang, Y.T., 2002. “Proportionally Adjusted Marginal Pricing Method to Share Join Costs,” *Review of Economic Design,* 7, 205-211.

Chapitre 3

Méthodes de partage de coûts : propriétés

3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, on a présenté un survol des principales méthodes de répartition de coûts qu'on retrouve dans la littérature. On les a regroupé en trois catégories, les méthodes de proportionnalité, celles qui sont issues de la théorie des jeux coopératifs et les méthodes de répartition séquentielle. On a comparé ces méthodes à l'aide d'un exemple fictif de gazoduc. Toutefois, il serait dangereux de choisir une méthode sur la base d'un seul ou même de quelques exemples. Une méthode peut produire des résultats satisfaisants dans un contexte particulier mais elle peut donner des aberrations lorsque ce contexte vient à changer (arrivée d'un nouveau partenaire, changements dans les besoins, les coûts, etc.). Idéalement, il faudrait faire le choix d'une méthode sur la base de ses propriétés, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner. Aussi, est-il important de chercher à départager les méthodes de répartition des coûts sur la base de propriétés générales qu'elles peuvent ou non satisfaire. C'est l'objet du présent chapitre.

On commence par énoncer un certain nombre de propriétés qu'on pourrait juger souhaitables, de façon générale ou dans certaines circonstances. Certaines d'entre elles peuvent être associées à des considérations d'équité : comment traite-t-on les demandes comparables, y a-t-il protection des petits contre l'ampleur de la demande des plus gros, comment les parts des coûts évoluent-elles avec les demandes et les coûts, dans quels intervalles les contributions se situent-elles ? Les autres propriétés concernent la cohérence des règles de répartition : les contributions sont-elles indépendantes du choix des unités de mesure, sont-elles proportionnelles aux demandes lorsque les coûts le sont, sont-elles les mêmes, qu'on applique la règle au coût total ou séparément à différents éléments de coûts, etc. ? Ces deux catégories ne sont cependant pas parfaitement étanches. Certaines propriétés normatives incorporent des éléments de cohérence et réciproquement.

Après avoir passé en revue les différentes propriétés, on examine chacune des règles présentées dans le chapitre 2 et on indique quelles sont les propriétés qu'elles satisfont et qu'elles sont celles qu'elles violent dans au moins un contexte. Ces résultats sont résumés dans le Tableau 3.1 de la page 112. Certaines méthodes peuvent être caractérisées comme étant les seules à satisfaire un certain sous-ensemble de propriétés. À l'inverse, certaines propriétés sont incompatibles entre elles. On énonce un certain nombre de propositions à ce sujet. Les démonstrations sont données dans les annexes, à moins que les propositions aient déjà été démontrées dans la littérature. Le Tableau 3.2

de la page 113 résume un certain nombre de caractérisations. On termine le chapitre avec quelques considérations sur le choix d'une méthode.

3.2 Propriétés normatives

Les propriétés, dites normatives, sont regroupées en cinq catégories qui font l'objet d'autant de sous-sections. Rappelons qu'un problème de partage de coûts est défini par le vecteur des demandes de n entités, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, où les composantes q_i peuvent également être des vecteurs, et par une fonction C qui donne le coût $C(Q)$ de satisfaire à la demande Q. Une règle de partage de coûts est une fonction x qui, pour toute demande Q et toute fonction de coût C, spécifie la part du coût $C(Q)$ supportée par les différentes entités. On note $x_i(Q, C)$ la charge imputée à l'entité i et $x(Q, C)$ le vecteur de ces dernières.

On représente la demande d'un sous-ensemble S d'entités par Q^S, qui est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes, autres que celle des entités de S, sont ramenées à 0. Le coût de satisfaire uniquement aux demandes des entités de S est donc $C\left(Q^S\right)$. Comme cas particulier, on a $C\left(Q^{\{i\}}\right)$, qui est le *coût de faire cavalier seul.* On pose également $c_i(q_i) = C\left(Q^{\{i\}}\right)$ pour chaque entité i.

3.2.1 Traitement égalitaire des équivalents

Le minimum qu'on puisse demander à une règle de partage de coûts, c'est qu'elle traite de la même façon les entités qui ont des demandes comparables et en particulier des demandes identiques. C'est ce qu'exige la condition (TEE) ci-dessous. De manière plus générale, la comparaison entre les demandes de deux entités pose problème lorsqu'elles portent sur des biens ou caractéristiques différentes. Toutefois, on peut considérer ces demandes comme étant suffisamment similaires si les quantités demandées sont les mêmes et si on peut interchanger les demandes des deux entités sans changer le coût total. C'est le cas lorsque la fonction de coût est symétrique par rapport aux demandes des deux entités. De façon précise, la fonction C est symétrique par rapport aux demandes de deux entités i et j si $C(Q) = C(Q_{ij})$ pour toute demande Q et la demande Q_{ij} obtenue en interchangeant simplement q_i et q_j dans Q. La condition (S), plus forte que (TEE), exige que de telles demandes soient également traitées de la même façon. Finalement, on peut considérer des demandes comme étant équivalentes si elles satisfont un même critère. Celui qu'on a retenu dans le chapitre précédent est le coût de faire cavalier seul. La condition (TE), plus forte que les deux autres, exige que des demandes ayant le même coût de faire cavalier seul soient également traitées de la même façon. Une dernière condition va plus loin. Elle requiert que les contributions exigées des entités aillent dans le sens de leurs coûts de faire cavalier seul.

Traitement égalitaire des égaux (TEE) Cette propriété dit que, si les biens sont homogènes et si deux entités demandent les mêmes quantités de ce bien, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux. De façon formelle, $q_i = q_j$ devrait entraîner $x_i(Q, C) = x_j(Q, C)$.

Symétrie (S) Une règle de partage de coûts satisfait à la symétrie si $q_i = q_j$ entraîne $x_i(Q, C) = x_j(Q, C)$, lorsque la fonction C est symétrique par rapport aux demandes des entités i et j. Cette propriété est en fait un cas particulier de (TE).

Traitement égalitaire des équivalents (TE) Cette propriété dit que, si deux entités ont des coûts de faire cavalier seul identiques, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux. De façon formelle, $c_i(q_i) = c_j(q_j)$ devrait entraîner $x_i(Q, C) = x_j(Q, C)$.

Préservation des rangs (RG) Selon cette propriété, les contributions relatives aux coûts totaux des différentes entités devraient aller dans le sens de leurs coûts de faire cavalier seul. De façon formelle, $c_i(q_i) \leq c_j(q_j)$ devrait entraîner $x_i(Q, C) \leq x_j(Q, C)$.

Remarque 3.1 La propriété (RG) implique (TE), qui implique (S), qui implique (TEE).

3.2.2 Le principe séquentiel

Dans certaines situations, on peut se préoccuper de l'impact des demandes importantes sur les contributions des entités dont les demandes sont plus faibles. Par exemple, s'agissant de partager le coût d'une route menant à différents sites en forêt, les tenants des sites les plus rapprochés peuvent souhaiter ne pas être à la merci de ceux qui pourraient aller s'installer à l'autre bout du monde. À l'inverse, dans un projet où les économies d'échelle sont importantes, une entité ayant de gros besoins peut souhaiter que ce ne soit pas les petits qui profitent, à ses dépens, des économies d'échelle dont il est responsable. Les propriétés qui sont présentées dans cette sous-section stipulent l'invariance des contributions exigées des petits par rapport à l'ampleur des plus grandes demandes. Elles sont à la base des règles de répartition séquentielle.

La première de ces propriétés est énoncée directement en termes de l'ampleur des demandes, telles que mesurées par les quantités demandées. Cette définition a du sens dans le contexte où les entités exigent un même bien privé et où elles peuvent être ordonnées en termes des quantités demandées. Dans un contexte plus général, les quantités demandées ne sont pas nécessairement comparables entre elles. Comment ordonner les entités dans un tel contexte ? La réponse de Sprumont (1998) à cette question est d'ordonner les entités par rapport aux contributions exigées d'elles selon la règle de partage envisagée. Cela donne lieu au principe séquentiel. Dans un contexte général où les demandes peuvent prendre toutes sortes de formes, le principe séquentiel est très exigeant. On peut l'affaiblir et exiger seulement que les contributions des petits ne changent pas dans l'éventualité où les plus gros augmentent leurs demandes de façon proportionnelle. En résulte alors le principe séquentiel radial.

Insensibilité à l'ampleur des plus grandes demandes (PG) Cette propriété exige que la contribution d'une entité ne soit pas affectée par l'ampleur des demandes plus grandes que la sienne. Une entité ne devrait pas subir les externalités associées à ces plus grandes demandes, ou en profiter selon le cas. On la définit formellement comme suit. Soit une entité i et deux demandes Q et Q' telles que $q'_j = q_j$ pour $j = i$ et pour tout j tel que $q_j < q_i$ et $q'_j \geq q_j$ pour tout $j \neq i$ tel que $q_i \leq q_j$. On devrait alors avoir $x_i(Q, C) = x_i(Q', C)$.

Principe séquentiel (PS) Il s'agit d'une version plus forte de la propriété précédente. Elle dit que la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes des entités dont les contributions sont plus élevées que la sienne. On la définit formellement comme suit. Soit une entité i et deux demandes Q et Q' telles que :

- $q'_j = q_j$ pour $j = i$ et pour tout j tel que $x_j(Q, C) < x_i(Q, C)$,
- $q'_j \geq q_j$ pour tout j tel que $x_i(Q, C) \leq x_j(Q, C)$.

On devrait alors avoir $x_i(Q, C) = x_i(Q', C)$.

Principe séquentiel radial (PSR) Il s'agit d'une version plus faible de la propriété précédente. Elle dit que la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par une **augmentation proportionnelle** des demandes (multidimensionnelles) des entités dont les contributions sont plus élevées que la sienne. On la définit formellement comme suit. Soit une entité i et deux demandes Q et Q' telles que :

- $q'_j = q_j$ pour $j = i$ et pour tout j tel que $x_j(Q, C) < x_i(Q, C)$,

– $q'_j = \beta_j q_j$ avec $\beta_j \geq 1$ pour tout j tel que $x_i(Q,C) \leq x_j(Q,C)$.

On devrait alors avoir $x_i(Q,C) = x_i(Q',C)$.

3.2.3 Traitement des entités négligeables

Les propriétés de cette sous-section constituent une suite naturelle au principe séquentiel. On pourrait avoir de sérieux doutes sur une règle qui imputerait une part de coûts positive à une entité qui aurait une demande nulle. Une des propriétés énoncées ci-dessous va plus loin, en exigeant que les parts des autres agents soient insensibles à l'élimination d'une entité dont la demande est nulle. Il y a également une part de cohérence dans une telle propriété. Une propriété encore plus forte exige que les contributions des autres agents soient insensibles à l'élimination d'une entité dont l'ajout de la demande à n'importe quel sous-ensemble des autres entités, entraîne toujours un accroissement de coûts égal à son coût de faire cavalier seul, ce qui implique que cet agent paie son coût de faire cavalier seul. Une dernière propriété exige que les contributions des agents soient ordonnées de la même façon que leurs coûts de faire cavalier seul.

Dans les définitions qui suivent, Q_{-i} est le vecteur des demandes Q duquel on a éliminé la composante q_i alors que C_{-i} est la restriction de C au vecteur Q_{-i} et $x^{N\setminus\{i\}}$ celle de la règle x à (Q_{-i}, C_{-i}).

Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN) Si une entité a une demande nulle, les contributions des autres ne devraient pas dépendre de la présence ou non de cette entité dans le problème de partage. Formellement, si $q_i = 0$, alors :

$$x_j^{N\setminus\{i\}}(Q_{-i}, C_{-i}) = x_j\left(Q^{N\setminus\{i\}}, C\right) \ \forall j \in N\setminus\{i\}$$

ce qui implique $x_i\left(Q^{N\setminus\{i\}}, C\right) = 0$.

Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN) Une entité i est négligeable pour un problème (Q,C) si $C\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - C\left(Q^S\right) = c_i(q_i)$ pour tout sous-ensemble $S \subset N\setminus\{i\}$. Une entité est négligeable si elle est négligeable quel que soit le problème.

On dit qu'une règle de répartition est insensible à l'élimination d'une entité négligeable si les contributions exigées des autres entités restent les mêmes une fois éliminée l'entité négligeable du problème de répartition des coûts. Cette propriété implique que l'entité négligeable paie exactement son coût de faire cavalier seul. Elle va cependant plus loin en spécifiant que le retrait de cette entité du problème de partage ne doit pas changer les contributions des autres. Elle constitue donc une forme de cohérence. Formellement, si l'entité i est négligeable, on doit avoir :

$$x_j^{N\setminus\{i\}}\left(Q_{-i}, C_{-i}\right) = x_j\left(Q, C\right)\ \forall j \in N\setminus\{i\}$$

ce qui implique $x_i\left(Q, C\right) = c_i\left(q_i\right).$

Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP) Le classement des contributions de deux entités ne doit pas dépendre de la demande des autres entités. Formellement, étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et deux entités i et j tels que $q_i = q_i'$ et $q_j = q_j'$, on doit avoir :

$$x_i\left(Q, C\right) \leq x_j\left(Q, C\right) \Leftrightarrow x_i\left(Q', C\right) \leq x_j\left(Q', C\right)$$

Remarque 3.2 La propriété (IEN) implique évidemment (IDN). Par contre, dans la mesure où le coût incrémental d'ajouter une entité dont la demande est nulle à d'autres est toujours nul, la propriété (IDN) est plus faible que (IEN). S'il s'agit de comparer les propriétés (IEN) et (INP), aucune n'est plus forte que l'autre.

3.2.4 Monotonie

On s'attend généralement à ce que les entités paient davantage lorsqu'elles augmentent leurs exigences ou quand les coûts augmentent. La monotonie par rapport aux coûts et la monotonie par rapport à la demande, définies ci-après, traduisent cette préoccupation. Dans certaines circonstances, on peut aussi s'intéresser à la façon dont la contribution d'une entité peut être affectée par le changement de la demande des autres entités. Dans certains cas, elles peuvent augmenter et dans d'autres diminuer. On parle de monotonie croisée positive quand elles augmentent toutes et négative quand elles diminuent toutes. Ces propriétés s'avèrent très fortes dans un contexte général et il faudra souvent se contenter de la monotonie le long d'un rayon.

Monotonie par rapport aux coûts (MCT) Cette propriété veut que, si les coûts devaient s'avérer plus élevés que prévu, quelle que soit l'ampleur du projet ou les niveaux de production à réaliser, alors les parts des coûts imputées aux différentes entités ne devraient pas diminuer. Formellement, étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q, C') tels que $C\left(Q\right) \leq C'\left(Q\right)$, on devrait avoir $x_i\left(Q, C\right) \leq x_i\left(Q, C'\right)$ pour chaque entité i. On peut la voir comme une propriété incitative. Les entités devraient être encouragées à réduire leurs coûts en les faisant bénéficier de ces réductions. Comme on le verra, cette propriété est très forte et est satisfaite par très peu de méthodes. Il existe des formes plus faibles de monotonie par rapport aux coûts sur lesquelles on reviendra en temps et lieu.

Monotonie par rapport à la demande (MD) Cette propriété exige que la contribution demandée à une entité ne décroisse jamais par rapport aux quantités demandées par cette entité. Formellement, si on a deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et une entité i tels que $q_i \leq q_i'$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_i(Q, C) \leq x_i(Q', C)$.

Dans la mesure où une augmentation de la demande entraîne généralement une augmentation de coût, on peut s'attendre à ce que (MD) soit violée lorsque (MCT) l'est.

Monotonie par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MDR) Cette propriété, conçue pour les demandes multidimensionnelles, exige que la contribution exigée d'une entité ne décroisse jamais lorsque cette entité augmente les quantités qu'elle demande de façon proportionnelle. Formellement, si on a deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et une entité i tels que $q_i' = \beta q_i$ avec $\beta > 1$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_i(Q, C) \leq x_i(Q', C)$.

Monotonie croisée positive par rapport à la demande (MCP) La monotonie croisée positive dans la demande exige que l'accroissement de la demande d'une entité n'entraîne pas de baisse des contributions exigées des autres entités. Formellement, si on a deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et une entité i tels que $q_i \leq q_i'$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_j(Q, C) \leq x_j(Q', C)$ pour toutes les entités autres que i.

Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN) Si on a deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et une entité i tels que $q_i \leq q_i'$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_j(Q, C) \geq x_j(Q', C)$ pour toutes les entités autres que i.

Monotonie croisée (positive MCPR ou négative MCNR) par rapport à des changements proportionnels dans la demande La contribution exigée d'une entité ne doit pas décroître ou croître lorsqu'une autre entité augmente les quantités qu'elle demande de façon proportionnelle.

3.2.5 Bornes sur les contributions

Au delà des propriétés normatives qui précèdent, une entité sera souvent intéressée à connaître a priori les contributions minimale et maximale qu'on pourra exiger d'elle. Par exemple, si les entités sont libres de participer à un projet commun, chacune d'elle le fera si elle est assurée de ne pas payer plus que son coût de faire cavalier seul, une propriété qu'on appelle la participation. Les entités peuvent exiger davantage dans la mesure où des sous-groupes pourraient toujours choisir de former des alliances pour répondre à leurs besoins. Pour contrer ce type de déviation, on ne devrait pas exiger davantage des membres de toutes les coalitions possibles que le coût auquel ces coalitions pourraient fonctionner seules. Une répartition qui rencontre cette propriété appartient au *coeur* du jeu de coût, tel que défini dans les chapitres 2 et 5. On sait que le coeur existe en présence d'économies d'échelle.

En cas de déséconomies d'échelle, au moins une entité devra payer davantage que son coût de faire cavalier seul. C'est dire que le coeur n'existe pas. On peut néanmoins forcer les entités à coopérer et à partager les coûts parce qu'un projet commun peut comporter des avantages, esthétiques par exemple, pour l'ensemble de la société. Autant on peut considérer comme équitable que les entités ne paient pas plus que leur coût de faire cavalier seul lorsque c'est possible, autant on devrait exiger que chaque entité paie au moins son coût de faire cavalier seul et que les membres de chaque coalition possible paient ensemble au moins le coût auquel elle pourrait fonctionner seule lorsque cela est possible, comme lorsqu'il y a déséconomies d'échelle. On dira d'une répartition qui rencontre cette propriété qu'elle satisfait le test de l'anti-coeur.

Participation (PA) La participation veut qu'aucune entité ne se voit imputer une part des coûts supérieure à son coût de faire cavalier seul, c'est-à-dire $x_i(Q,C) \leq c_i(q_i)$ pour tout i.

Anti-participation (APA) C'est l'inverse de la propriété précédente. Chaque unité paie au moins son coût de faire cavalier seul, c'est-à-dire $x_i(Q,C) \geq c_i(q_i)$ pour tout i.

Test du coeur (CO) Une répartition passe le test du coeur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'entités ne dépasse pas le coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété. Formellement, $\sum_{i\in S} x_i(Q,C) \leq C\left(Q^S\right)$, pour tout sous-ensemble S de N. On peut écrire cette inégalité sous la forme $\sum_{i\in S} x_i(Q,C) \geq C(Q) - C\left(Q^{N\backslash S}\right)$. Sous cette forme, la propriété veut que chaque coalition se voit imputer un montant au moins aussi élevé que le coût supplémentaire qu'elle impose à la coalition complémentaire $N\backslash S$ lorsqu'elle la rejoint pour former la grande coalition N. Si ce n'était pas le cas, les membres de la coalition $N\backslash S$ verseraient un subside aux membres de la coalition S, d'où une objection possible de leur part. On peut donc voir (CO) comme une condition spécifiant l'absence d'interfinancement ou encore la robustesse à la sécession.

Le test du coeur implique évidemment la participation dans la mesure où on admet les singletons comme coalitions dans le test du coeur.

Test de l'anti-coeur (ACO) Une répartition passe le test de l'anti-coeur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'entités n'est pas inférieure au coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété. Formellement, $\sum_{i\in S} x_i(Q,C) \geq C\left(Q^S\right)$, pour tout sous-ensemble S de N, lorsque possible.

Suit une proposition qui relie ces dernières propriétés à la monotonie croisée.

Proposition 3.1 *Toute règle qui satisfait à la monotonie croisée négative par rapport à des changements proportionnels dans la demande satisfait également au test du coeur. À l'inverse, toute règle qui satisfait à la monotonie croisée positive par rapport à des changements proportionnels dans la demande satisfait au test de l'anti-coeur.*

Le premier énoncé a été démontré par Moulin (1986) dans le contexte d'un seul bien privé homogène. Il a été généralisé par Téjédo et Truchon (2002) à l'anti-coeur et au contexte plus général. En fait, les versions plus faibles de monotonie croisée que sont (MCNR) et (MCPR) leur suffisent pour établir ces résultats.

Il ne serait pas raisonnable d'exiger les propriétés (PA) et encore moins (CO) dans toutes les circonstances. Tout au plus devrait-on exiger d'une règle qu'elle donne des répartitions qui satisfont (PA) ou (CO) lorsque de telles répartitions existent. Dans le cas de (CO), on dit alors que le coeur existe. On sait que c'est le cas en présence d'économies d'échelle. La satisfaction de (PA), quant à elle, est possible sous l'hypothèse $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$. Le même genre de remarque s'applique à (MCN). Une telle condition a du sens uniquement en présence d'économies d'échelle.

3.3 Propriétés de cohérence

On peut souhaiter une certaine cohérence de la part d'une règle de partage de coûts, par exemple qu'elle donne les mêmes résultats, peu importe les unités de mesure qui sont utilisées ou peu importe qu'on l'applique séparément à divers éléments de coût ou globalement à l'ensemble des coûts ou encore qu'on l'applique séparément à certaines entités ou à l'ensemble des entités. Les propriétés qui suivent sont de cette nature.

3.3.1 Insensibilité aux unités de mesure

On a souvent le choix des unités dans lesquelles on va exprimer les caractéristiques des demandes et des projets dont on doit partager les coûts. Par exemple, on peut exprimer la longueur d'une piste d'atterrissage en mètres ou en pieds, la résistance d'un barrage en Kg par centimètre carré ou en livres par pouce carré, la température minimale à laquelle il devra résister en degrés Celsius ou Fahrenheit. On ne voudrait évidemment pas que la fraction des coûts échéant à chaque entité dépende du choix des unités. En particulier, on voudrait que les répartitions produites par une règle soient insensibles à des transformations linéaires (changements proportionnels) des unités de mesure. S'il s'agit de passer des degrés Celsius à Fahrenheit, on parle alors de transformation affine (changements proportionnels plus ajout ou retrait d'une constante). On peut même aller plus loin et décider de mesurer la demande d'une entité en termes de son coût de faire cavalier seul, comme avec la règle séquentielle radiale. Dans la mesure où ce coût n'est pas proportionnel à la demande, il s'agit là d'une transformation non linéaire des quantités en unités monétaire. L'ordinalité exige qu'une règle ne soit pas affectée par une telle transformation. Elle couvre également le cas des transformations affines.

Insensibilité aux unités de mesure (IU) Une règle de partage de coûts est insensible aux unités de mesure si une transformation linéaire des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts. Pour énoncer formellement cette propriété, on définit deux problèmes (Q, C) et (Q', C') comme étant *équivalents* s'il existe un vecteur $\lambda = (\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{nm_n})$ strictement positif, de même dimension que Q, tel que[1] $Q = \lambda \otimes Q' \equiv \left(\lambda_{11} q'_{11}, \ldots, \lambda_{nm_n} q'_{nm_n}\right)$ et $C'(Q') = C\left(\lambda \otimes Q'\right)$. On permet donc que les quantités d'un même bien demandées par deux entités différentes soient transformées par un scalaire différent. L'insensibilité

[1] Se référer à la sous-section 2.2.1 pour les définitions de Q et q_{im_i} .

aux unités de mesure exige que, pour deux problèmes (Q,C) et (Q',C') équivalents, on ait $x_i(Q,C) = x_i(Q',C')$ pour tout i.

Ordinalité (O) Une règle de partage de coûts satisfait l'ordinalité si une transformation croissante des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts. Ici, on définit deux problèmes (Q,C) et (Q',C') comme étant *ordinalement équivalents* s'il existe une liste $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de transformations bijectives, une pour chaque entité, telles que $Q = f(Q') = (f_1(q_1'), \ldots, f_n(q_n'))$ et $C'(Q') = C(f(Q')).$ L'ordinalité exige que, pour deux problèmes (Q,C) et (Q',C') ordinalement équivalents, on ait $x_i(Q,C) = x_i(Q',C')$ pour tout i.

Ordinalité radiale (OR) Pour l'ordinalité radiale, on impose que chaque fonction f_i qui peut être appliquée à la demande de l'entité i transforme tout rayon de l'espace de ses demandes en un rayon (possiblement le même). Deux problèmes (Q,C) et (Q',C') dont l'un est obtenu par une telle transformation sont dits *radialement équivalents*. L'ordinalité radiale exige que, pour deux problèmes (Q,C) et (Q',C') radialement équivalents, on ait $x_i(Q,C) = x_i(Q',C')$ pour tout i. C'est une propriété plus faible que l'ordinalité dans la mesure où on restreint le type de transformation qu'on peut faire subir à un problème.

Remarque 3.3 Toutes les règles qui sont définies uniquement en termes des coûts $c_i(q_i)$, $ca_i(Q)$ ou $cm_i(Q)$ satisfont à l'ordinalité (O), dans la mesure où ces coûts sont insensibles au choix des unités pour exprimer les demandes. Par contre, les règles qui font intervenir les quantités ou les dérivées des fonctions de coût violent cette propriété. Certaines de ces dernières satisfont cependant à l'insensibilité aux unités de mesure (IU).

3.3.2 Propriétés de séparation

On regroupe ici des propriétés qui veulent que, si la fonction de coût peut être séparées selon les entités, il devrait en être de même pour la répartition des coûts ; si les coûts peuvent être décomposés en plusieurs éléments, la règle de partage de coûts devrait donner les mêmes résultats, qu'on l'applique séparément aux divers éléments de coût, comme par exemple les coûts spécifiques et communs, ou globalement à l'ensemble des coûts ; et la règle devrait exiger les mêmes contributions d'un sous-ensemble d'entités si on la lui applique, après avoir prélevé ce qui est dû par les autres entités.

Séparation entre entités (SE) La séparation entre entités exige que, si les coûts sont séparables entre les entités, les parts des coûts imputées aux entités devraient correspondre aux coûts qui leur sont imputables. De façon formelle, si $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$, on doit avoir $x_i(Q,C) = c_i(q_i)$.

Proportionnalité (PR) Cette propriété veut que, si les coûts sont proportionnels à la demande, il devrait en être de même des contributions. Formellement, s'il existe un vecteur A de même dimension et configuration que Q tel que $C(Q) = A \cdot Q \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$, on doit avoir $x_i(Q,C) = a_i \cdot q_i \equiv \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$ pour tout i.

On voit immédiatement que (SE) implique (PR) dans la mesure où $A \cdot Q$ est une fonction séparable. Il est également à noter que cette définition est plus forte que celle de Moulin et Shenker (1994). En effet, ils posent $a_{ih} = \alpha \geq 0 \ \forall i, h$.

Additivité (AD) L'additivité veut que, si on peut séparer les coûts d'un projet en deux composantes, disons C_1 et C_2, répartir les composantes séparément devrait mener au même résultat que la répartition des coûts totaux. De façon formelle :

$$x_i(Q, C_1 + C_2) = x_i(Q, C_1) + x_i(Q, C_2) \text{ pour tout } i$$

Si cette propriété est vraie pour deux composantes, elle l'est également pour un nombre quelconque de composantes.

Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC) Il s'agit d'un cas particulier de l'additivité. Un problème de partage (Q,C) est décomposable en coûts spécifiques ou directs et coûts communs si on peut écrire :

$$C(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q) + cc(Q)$$

Une méthode de partage de coûts x est insensible à une telle décomposition si :

$$x_i(Q,C) = ca_i(Q) + x_i(Q, cc) \ \forall i$$

Avec une méthode insensible à ce type de décomposition, peu importe qu'on décompose les coûts ou non et peu importe la décomposition, la répartition du coût total sera la même.

Cohérence (CH) Bien que les autres propriétés de cette sous-section soient aussi des propriétés de cohérence, la présente, qui prend plusieurs formes dans la littérature, dit essentiellement que, si une ou plusieurs entités devaient se retirer du problème de partage des coûts, après avoir payé leur contribution selon la règle de partage en vigueur, et que les membres restants devaient satisfaire à toute la demande, la contribution de ces derniers aux coûts résiduels, selon la même règle, ne devrait pas être différente de ce qu'elle aurait été dans le problème de partage original. De façon formelle, étant donné une règle de partage x et un sous-ensemble d'entités $S \subset N$, définissons la fonction de coût résiduel $C^{N\backslash S}$ des autres entités par :[2]

$$C^{N\backslash S}\left(Q_{N\backslash S}\right) = \max\left\{C\left(Q\right) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C),\ 0\right\}$$

La cohérence exige :

$$x_i^{N\backslash S}\left(Q_{N\backslash S}, C^{N\backslash S}\right) = x_i(Q,C)\ \forall i \in N\backslash S$$

Cohérence faible (CHF) Étant donné un problème (Q,C) et un sous-ensemble d'entités $S \subset N$ **ayant les plus petites demandes,** c'est-à-dire tel que $c_i(q_i) \leq c_j(q_j)$ pour tout $i \in S$ et tout $j \in N\backslash S$, on doit avoir $x_i^{N\backslash S}\left(Q_{N\backslash S}, C^{N\backslash S}\right) = x_i(Q,C)$ pour tout i dans $N\backslash S$. En mots, si un certain nombre d'entités ayant les plus petites demandes, en termes des coûts de faire cavalier seul, devaient quitter le problème après avoir payé leur dû selon la règle de partage en vigueur et qu'on appliquait la même règle pour répartir entre les autres le coût résiduel de la demande totale, leurs contributions seraient les mêmes que dans le problème original.

La proposition qui suit établit la relation entre quelques propriétés d'insensibilité aux décompositions. La démonstration en est donnée à l'annexe 3.A.2.

Proposition 3.2 *1. (AD) implique (IDC) ;*

2. (IDC) et (IDN) impliquent (IEN) ;

3. (IEN) implique (SE) ;

4. (PA) de même que (APA) impliquent (SE).

[2] Cette définition est due à Hart et Mas-Colell (1989). Pour une définition plus faible de cohérence, voir le chapitre 5 et l'annexe 3.A.6.

3.4 Quelques résultats

Dans la mesure où une entité qui a une demande nulle n'a aucun impact sur les coûts quels qu'ils soient, toutes les règles recensées ici, sauf la répartition égalitaire, satisfont l'Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN). Il s'agit donc d'une propriété très faible.

Dans la suite, certaines propriétés sont satisfaites par certaines règles lorsqu'il y a économies d'échelle. On définit précisément ce qu'on entend par économies et déséconomies d'échelle en annexe. En bref, on dit qu'il y a économies d'échelle si les coûts incrémentaux sont décroissants par rapport à l'ampleur des demandes. Il est à noter que si une règle satisfait à une des propriétés (MCN), (PA) et (CO) quand on a économies d'échelle, elle satisfait à la propriété inverse, c'est-à-dire (MCP), (APA) ou (ACO) quand on a déséconomies d'échelle. Pour abréger la présentation, on ne va pas toujours l'énoncer explicitement.

3.4.1 Propriétés des règles de répartition proportionnelle

On a le résultat général suivant pour les règles de répartition proportionnelle.

Proposition 3.3 *Toutes les règles qui ont la forme qui suit satisfont à la cohérence (CH) :*

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j} \left(C\left(Q\right) - \sum_{j=1}^{n} xb_j \right)$$

La démonstration est donnée à l'annexe 3.A.3 de même que les démonstrations concernant les propriétés qui sont satisfaites ou non par les différentes règles de répartition proportionnelle.

La règle des coûts moyens

La règle des coûts moyens, qui n'est définie que dans un contexte où les demandes sont unidimensionnelles, satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des égaux (TEE)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)

- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
- Proportionnalité (PR)
- Séparation entre entités (SE)
- Cohérence (CH)

Dans les contextes où cette règle peut s'appliquer, (TEE), (S) et (TE) sont équivalentes. Cette règle est la seule à satisfaire à deux sous-ensembles des conditions qui précèdent. Ils sont précisés dans les propositions qui suivent.

Proposition 3.4 (Moulin et Shenker, 1994) *La règle des coûts moyens est la seule qui satisfait à (PR) et à (MCT).*

En fait, cette règle satisfait à la condition plus forte qu'est (SE). Comme plusieurs autres règles satisfont à (PR), cette proposition implique que ces autres règles ne peuvent satisfaire à la monotonie telle que définie par Moulin et Shenker et encore moins à (MCT). Il y a aussi de fortes chances qu'elles violent également la monotonie par rapport à la demande (MD), dans la mesure où l'augmentation de la demande se traduit souvent en des augmentations de coûts.

Proposition 3.5 (Moulin et Shenker, 1994) *La règle des coûts moyens est la seule qui satisfait à (A), (CH), (PR) et (TEE).*

La règle égalitaire

La règle qui consiste à répartir les coûts de façon égalitaire entre les entités satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée positive par rapport à la demande (MCP)
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)

– Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
– Cohérence (CH)

Il faut cependant noter que la plupart de ces propriétés sont satisfaites de façon triviale. Elles le sont parce que les contributions exigées de toutes les entités sont toujours égales entre elles. La monotonie croisée négative n'est pas satisfaite parce que l'accroissement de la demande de la part d'une entité entraîne toujours une augmentation de la part des coûts imputées aux autres entités, même quand il y a économies d'échelle.

La méthode des bénéfices résiduels

Cette règle satisfait aux propriétés suivantes :

– Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
– Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
– Participation (PA) sous les hypothèses $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$
– Anti-participation (APA) sous les hypothèses $C(Q) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \geq c_i(q_i)\ \forall i$
– Séparation entre entités (SE)
– Ordinalité (O)
– Cohérence (CH)

Étant donné $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$, l'hypothèse $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ est assez naturelle. S'il en coûte moins cher à se regrouper qu'à fonctionner de façon isolée, le coût incrémental de se joindre aux autres ne devrait pas être plus élevé que le coût de faire cavalier seul. C'est une hypothèse plus faible que la concavité.

Concernant le test du coeur, on a le résultat suivant qui est essentiellement dû à Young (1994).

Proposition 3.6 *Sous les hypothèses $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$, la règle des bénéfices résiduels donne des répartitions qui satisfont :*

$$\left.\begin{array}{r} x_i \leq c_i(q_i) \\ \sum_{j \in N\backslash\{i\}} x_j \leq C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right) \end{array}\right\} \forall i \tag{3.1}$$

lorsque de telles répartitions existent. En particulier, si $n \leq 3$, elle donne des répartitions qui satisfont à (CO) lorsque possible.

On a évidemment la conclusion inverse avec les hypothèses inverses. L'ensemble des répartitions qui satisfont à (3.1) forme ce qu'on appelle le *semi-coeur*. Ce dernier se confond au coeur pour $n \leq 3$. Le test du coeur n'est cependant pas nécessairement satisfait lorsque $n > 3$. Young (1994) donne un exemple avec cinq entités où (CO) est violée, alors que le coeur existe. Cependant son exemple ne satisfait pas à une des implications des économies d'échelle définies à l'annexe 3.A.1.

Les méthodes comptables

Les trois méthodes présentées sous le titre de méthodes comptables dans le chapitre 2 satisfont aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Participation (PA) sous les hypothèses $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ et $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$
- Anti-participation (APA) sous les hypothèses $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ et $C(Q) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$
- Séparation entre entités (SE), lorsque $C(Q) = \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q)\ \forall i$ et $cc(Q) = 0$
- Ordinalité (O), dans la mesure où les $ca_i(Q)$ sont insensibles au changement d'unités
- Cohérence (CH)

Pour les méthodes de Louderback et de Balachandran et Ramakrishnan, on a aussi :

- Insensibilité des contributions des contributions aux entités négligeables (IEN) lorsque $C(Q) = c_i(q_i) + C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q)$.
- Insensibilité des contributions à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC) quand $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q) + cc(Q)$ implique $cc\left(Q^{\{i\}}\right) = c_i(q_i) - ca_i(Q)\ \forall i$

L'hypothèse $C(Q) = \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q)\ \forall i$ et donc $cc(Q) = 0$, sous laquelle (SE) est satisfaite, est naturelle. En effet, si le coût total est la somme des coûts de faire cavalier seul, cela signifie que le bénéfice à la coopération est nul. Dans ce cas, les coûts de faire cavalier seul deviennent naturellement les coûts attribuables aux entités.

La répartition proportionnelle aux coûts marginaux

Cette méthode satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Monotonie par rapport à la demande (MD), s'il y a économies d'échelle
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle

– Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
– Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
– Insensibilité aux unités de mesure (IU)
– Proportionnalité (PR)
– Cohérence (CH)

La répartition proportionnelle aux coûts marginaux est une extension de la règle des coûts moyens. Elle devient cette dernière dans le contexte d'un seul bien privé homogène. Elle satisfait également à une condition qui n'a pas été définie plus haut et qu'on appelle l'*indépendance locale (IL)*. Cette condition veut que deux demandes qui ont le même coût marginal se voient imputer les mêmes parts du coût total. On a d'ailleurs le résultat suivant dû à Wang (2002).

Proposition 3.7 *La répartition proportionnelle aux coûts marginaux est la seule extension de la règle des coûts moyens qui satisfait à (IL) et à (IU).*

3.4.2 Propriétés des règles inspirées de la théorie des jeux

La tarification à la Aumann-Shapley

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

– Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
– Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
– Monotonie par rapport à la demande (MD), s'il y a économies d'échelle
– Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
– Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
– Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
– Séparation entre entités (SE)
– Proportionnalité (PR)
– Insensibilité aux unités de mesure (IU)
– Additivité (AD)
– Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

En présence d'économies d'échelle, comme cette méthode satisfait à (MCN), elle satisfait forcément à (MD). Autrement, rien ne garantit que (MD) est respectée.

On a vu, dans le survol des méthodes du chapitre 2, que la règle Aumann-Shapley est une généralisation de la règle des coûts moyens pour les demandes unidimensionnelles et homogènes. En fait, on doit à Friedmann et Moulin (1998) la caractérisation qui suit de cette règle.

Proposition 3.8 (Friedmann et Moulin, 1998) *La règle Aumann-Shapley est la seule qui satisfait à (IU) et qui soit une généralisation de la règle des coûts moyens pour les demandes unidimensionnelles et homogènes.*

Comme la règle satisfait à (SE), elle satisfait forcément à (PR) et, en vertu de la Proposition 3.4, elle ne peut satisfaire à la condition plus forte (MCT). Cependant, Young (1985a) montre que cette règle satisfait à une forme de monotonie par rapport aux coûts plus faible que (MCT). Dans le contexte général de ce chapitre, elle s'énonce comme suit. Étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q, C') et une entité i tels que[3] $\partial_i \hat{C}(\lambda, \ldots, \lambda) \leq \partial_i \hat{C}'(\lambda, \ldots, \lambda) \;\; \forall \lambda \in [0,1]$, alors $x_i(Q, C) \leq x_i(Q, C')$. En mots, si le coût marginal de l'entité i augmente, il doit en aller de même de sa contribution aux coûts.

Young va plus loin. Il montre que la règle Aumann-Shapley est la seule à satisfaire à la condition suivante, qu'il appelle la *monotonie symétrique*. Étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q, C') et deux entités i et j tels que $\partial_i \hat{C}(\lambda, \ldots, \lambda) \leq \partial_j \hat{C}'(\lambda, \ldots, \lambda) \;\; \forall \lambda \in [0,1]$ alors $x_i(Q, C) \leq x_j(Q, C')$.

La méthode Shapley-Shubik

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

- Symétrie (S)
- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre entités (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

[3] La définition de $\hat{C}$ est rappelée à l'annexe 3.A.4.

On trouve un certain nombre de caractérisations de cette règle dans la littérature dont les deux suivantes, qui se ressemblent d'ailleurs.

Proposition 3.9 (Sprumont, 1998) *La règle Shapley-Shubik est la seule qui satisfait à (AD), (IEN), (S) et (O).*

Proposition 3.10 (Friedmann et Moulin, 1998) *La règle Shapley-Shubik est la seule qui satisfait à (AD), (IEN), (S), (IU) et (MD).*

Notez que ces auteurs utilisent en fait une version plus faible de (IEN) mais cette règle satisfait la version qui a été définie ici. Encore ici, (MCT) n'est pas satisfaite. Cependant, Young (1985b) montre que cette règle satisfait à une forme de monotonie par rapport aux coûts plus faible que (MCT). Elle s'énonce comme suit. Étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q, C') et une entité i tels que $C\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - C\left(Q^{S}\right) \leq C'\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - C'(Q)$ pour tout $S \subset N\backslash\{i\}$, alors $x_i(Q, C) \leq x_i(Q, C')$. Il s'agit d'une version discrète de la condition qu'il a formulée pour la règle Aumann-Shapley. Il montre également que la règle Shapley-Shubik est la seule à satisfaire à cette condition, tout en traitant les entités de façon anonyme.

Le nucléole

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre entités (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

Dans le chapitre 5, on énonce une caractérisation de cette règle, due à Sobolev (1975).

3.4.3 Propriétés de la répartition séquentielle

On traite séparément la règle séquentielle originale et la règle radiale puisqu'il s'agit de deux règles avec des propriétés différentes. On rappelle que la règle séquentielle originale s'applique uniquement au cas des demandes unidimensionnelles et homogènes.

La règle séquentielle originale

Cette règle satisfait aux propriétés suivantes :
- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Principe séquentiel (PS)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre entités (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)
- Cohérence faible (CHF)

Par définition, la règle séquentielle est la seule à satisfaire à (TEE) et à (PS). Moulin et Shenker (1992) ajoutent une autre propriété à la liste qui précède, qu'ils appellent la *Gratuité pour les demandes identique de coût nul* (GR). Cette propriété dit que, s'il est possible de fournir une même quantité identique à q_i à toutes les entités à un coût nul, l'entité i ne devrait pas avoir à payer quoi que ce soit et les parts des autres ne devraient pas être affectées par la demande de l'entité i.

$$C\left(\overbrace{q_i,\ldots,q_i}^{n\text{ fois}}\right)=0\Rightarrow x_j^{N\backslash\{i\}}\left(Q_{-i},C_{-i}\right)=x_j\left(Q,C\right)\ \forall j\in N\backslash\left\{i\right\}$$

C'est une propriété qui a du sens dans les contextes où la fonction de coût est symétrique. C'est une autre des caractéristiques de la règle séquentielle obtenue par Moulin et Shenker (1992).

Proposition 3.11 (Moulin et Shenker) *La règle de répartition séquentielle est la seule qui satisfait à (AD), (RG), (PR) et (GR).*

Dans le cas de déséconomies d'échelle, les entités vont devoir payer au moins leur coût de faire cavalier seul sous la règle séquentielle. Elles peuvent alors se demander s'il y a un majorant à leur contribution. Moulin et Shenker (1992) ont établi le résultat suivant :

$$x_i \leq \frac{c\,(n\,q_i)}{n}\ \forall i \in N$$

Autrement dit, une entité est assurée de ne jamais payer plus que la contribution moyenne qui serait exigée d'elle si toutes les autres entités avaient la même demande qu'elle. C'est assez équitable comme majorant.

La règle séquentielle radiale

La règle séquentielle radiale satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Principe séquentiel radial (PSR)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MDR)
- Monotonie croisée négative par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MCNR), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre entités (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (OR)
- Cohérence faible (CHF)

On peut également garantir un majorant aux contributions des entités dans le contexte multidimensionnel. Étant donné une entité i, construisons un vecteur de demande $\tilde{Q}^i$ en changeant proportionnellement les demandes des autres entités de façon à ce que $c_j\left(\tilde{q}_j^i\right) = c_i\,(q_i)\ \forall j$. Les demandes des entités pour lesquelles $c_j\,(q_j) < c_i\,(q_i)$ se trouvent ainsi à être augmentées et celles pour lesquelles $c_j\,(q_j) > c_i\,(q_i)$ à être diminuées. Téjédo et Truchon (2001) montrent que la règle de répartition séquentielle radiale donne une répartition qui respecte :

$$x_i \leq \frac{C\left(\tilde{Q}^i\right)}{n}\ \forall i \in N$$

Koster, Tijs et Borm (1998) ont démontré la proposition suivante dans le cas des demandes homogènes. Elle demeure vraie dans le contexte plus général retenu ici, comme le montrent Téjédo et Truchon (2000).

Proposition 3.12 (Koster, Tijs et Borm, 1998) *La règle de répartition séquentielle radiale est la seule qui satisfait à (TE) et à (PSR).*

Dans le cas où chaque entité demande un seul bien qui lui est spécifique, la règle radiale devient la règle axiale et on a alors cette autre caractérisation.

Proposition 3.13 (Sprumont, 1998) *La règle séquentielle axiale est la seule à satisfaire à (O), (PS), (IDN), (INP) et (S).*

Téjédo et Truchon (2002) montrent qu'il n'existe pas de caractérisation semblable dans le contexte plus général considéré ici. On aura noté qu'on a gagné l'ordinalité avec la règle radiale et donc avec la règle axiale, alors que la règle originale ne satisfait même pas à (IU). Ce gain est attribuable à l'utilisation des coûts de faire cavalier seul plutôt que les quantités pour classer les demandes et construire les demandes intermédiaires. Par contre, on a perdu l'additivité. En fait, la proposition suivante établit qu'il n'est pas possible de généraliser la répartition séquentielle au contexte multidimensionnel tout en exigeant (IU) et (AD).

Proposition 3.14 (Kolpin, 1996) *Il n'existe pas de généralisation de la règle de répartition séquentielle qui satisfait à (IU) et à (AD).*

3.4.4 Tableaux synoptiques

Dans le Tableau 3.1, on indique quelles méthodes de répartition présentées dans le chapitre 2 satisfont à certaines des différentes propriétés qui ont été énoncées plus haut. Un «O» indique que la méthode de la rangée correspondante satisfait à la propriété en question, un «R» qu'elle satisfait à la forme radiale de la propriété, un «Q» qu'elle satisfait à la propriété en présence d'économies d'échelle, et un «N» que la propriété n'est pas satisfaite, c'est-à-dire qu'il existe des contextes ou problèmes dans lesquels elle est violée. Dans certains cas, on indique le nom d'une propriété plus faible ou apparentée qui est vérifiée en lieu de la condition proprement dite. LB signifie que la propriété est satisfaite par les méthodes de Louderback et de Balachandran et Ramakrishnan.

La propriété (IDN) n'apparaît pas dans ce tableau parce qu'elle est satisfaite par toutes les méthodes, sauf la répartition égalitaire. D'autres propriétés n'y apparaissent pas non plus parce qu'elles sont apparentées à d'autres qui s'y trouvent.

Le tableau est séparé horizontalement en deux parties. La partie supérieure concerne deux règles qui ne peuvent être utilisées qu'avec des demandes portant sur un bien privé homogène alors que les règles de la partie inférieure peuvent être appliquées à un contexte très général. Le tableau est également séparé verticalement en deux parties. La partie de gauche regroupe les conditions de type équité et la partie de droite celles de type cohérence. La distinction entre les deux est cependant parfois ténue, comme on a pu le voir.

Rappelons les abréviations des propriétés :

RG : préservation des rangs
TEE : traitement égalitaire des égaux
S : symétrie
TE : traitement égalitaire des équivalents
PS : principe séquentiel
PSR : principe séquentiel radial
IDN : insensibilité des contributions aux demandes nulles
IEN : insensibilité des contributions aux entités négligeables
GR : gratuité pour des demandes identiques de coût nul
INP : insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes
MCT : monotonie par rapport aux coûts
MD : monotonie par rapport à la demande
MCN : monotonie croisée négative par rapport à la demande
MCP : monotonie croisée positive par rapport à la demande
PA : participation
APA : anti-participation
CO : test du coeur ou absence d'inter-financement
ACO : test de l'anti-coeur
IU : invariance par rapport aux unités de mesure
O : ordinalité
OR : ordinalité radiale
SE : séparation entre entités
PR : proportionnalité
AD : additivité
IDC : Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs
CH : cohérence
CHF : cohérence faible

	RG	TE	PS	IEN	INP	MCT	MD	MCN	PA	CO	SE	O	AD	CH
coûts moyens	O	O	N	O	O	O	O	Q	Q	Q	O	N	O	O
séquentielle originale	O	O	O	O	O	N	O	Q	Q	Q	O	O	O	CHF
égalitaire	O	O	N	N	O	O	O	N	N	N	N	O	O	O
bénéfices résiduels	N	N	N	O	N	N	N	N	Q	N	O	O	N	O
méthodes comptables	N	N	N	LB	N	N	N	N	Q	N	O	O	N	O
prop. au coût marginal	N	N	N	N	N	N	Q	Q	Q	Q	PR	IU	N	O
Aumann-Shapley	N	N	N	O	N	N	Q	Q	Q	Q	O	IU	O	N
Shapley-Shubik	N	S	N	O	N	N	O	Q	Q	Q	O	O	O	N
nucléole	N	N	N	O	N	N	N	N	Q	Q	O	O	IDC	N
séquentielle radiale	O	O	R	N	O	N	R	RQ	Q	Q	O	R	N	CHF

Tableau 3.1 – Les propriétés satisfaites par les méthodes

Généralement, on va rechercher des méthodes qui satisfont à plusieurs propriétés à la fois. Idéalement, on aimerait que le plus grand nombre de ces propriétés voire toutes soient satisfaites. Malheureusement, certaines propriétés peuvent être incompatibles entre elles. Un certain nombre de propositions ont été démontrées dans la littérature économique à ce sujet. D'autres propositions affirment que telle et telle propriété est satisfaite par telle ou telle méthode. D'autres enfin établissent qu'il y a une seule méthode qui satisfait simultanément à un ensemble donné de propriétés. On a énoncé un certain nombre de ces propositions dans ce chapitre.

Ainsi, dans le cas des demandes unidimensionnelles et homogènes, il n'y a que la règle des coûts moyens pour satisfaire à la fois aux propriétés d'additivité, de cohérence, de proportionnalité et de traitement égalitaire des équivalents (les égaux dans ce cas-ci). En prime, on obtient la monotonie par rapport aux coûts. En fait, on sait qu'elle est la seule à satisfaire à la fois à la proportionnalité et à la monotonie par rapport aux coûts.

Toujours dans un contexte unidimensionnel, la méthode de répartition séquentielle est la seule à satisfaire à la fois à la préservation des rangs, à la gratuité pour des demandes identiques de coût nul, à la proportionnalité et à l'additivité. Cette dernière méthode satisfait également à la monotonie par rapport à la demande et au principe séquentiel. Elle est en fait caractérisée par ce dernier principe et le traitement égalitaire des égaux.

Dans le cas des demandes multidimensionnelles, la règle séquentielle radiale est la seule à satisfaire à la fois au principe séquentiel radial et au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Par contre, il faut oublier l'insensibilité des contributions aux entités négligeables, l'additivité et même l'insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs.

Si on veut avoir l'additivité, l'insensibilité des contributions aux entités négligeables, la symétrie, l'invariance par rapport aux unités de mesure et la monotonie par rapport à la demande, c'est vers la règle Shapley-Shubik qu'il faut se tourner. Cette méthode est la seule à satisfaire à toutes ces propriétés à la fois. On peut même retrancher la monotonie par rapport à la demande de cette liste et remplacer l'invariance par rapport aux unités de mesure par l'ordinalité pour obtenir une autre caractérisation de la méthode Shapley-Shubik.

Ces propositions sont résumées dans le Tableau 3.2. Chaque rangée indique un ensemble de propriétés, marquées d'un «X», que la méthode est la seule à satisfaire simultanément. Le «R» signifie qu'il faut remplacer (PS) par (PSR).

	RG	TE	S	PS	IEN	GR	MCT	MD	PR	IU	O	AD	CH
coûts moyens							X		X				
coûts moyens		X							X			X	X
séquentielle originale		X		X									
séquentielle originale	X					X			X			X	
Shapley-Shubik			X		X						X	X	
Shapley-Shubik			X		X			X		X		X	
séquentielle radiale		X		R									

Tableau 3.2 – Caractérisations des méthodes

Par delà ces propriétés, la disponibilité et la qualité des données va conditionner la qualité des répartitions. Ainsi, toutes les règles qui sont basées sur la fonction C nécessitent la connaissance de cette fonction, au moins pour la demande Q et parfois pour toutes les demandes comprises dans l'ensemble défini par $0 \leq y_i \leq q_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Dans le cas de la règle séquentielle, il faut au moins pouvoir calculer le coût des demandes intermédiaires, au nombre de n. Dans le cas de la règle de répartition proportionnelle au coût marginal, il faut connaître le coût marginal de chaque entité au point Q. Pour la règle Aumann-Shapley, il faut connaître ce coût marginal tout au long du segment $[0, Q]$.

Les règles qui font intervenir la fonction $\hat{c}$ nécessitent uniquement la connaissance de cette fonction. Avec la méthode Shapley-Shubik il faut connaître la valeur de cette dernière pour les $2^n - 1$ sous-ensembles possibles d'entités. Ce dernier nombre croît assez rapidement. Il est égal à successivement $3, 7, 15, 31, 63, 127, 255$ lorsque n croit de 2 à 8. Cela ne pose évidemment aucun problème si on connaît la fonction C. Certaines règles de répartition proportionnelle font également intervenir des coûts spécifiques ca_i. La valeur de ces derniers va influencer directement la répartition des coûts.

3.5 Conclusion : choix d'une méthode

La règle des coûts moyens est d'un usage très répandu dans les contextes unidimensionnels, c'est-à-dire lorsque les demandes des entités s'expriment par un seul nombre et que ces demandes peuvent être sommées pour donner la demande globale. Cette popularité s'explique sans doute pas la simplicité de cette règle. Comme on l'a vu, elle peut se justifier également par ses nombreuses propriétés. Elle satisfait en effet à la plupart de celles qui ont été recensées dans ce chapitre.

Une exception notable est le principe séquentiel, qui rend les contributions des plus petites entités indépendantes de l'ampleur des demandes des plus grosses. Pour les situations où l'impact des plus grosses demandes sur les contributions des plus petites entités est une préoccupation importante, la règle de répartition séquentielle est toute indiquée puisqu'elle satisfait au principe séquentiel. En fait, c'est la seule à satisfaire à ce principe en même temps qu'au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Elle satisfait également à toutes les autres propriétés de la règle des coûts moyens, à l'exception de la monotonie par rapport aux coûts. De plus, elle peut être étendue à des contextes où les demandes sont hétérogènes ou multidimensionnelles.

C'est là une considération importante. Dans le chapitre 2, on a argué que la description de la plupart des problèmes réels requiert une liste de plusieurs nombres, listes qui de surcroît peuvent être différentes d'une entité à une autre. Une bonne partie de nos travaux a d'ailleurs consisté à étendre certaines méthodes de répartition à ce contexte. La pratique la plus répandue consiste à concevoir des méthodes de répartition proportionnelle pour ces contextes, en utilisant des clefs de répartition de toutes sortes. Malheureusement, le comportement des règles de répartition proportionnelle laisse beaucoup à désirer dans les contextes multidimensionnels. Les méthodes de ce type, même les plus sophistiquées, qui ont été proposées dans la littérature violent bon nombre des propriétés qu'on pourrait juger souhaitables. C'est le cas de la méthode des bénéfices résiduels, de la répartition proportionnelle aux coûts marginaux et des méthodes auxquelles on a donné le nom de *comptable* dans cet ouvrage et qui ont été proposées par Moriarity (1975), Louderback (1976) et Balachandran et Ramakrishnan (1981).

Par opposition aux méthodes de répartition proportionnelle, la règle séquentielle radiale conserve la plupart des propriétés de la règle séquentielle originale, bien que parfois sous une forme plus faible, dans les contextes multidimensionnels. La seule perte notable est l'additivité (AD) et l'insensibilité des contributions à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC). Ces dernières sont intéressantes parce qu'il arrive souvent qu'on souhaite faire la répartition des coûts, composante par composante. Par exemple, on peut vouloir répartir les coûts de capital séparément des frais d'exploitation. L'additivité garantit que, peu importe qu'il y ait décomposition des coûts ou non et peu importe la façon de les décomposer, la répartition totale sera la même. Si on sait que la méthode utilisée satisfait à cette propriété, on conviendra facilement qu'il est inutile de consacrer beaucoup d'énergie à la décomposition des coûts.

Dans le même ordre d'idée, on peut souhaiter imputer directement aux entités les coûts qui leur sont spécifiques et réserver l'utilisation d'une règle de répartition aux coûts qui sont véritablement communs. La distinction entre les deux n'étant pas toujours claire, on peut consacrer beaucoup d'efforts pour arriver à établir une telle distinction, à la satisfaction de toutes les entités. L'intérêt d'une règle qui satisfait à (IDC) est précisément qu'elle dispense de tous ces efforts parce que, en fin de compte, les résultats seront les mêmes, peu importe la décomposition adoptée.

Si les propriétés (AD) et (IDC) s'avèrent importantes, il faut oublier la règle séquentielle radiale pour les contextes multidimensionnels et se tourner plutôt vers les règles issues de la théorie des jeux coopératifs. Parmi ces dernières, celle de Shapley-Shubik est certainement la plus facile à utiliser. Avec cette dernière, on retrouve (AD) et (IDC). On gagne également l'insensibilité des contributions aux entités négligeables mais on doit sacrifier la préservation des rangs, le traitement égalitaire des demandes équivalentes (pour ne conserver que la symétrie), le principe séquentiel et l'insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes.

Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, on ne peut donc tout avoir. Il y a des choix à faire et ces choix impliquent des coûts en termes des propriétés sacrifiées et de données requises. En vertu des résultats établis dans ce chapitre, le choix dans les contextes multidimensionnels devrait se faire entre la règle séquentielle radiale et la règle Shapley-Shubik, selon les propriétés privilégiées. Le Tableau 3.1 se veut un outil pour aider les gestionnaires à faire un choix éclairé.

3.A Annexes

3.A.1 Économie d'échelle : définition

On dira qu'il y a économies d'échelle si la fonction de coût donne des coûts incrémentaux décroissants. Dans le cas d'une fonction à une seule variable, comme dans le contexte d'un seul bien privé homogène, cela revient à dire que le coût marginal est décroissant ou que la fonction est concave. Pour le cas plus général, on emprunte la définition et les résultats qui suivent à Téjédo et Truchon (2001). La difficulté qui se pose, dans le contexte général adopté dans le chapitre 2 et repris ici, est de comparer des accroissements de demandes de différentes entités. C'est ce qui rend la définition qui suit quelque peu complexe.

Une fonction de coût C donne des *coûts incrémentaux décroissants* si, pour tout triplet de demandes (Y, Y', Z) tel que $Y \leq Y'$ et tout couple (i, j) tel que $c_i(y_i) \geq c_j(y_j)$ et $c_i(y_i + z_i) - c_i(y_i) = c_j(y_j + z_j) - c_j(y_j)$, on a :

$$C\left(Y + Z^{\{i\}}\right) - C(Y) \geq C\left(Y' + Z^{\{j\}}\right) - C\left(Y'\right) \tag{3.2}$$

Une fonction de coût qui a cette propriété a également les propriétés suivantes, qui sont plus intuitives :

1. Quel que soit le triplet (Y, Y', Z) tel que $Y \leq Y'$, on a :

$$C(Y + Z) - C(Y) \geq C\left(Y' + Z\right) - C\left(Y'\right) \tag{3.3}$$

2. Étant donné un vecteur de demandes Z, définissons $I(Z) = \{i \in N : z_i \neq 0\}$ et désignons par $\#I(Z)$ le nombre d'entités dans cet ensemble. Alors, étant donné un triplet (Y, Y', Z) et un $h \in I(Z)$ tels que $Y \leq Y'$, $Y + Z \leq Y' + Z^{\{h\}}$, $c_i(y_i) \geq c_h(y_h)$ et $c_i(y_i + z_i) - c_i(y_i) = c_h(y_h + z_h) - c_h(y_h) \ \forall i \in I(Z)$, on a :

$$C(Y + Z) - C(Y) \geq \#I(Z)\left(C\left(Y' + Z^{\{h\}}\right) - C\left(Y'\right)\right) \tag{3.4}$$

3. Pour tout couple (Y, Y') tel que $Y \leq Y'$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\left(y_i'\right) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i) \geq C\left(Y'\right) - C(Y) \tag{3.5}$$

4. Étant donné un triplet $(Y, Z, W) \geq 0$ tel que $\|Z\| = \|W\| = 1$, convenons de noter $D_{WZ}^{++}C(Y)$ la dérivée seconde de C, dans la direction W, de la dérivée première dans la direction Z. Alors $D_{WZ}C(Y) \leq 0$.

La première propriété ressemble davantage à ce qu'on a en tête quand on parle de coût incrémental décroissant. L'ajout d'un vecteur Z à une demande a un impact d'autant plus faible sur le coût total que la demande est importante. Elle n'est cependant pas toujours suffisante pour nos besoins. Il faut souvent comparer des accroissements de demandes de différentes entités, qui peuvent porter sur des biens différents. La définition permet cela.

La deuxième propriété dit que, si $Y+Z \leq Y'+Z^{\{h\}}$, l'accroissement moyen du coût pour toutes les entités concernées par Z est au moins aussi élevé que l'accroissement pour l'entité h. La troisième propriété dit que le bénéfice obtenu de la coopération augmente avec l'ampleur de la demande. La dernière propriété est semblable à une propriété des fonctions concaves mais elle est plus faible dans la mesure où elle dit quelque chose uniquement à propos des dérivées dans des directions non-négatives.

À noter que (3.3) implique $C\left(Q^S+Q^{\{i\}}\right)-C\left(Q^S\right) \geq C\left(Q^T+Q^{\{i\}}\right)-C\left(Q^T\right)$ pour tout Q dès lors que $S \subset T$ et $i \notin T$. En se rappelant la convention $\hat{c}(S)=C\left(Q^S\right)$, on peut écrire cette dernière relation sous la forme :[4]

$$\forall i \in N,\ \forall S,T \subset N : S \subset T \Rightarrow \hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S) \geq \hat{c}(T \cup \{i\}) - \hat{c}(T) \tag{3.6}$$

C'est ainsi qu'on définit la *concavité des jeux de coûts*. Elle est aussi le reflet d'économies d'échelle. Une définition équivalente[5] de la concavité des jeux de coûts est :

$$\forall S,T \subset N : \hat{c}(S) + \hat{c}(T) \geq \hat{c}(S \cup T) + \hat{c}(S \cap T)$$

Elle implique évidemment :

$$\forall S,T \subset N : \hat{c}(S) + \hat{c}(T) \geq \hat{c}(S \cup T) \tag{3.7}$$

Une fonction $\hat{c}$ qui satisfait cette dernière condition est dite *sous-additive*. C'est une condition qui incorpore une forme réduite d'économies d'échelle. Dans le même ordre d'idée, (3.5) implique :

$$\forall S,T \subset N : S \subset T \Rightarrow \sum_{i \in T} \hat{c}(\{i\}) - \hat{c}(T) \geq \sum_{i \in S} \hat{c}(\{i\}) - \hat{c}(S) \tag{3.8}$$

Autrement dit, les bénéfices de la coopération augmentent avec la taille de la coalition.

De manière plus générale, la condition (3.3) implique, pour deux sous-ensembles quelconques $S,T \subset N$ tels que $S \cap T = \varnothing$ et deux demandes $Q, \tilde{Q}$ telles que $Q \leq \tilde{Q}$:

$$C\left(Q^S+Q^T\right) - C\left(Q^S\right) \geq C\left(\tilde{Q}^S+Q^T\right) - C\left(\tilde{Q}^S\right) \tag{3.9}$$

[4] On écrit $i \in N$ puisque la relation est satisfaite de façon triviale quand $i \in S$ ou $i \in T$.

[5] Voir le chapitre 4.

En particulier, pour tout $i \in N$ et $Q \leq \tilde{Q}$, on a :

$$C\left(Q^{N\backslash\{i\}} + Q^{\{i\}}\right) - C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right) \geq C\left(\tilde{Q}^{N\backslash\{i\}} + Q^{\{i\}}\right) - C\left(\tilde{Q}^{N\backslash\{i\}}\right)$$

En se rappelant la définition du coût incrémental, $cm_i(Q) = C(Q) - C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right)$, cette dernière implication peut encore s'écrire :

$$\forall i,\ Q \leq \tilde{Q} \text{ et } q_i = \tilde{q}_i \Rightarrow cm_i(Q) \geq cm_i\left(\tilde{Q}\right) \tag{3.10}$$

En mots, le coût incrémental d'une entité décroît avec l'importance de la demande des autres. À noter également que, en choisissant $T = \{i\}$ et $S = N\backslash\{i\}$ dans (3.7) on obtient :

$$c_i(q_i) = \hat{c}(\{i\}) \geq \hat{c}(N) - \hat{c}(N\backslash\{i\}) = cm_i(Q)$$

Dans la suite, si une propriété est violée pour un jeu de coûts satisfaisant à une des conditions (3.6), (3.7) ou (3.8) ou un problème satisfaisant à (3.9) ou à (3.10), on sera en mesure d'affirmer que la condition est violée même en présence d'économies d'échelle. On définit les déséconomies d'échelle et ses conséquences en inversant la terminologie et les inégalités dans ce qui précède.

3.A.3 Démonstration de la Proposition 3.2

1. **(AD) implique (IDC)** : Supposons qu'on ait :

$$C(Q) = \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) + cc(Q) = \sum_{j=1}^{n} ca_j\left(Q^{\{j\}}\right) + cc(Q)$$

si bien que $x_i\left(Q^{\{i\}}, ca_i\right) = ca_i(Q)$ et $x_i\left(Q^{\{j\}}, ca_i\right) = ca_i\left(Q^{\{j\}}\right) = 0\ \forall j \neq i$. En vertu de (AD), on a alors :

$$\begin{aligned} x_i(Q, C) &= \sum_{j=1}^{n} x_i\left(Q^{\{j\}}, ca_j\right) + x_i(Q, cc) \\ &= ca_i(Q) + x_i(Q, cc) \end{aligned}$$

comme l'exige (IDC).

2. **(IDC) et (IDN) impliquent (IEN)** : Si une entité i est négligeable, on a $C(Q) = c_i(q_i) + C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right) = c_i(q_i) + C_{-i}(Q_{-i})$, ce qui peut encore s'écrire $C(Q) = ca_i(Q) + C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right)$, en posant $ca_i(Q) = c_i(q_i)$, $ca_j(Q) = 0$ et $cc(Q) = C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right)$. En vertu de (IDC) et (IDN), on a alors, $\forall j \neq i$:

$$x_j(Q, C) = x_j(Q, ca_j) + x_j\left(Q^{N\backslash\{i\}}, C\right) = 0 + x_j\left(Q^{N\backslash\{i\}}, C\right) = x_j^{N\backslash\{i\}}(Q_{-i}, C_{-i})$$

comme l'exige (IEN).

3. **(IEN) implique (SE)** : Supposons qu'on ait : $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$. Pour une entité i quelconque, on a donc $C(Q) = c_i(q_i) + C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$ et, en vertu de (IEN) :

$$x_i(Q, C) = c_i(q_i)$$

4. **(PA) implique (SE) :** Supposons qu'on ait : $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$. En vertu de (PA), on a également $x_i \leq c_i(q_i)\ \forall i$. On a donc forcément $x_i = c_i(q_i)\ \forall i$. On arrive à la même conclusion sous (APA).

3.A.3 Démonstration relatives aux répartitions proportionnelles

Démonstration de la Proposition 3.3. Il s'agit de montrer que toutes les règles qui ont la forme qui suit satisfont à la cohérence :

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j\right) \tag{3.11}$$

Supposons que les entités d'un sous-ensemble S soient éliminées après avoir payé leur dû. On a alors :

$$\begin{aligned}
x_i^{N\setminus S}\left(Q_{N\setminus S}, C^{N\setminus S}\right) &= xb_i + \frac{t_i}{\sum\limits_{j\in N\setminus S} t_j}\left(C^{N\setminus S}\left(Q_{N\setminus S}\right) - \sum_{j\in N\setminus S} xb_j\right) \\
= xb_i + \frac{t_i}{\sum\limits_{j\in N\setminus S} t_j}&\left(C(Q) - \sum_{j\in N\setminus S} xb_j - \sum_{j\in S} xb_j - \frac{\sum\limits_{j\in S} t_j}{\sum\limits_{j\in N} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j\in N} xb_j\right)\right) \\
&= xb_i + \frac{t_i}{\sum\limits_{j\in N\setminus S} t_j}\frac{\sum\limits_{j\in N\setminus S} t_j}{\sum\limits_{j\in N} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j\in N} xb_j\right) \\
&= xb_i + \frac{t_i}{\sum\limits_{j\in N} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j\in N} xb_j\right) \quad \forall i \in N\setminus S
\end{aligned}$$

■

Règle des coûts moyens

Il est immédiat que la règle des coûts moyens satisfait à (RG), (TEE), (IDN), (INP), (MCT), (MD), (AD) et (PR). En vertu de la Proposition 3.2, elle satisfait donc également à (IDC), (IEN) et (SE). En vertu de la Proposition 3.3, elle satisfait à (CH) puisqu'elle est de la forme (3.11). Dans le contexte unidimensionnel et homogène, (TEE), (S) et (TE) sont équivalentes.

Dans le même contexte, économies d'échelle se résument à coût moyen décroissant. Or, si le coût moyen est décroissant, il est clair qu'une augmentation de la demande de la part d'une entité i fait baisser le coût moyen, ce qui entraîne une baisse des contributions des autres entités. Cette règle satisfait donc à (MCN). Elle satisfait également à (CO) et (PA) en vertu de la Proposition 3.1. On a les résultats inverses en présence de déséconomies d'échelle.

Le principe séquentiel (PS) est l'apanage de la règle séquentielle. Elle est la seule, dans le contexte unidimensionnel et homogène, à satisfaire à la fois à (PS) et à (TEE). Or, comme la règle des coûts moyens satisfait à (TEE), elle ne peut satisfaire à (PS). Finalement, cette règle ne satisfait pas à (O) ni même à (IU) parce que, pour satisfaire à (IU), il faut que les contributions restent inchangées quand on change les unités de mesure de façons différentes d'une entité à l'autre.

Règle égalitaire

La règle égalitaire satisfait à (RG), (TE) et (INP) de façon triviale, parce que les contributions exigées de toutes les entités sont toujours égales entre elles. Il va de soi que la répartition égalitaire satisfait également à (MCT), (MD), (AD) et (O). Elle satisfait à (CH), parce qu'elle est de la forme (3.11). En vertu du principe même de la répartition égalitaire, les conditions (PS), (IDN), (IDC), (IEN), (SE) et (PR) ne sont pas respectées.

La règle satisfait à (MCP) parce que l'accroissement de la demande de la part d'une entité entraîne toujours une augmentation de la part des coûts imputées aux autres entités. En revanche, elle ne satisfait pas à (MCN), peu importe la forme de la fonction de coût.

La propriété (PA) et donc (CO) sont également violées. Par exemple, avec la fonction de coût concave de l'exemple 3.1, on a $c_1(q_1) < \frac{1}{n}C(Q) = x_1$, contrairement à ce qu'exige (PA) et (CO). Il en va de même de (APA) et de (ACO) même avec une fonction de coût convexe, comme dans l'exemple 3.2. Ici, on a $c_3(q_3) > \frac{1}{n}C(Q) = x_3$, contrairement à ce qu'exige (APA) et (ACO).

$\hat{c}(\{1\}) = 4$	$\hat{c}(\{2\}) = 5$	$\hat{c}(\{3\}) = 6$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 9$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 10$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 11$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 15$	

- Exemple 3.1 -

$\hat{c}(\{1\}) = 4$	$\hat{c}(\{2\}) = 5$	$\hat{c}(\{3\}) = 7$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 11$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 12$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 13$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 19$	

- Exemple 3.2 -

Méthode des bénéfices résiduels

Rappelons que la méthode des bénéfices résiduels est définie par :

$$x_i = c_i(q_i) - \frac{c_i(q_i) - cm_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n}(c_j(q_j) - cm_j(Q))}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q)\right) \tag{3.12}$$

Elle peut également être définie, de façon équivalente, par :

$$x_i = cm_i(Q) + \frac{c_i(q_i) - cm_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n}(c_j(q_i) - cm_j(Q))}\left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} cm_j(Q)\right) \tag{3.13}$$

En effet, définissons $g(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i) - C(Q)$ et $gm_i(Q) = c_i(q_i) - cm_i(Q)$, d'où $c_i(q_i) = gm_i(Q) + cm_i(Q)$. Avec ces définitions, on peut (3.12) écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x_i &= cm_i(Q) + gm_i(Q) - \frac{gm_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n} gm_{j(Q)}} g(Q) \\ &= cm_i(Q) + \frac{gm_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n} gm_j(Q)}\left(\sum_{j=1}^{n} gm_j(Q) - g(Q)\right) \end{aligned}$$

En remplaçant gm_j et g par leurs définitions, on obtient (3.13).

(IDN), (IEN), (PA), (APA), (CO), (ACO)

Cette règle satisfait à (IDN) sous l'hypothèse que $q_i = 0$ implique $c_i(q_i) = cm_i(Q) = 0$. La satisfaction de (IEN) est immédiate dans la mesure où $cm_i(Q) = c_i(q_i)$ lorsque i est une entité négligeable. Celle de (PA) l'est également sous les hypothèses $C(Q) \leq$

$\sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \ \forall i$ et, inversement, celle de (APA) quand $C(Q) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \geq c_i(q_i)\ \ \forall i$.

On va maintenant démontrer la Proposition 3.6 qui dit que, sous les hypothèses $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \ \forall i$, on a $x_i \leq c_i(q_i)$ et $\sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_j \leq C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)\ \ \forall i$. Cette proposition établit, entre autres, que (CO) est satisfaite pour $n \leq 3$.

Démonstration. L'affirmation $x_i \leq c_i(q_i)$ est immédiate. Pour ce qui est de la deuxième affirmation, considérons une répartition x^* quelconque qui satisfait $x_i^* \leq c_i(q_i)$ et $\sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_j^* \leq C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)\ \ \forall i$. Une telle répartition existe par hypothèse. En combinant $\sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_j^* \leq C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$ et $\sum_{j\in N} x_j^* = C(Q)$, on obtient $x_i^* \geq C(Q) - C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right) = cm_i(Q)$. En sommant ces dernières inégalités, on obtient $\sum_{j\in N} x_j^* = C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} cm_j(Q)$. Selon (3.13), on a donc $x_i \geq cm_i(Q)\ \ \forall i$ et $\sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_j = C(Q) - x_i \leq C(Q) - cm_i(Q) = C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$. ■

(RG), (TE), (INP), (PS)

L'exemple 3.3 montre que cette règle ne satisfait à aucune des propriétés (RG), (TE), (INP), (MCT) et (PS).[6] Avec la première répartition, qui correspond à la fonction $\hat{c}$ telle que spécifiée, on a $x_2 < x_3$ en dépit du fait que $\hat{c}(\{2\}) = \hat{c}(\{3\})$, contrairement à ce qu'exige (TE). Il s'agit d'imaginer que les coûts identiques des entités 2 et 3 soient le résultat de demandes identiques pour obtenir une violation de la condition plus faible (TEE).

Imaginons maintenant que l'entité 3 augmente sa demande, faisant passer $\hat{c}(\{3\})$ à $7, \hat{c}(\{1,3\})$ à $10.5, \hat{c}(\{2,3\})$ à 9 et $\hat{c}(\{1,2,3\})$ à 11. La deuxième répartition résulte de ces augmentations de coûts. La contribution de l'entité 2 est maintenant plus faible que celle de l'entité 1 alors que c'était le contraire avec la demande initiale. Cela représente une violation de (INP). Le même exemple montre que cette méthode ne satisfait pas à (PS) puisqu'une augmentation de la demande de l'entité qui contribuait plus que les autres fait diminuer la contribution des autres. Finalement, cet exemple confirme que cette méthode ne satisfait pas à (RG) puisqu'on a $x_1 > x_2$ alors que $\hat{c}(\{1\}) < \hat{c}(\{2\})$. On le savait déjà de par la violation de (TE).

[6] Typiquement, ces exemples sont constitués d'une fonction de coût, de changements dans ces coûts et des répartitions correspondantes.

$\hat{c}(\{1\}) = 4$	$\hat{c}(\{2\}) = 5$	$\hat{c}(\{3\}) = 5$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 8$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 8$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 10$	

x_1	x_2	x_3	Total
3.11	3.22	3.67	10
3.05	2.85	5.10	11

- Exemple 3.3 -

(MD), (MCN), (MCP), (MCT)

L'exemple 3.4 montre que la méthode des bénéfices résiduels viole (MD) et (MCN). La première répartition est obtenue avec la fonction de coût originale. Imaginons ensuite qu'une augmentation de la demande de l'entité 3 fasse augmenter les coûts totaux de 16 à 17, pour donner la deuxième répartition. L'augmentation de la demande de l'entité 3 fait diminuer sa contribution, contrairement à ce qu'exige (MD). Par le fait même, (MCN) est violée. La diminution de x_3 confirme également la violation de (MCT). On pouvait déjà conclure à cette violation en invoquant la Proposition 3.4.

$\hat{c}(\{1\}) = 6$	$\hat{c}(\{2\}) = 7$	$\hat{c}(\{3\}) = 9$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 12$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 12$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 10$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 16$	

x_1	x_2	x_3	Total
6.00	4.75	5.25	16
7.00	5.00	5.00	17

- Exemple 3.4 -

La fonction $\hat{c}$ du dernier exemple n'est pas concave. L'exemple 3.5 montre que (MCN) est violée même avec une fonction $\hat{c}$ concave, qui satisfait à (3.10) et qui est compatible avec (3.9). Imaginons qu'une augmentation de la demande de l'entité 3 fasse augmenter $\hat{c}(\{3\})$ et $\hat{c}(\{1,3\})$ de 3\$ et $\hat{c}(2,3)$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$ de 2\$. La contribution de l'entité 1 augmente suite à l'augmentation de la demande de l'entité 3, contrairement à ce que prescrit (MCN). On notera que les répartitions de l'exemple 3.5 satisfont à (CO), conformément à la Proposition 3.6.

$\hat{c}(\{1\}) = 6$	$\hat{c}(\{2\}) = 7$	$\hat{c}(\{3\}) = 8$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 9$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 10$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 11$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 12$	

x_1	x_2	x_3	Total
3.00	4.00	5.00	12
3.06	3.47	7.47	14

- Exemple 3.5 -

L'exemple 3.6, qui part de la même fonction $\hat{c}$ que dans l'exemple 3.2, illustre la violation de (MCP) avec une fonction $\hat{c}$ convexe, qui satisfait à l'inverse de (3.10) et qui est compatible avec l'inverse de (3.9). Imaginons qu'une augmentation de la demande de l'entité 3 fasse augmenter $\hat{c}(\{3\})$ et $\hat{c}(\{2,3\})$ de 1$ et $\hat{c}(1,3)$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$ de 3$. La contribution de l'entité 2 diminue suite à l'augmentation de la demande de l'entité 3, contrairement à ce que prescrit (MCP).

$\hat{c}$: comme dans l'exemple 3.2

x_1	x_2	x_3	Total
5.20	6.20	7.60	19
6.22	6.11	9.67	22

- Exemple 3.6 -

(SE), (O), (CH), (AD), (IDC)

La satisfaction de (SE) et (O) est immédiate. La règle des bénéfices résiduels partage (CH) avec toutes les règles de répartition proportionnelle. Par contre, elle viole (AD). Supposons en effet qu'on ait $C = C^1 + C^2$ avec une décomposition semblable pour tous les éléments de coûts. Pour que (AD) soit respectée, il faudrait que $c_i^1(q_i) - cm_i^1(q_i) = c_i^2(q_i) - cm_i^2(q_i) = c_i(q_i) - cm_i(q_i)$ $\forall i$, ce qui ne sera pas toujours le cas. (IDC) n'est pas satisfaite non plus car on ne fait aucun usage des ca_i.

Méthodes comptables

(IDN), (IEN), (SE), (O), (CH)

Les trois méthodes présentées sous le titre de méthodes comptables dans le chapitre 2, et dont on rappelle les formules ci-dessous, satisfont à (IDN) sous l'hypothèse naturelle $q_i = 0$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q) = 0$. La méthode de Louderback et celle de Balachandran et Ramakrishnan satisfont à (IEN) par définition, lorsque $C(Q) = c_i(q_i) + C\left(Q^{N \setminus \{i\}}\right)$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q)$. Ce n'est cependant pas le cas de la méthode de Moriarity.

Les trois règles satisfont à l'ordinalité (O) dans la mesure où les $ca_i(Q)$ sont insensibles au changement d'unités et elles satisfont à la cohérence (CH) comme toute autre règle proportionnelle.

(RG), (TE), (INP)

Dans la mesure où on peut avoir $c_i(q_i) > c_j(q_j)$ et $ca_i(Q) < ca_j(Q)$, (RG) et (TE) ne tiennent pour aucune des trois méthodes. L'exemple 3.7 confirme la violation de (RG) et montre que toutes les méthodes comptables violent (INP). Dans cet exemple, on imagine que l'entité 3 augmente sa demande, faisant augmenter $\hat{c}(\{3\}), \hat{c}(\{1,3\})$, $\hat{c}(\{2,3\})$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$ de 2 unités, sans changer ca_3. Le deuxième tableau donne les répartitions produites par les trois méthodes avec les deux demandes. Avec les coûts originaux, les trois méthodes donnent $x_1 > x_2$ alors que $\hat{c}(\{1\}) < \hat{c}(\{2\})$.[7] L'augmentation de la demande de l'entité 3 entraîne un renversement de l'importance relative des contributions des deux autres entités, en violation de (INP).

(PA), (APA)

On va commencer par démontrer que, sous l'hypothèse $ca_i(Q) \leq c_i(q_i) \ \ \forall i$, la règle de **Moriarity** satisfait à (PA) si $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ et à (APA) si $C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$. Cette règle est définie par :

$$x_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j} C(Q)$$

[7] Ces répartitions resteraient les mêmes si on posait $\hat{c}(\{1\}) = 5 = \hat{c}(\{2\})$, confirmant la violation de (TE). Il s'agirait d'imaginer que les coûts identiques des entités 1 et 2 sont le résultat de demandes identiques pour obtenir une violation de la condition plus faible (TEE).

$\hat{c}(\{1\}) = 4$	$\hat{c}(\{2\}) = 5$	$\hat{c}(\{3\}) = 7$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 8$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 9$
$ca_1 = 3$	$ca_2 = 2.9$	$ca_3 = 4$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 10$	

	x_1	x_2	x_3	Total
Moriarity	3.04	2.94	4.02	10
Moriarity	3.18	3.97	4.85	12
Louderback	3.02	2.93	4.05	10
Louderback	3.26	3.44	5.30	12
Balachandran	3.03	2.93	4.03	10
Balachandran	3.40	3.75	4.85	12

- Exemple 3.7 -

où $w_i = \min\{c_i(q_i),\ ca_i(Q) + cc(Q)\} = \min\left\{c_i(q_i),\ C(Q) - \sum_{j\neq i} ca_j(Q)\right\}$. Soit le sous-ensemble $S \subset N$ tel que $w_i = ca_i(Q) + cc(Q) < c_i(q_i)\ \ \forall i \in S$ et $w_i = c_i(q_i)\ \ \forall i \in N \backslash S$.

Si $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ et $S = \emptyset$, l'affirmation du théorème est immédiate puisque $x_i = \dfrac{c_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)} C(Q) \leq c_i(q_i)$. Si $S \neq \emptyset$, il suffit de montrer que $\sum_{j=1}^{n} w_j \geq C(Q)$. Comme $w_i \leq c_i(q_i)$, on obtient alors $x_i = \dfrac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j} C(Q) \leq c_i(q_i)$. Par définition :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in S} w_i &= \sum_{i\in S} ca_i(Q) + |S|\ cc(Q) \\
&= |S|\ C(Q) - (|S|-1)\sum_{i\in S} ca_i(Q) - |S| \sum_{i\in N\backslash S} ca_i(Q) \\
\sum_{i\in N\backslash S} w_i &= \sum_{i\in N\backslash S} c_i(q_i) \geq \sum_{i\in N\backslash S} ca_i(Q)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{i\in N} w_i \geq |S|\ C(Q) - (|S|-1)\sum_{i\in N} ca_i(Q) \geq |S|\ C(Q) - (|S|-1)\, C(Q) = C(Q)$$

Montrons maintenant que, si $C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$, on a $S = \emptyset$, d'où :

$$x_i = \frac{c_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)} C(Q) \geq c_i(q_i).$$

À cet effet, considérons un autre problème où $ca_i(Q)$ est changé pour $ca_i'(Q) = c_i(q_i)\ \forall i$ et où donc $cc'(Q) = C(Q) - \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$. On a alors $w_i = c_i(q_i)\ \forall i$. Réduisons ensuite $ca_1'(Q)$ jusqu'à $ca_1(Q)$. Le coût commun $cc'(Q)$ est alors augmenté de $ca_1'(Q) - ca_1(Q)$, ce qui laisse w_1 inchangé. Les autres w_j demeurent aussi les mêmes puisque, si $cc'(Q)$ est effectivement augmenté, il en va de même des $ca_j'(Q) + cc'(Q)$. En répétant le même argument avec les autres $ca_i'(Q)$, on obtient $w_i = c_i(q_i)\ \forall i$, d'où $S = \emptyset$. ■

On montre maintenant que la règle de **Louderback** satisfait à (PA) si $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ et à (APA) si $C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$. Cette règle est définie par :

$$x_i = ca_i(Q) + \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} cc(Q) \tag{3.14}$$

sous l'hypothèse $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$. En développant l'équation (3.14) et en utilisant la définition de $cc(Q)$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{ca_i(Q) \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) + c_i(q_i) C(Q) - c_i(q_i) \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) - ca_i(Q) C(Q)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} \\ &= \frac{c_i(q_i) \left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) \right) + ca_i(Q) \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q) \right)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} \\ &\overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} \frac{c_i(q_i) \left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) \right) + c_i(q_i) \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q) \right)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} \\ &= \frac{c_i(q_i) \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) \right)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} = c_i(q_i) \end{aligned}$$

selon que $\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q) \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} 0$. ■

On se tourne maintenant vers la règle de **Balachandran et Ramakrishnan.** Une façon de la définir est de remplacer $c_i(q_i)$ dans (3.14) par :

$$c_i'(q_i) = \min\{c_i(q_i), ca_i(Q) + cc(Q)\}$$

Selon la dernière démonstration, on a alors $x_i \leq c_i'(q_i) \leq c_i(q_i)$ quand $\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q) \geq 0$. Pour le cas où $\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q) \leq 0$, remplaçons $ca_i(Q)$ dans (3.14) par $ca'_i(Q) = \max\{c_i(q_i) - cc(Q), ca_i(Q)\}$ et désignons par x'_i la part des coûts qui revient à i avec cette définition. On alors $x'_i \geq c_i(q_i)$. En utilisant cette dernière relation de même que $ca'_i(Q) \leq c_i(q_i) - cc(Q)$, $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)$ et $C(Q) - \sum_{j=1}^n c_j(q_j) \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_i &= x'_i + ca_i(Q) - ca'_i(Q) \\
&\geq x'_i + ca_i(Q) - c_i(q_i) + cc(Q) \\
&= x'_i - c_i(q_i) + ca_i(Q) + C(Q) - \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) \\
&\geq C(Q) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} ca_j(Q) \geq C(Q) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_j(q_j) \geq c_i(q_i)
\end{aligned}$$

C'est ce qu'exige (APA). ■

(PS), (MCT), (MD), (MCN), (MCP), (CO), (ACO)

L'exemple 3.8 montre que la règle de Moriarity viole (PS), (MCT), (MD), (MCN) et (CO). Imaginons qu'une augmentation de la demande de l'entité 3 fasse augmenter le coût total de 10 à 11. L'augmentation de la demande de l'entité 3 fait diminuer sa contribution aux coûts et, comme conséquence, elle fait augmenter celles des deux autres entités. Il s'agit donc à la fois d'une violation de (PS), (MCT) et (MD). Si on attribue la hausse de coûts à l'entité 2 plutôt qu'à 3, (MCN) et (MCP) se trouvent violées toutes les deux puisque la contribution de l'entité 1 augmente et celle de 3 baisse suite à la hausse de la demande de 2. De même (CO) et (ACO) sont toutes les deux violées puisque, avec $\hat{c}(\{1,2,3\}) = 10$ ou 11, on a $x_2 + x_3 > 9 = \hat{c}(\{2,3\})$ et $x_1 + x_2 < 8 = \hat{c}(\{1,2\})$. Dans les deux cas, la fonction $\hat{c}$ est concave. Les propriétés (CO) et (MCN) auraient donc été souhaitables et possibles. Par contre, il est moins défendable d'exiger (ACO) et (MCP) dans ce cas. L'exemple 3.11, donné à la fin de cette sous-section, démontre la violation de ces deux propriétés avec $\hat{c}$ convexe.

L'exemple 3.9 montre que les règles de Louderback et de Balachandran-Ramakrishnan violent, elles aussi, (PS), (MCT), (MD), (MCN) et (CO). Ici, une augmentation de la demande de l'entité 3 fait augmenter ca_3 et le coût total de 1\$. Cette augmentation de la demande de l'entité 3 et du coût total fait diminuer sa contribution aux coûts et augmenter celles des autres entités, ce qui constitue une violation de (MCT), (MD) et (PS).

$\hat{c}(\{1\}) = 4$	$\hat{c}(\{2\}) = 5$	$\hat{c}(\{3\}) = 7$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 8$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 9$
$ca_1 = 0$	$ca_2 = 3$	$ca_3 = 6$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 10$	

x_1	x_2	x_3	Total
0.83	3.33	5.83	10
1.57	3.93	5.50	11

- Exemple 3.8 -

$\hat{c}(\{1\}) = 4$	$\hat{c}(\{2\}) = 5$	$\hat{c}(\{3\}) = 7$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 8$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 9$
$ca_1 = 3$	$ca_2 = 4$	$ca_3 = 6$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 17$	

x_1	x_2	x_3	Total
4.33	5.33	7.33	17
5	6	7	18

- Exemple 3.9 -

Dans l'exemple 3.9, on a également une violation de (PA) et donc de (CO), ce qui n'est guère surprenant vu que $\hat{c}(\{N\}) > \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et que $\hat{c}$ n'est pas sous-additive. L'exemple 3.10, où on utilise les mêmes données que dans l'exemple 3.8, où $\hat{c}(\{N\}) < \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et $\hat{c}$ est concave, est plus probant à cet égard. Les deux règles donnent $x_2 + x_3 > 9 = \hat{c}(\{2,3\})$ et $x_1 + x_2 < 8 = \hat{c}(\{1,2\})$. Donc, (CO) et (ACO) sont toutes les deux violées. Selon la Proposition 3.1, (MCN) est également violée.

Tout comme il est déraisonnable d'exiger (CO) quand $\hat{c}(\{N\}) > \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et que $\hat{c}$ n'est pas sous-additive, il est tout autant déraisonnable d'exiger (ACO) quand $\hat{c}(\{N\}) < \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et que $\hat{c}$ est concave, comme dans l'exemple 3.8. L'exemple 3.11, qui utilise la même fonction $\hat{c}$ que l'exemple 3.2, montre que (ACO) est violée par toutes les règles comptables avec $\hat{c}(\{N\}) > \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et $\hat{c}$ convexe. Avec la règle

$\hat{c}$: comme dans l'exemple 3.8

	x_1	x_2	x_3	Total
Louderback	0.57	3.29	6.14	10
Balachandran	0.33	3.33	6.33	10

- Exemple 3.10 -

de Moriarity, on a $x_1 + x_2 < 11 = \hat{c}(\{1,2\})$ et, avec les règles de Louderback et de Balachandran-Ramakrishnan, $x_1 + x_3 < 12 = \hat{c}(\{1,3\})$, contrairement à ce qu'exige (ACO). Selon la Proposition 3.1, (MCP) est également violée par ces règles. On a cependant (APA) avec les trois règles, conformément au résultat établi plus haut.

$\hat{c}(\{1\}) = 4$	$\hat{c}(\{2\}) = 5$	$\hat{c}(\{3\}) = 7$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 11$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 12$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 13$
$ca_1 = 4$	$ca_2 = 0$	$ca_3 = 7$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 19$	

	x_1	x_2	x_3	Total
Moriarity	4.75	5.94	8.31	19
Louderback	4.00	8.00	7.00	19
Balachandran	4.00	8.00	7.00	19

- Exemple 3.11 -

(AD), (IDC)

L'additivité (AD) n'est pas satisfaite. Supposons en effet qu'on ait $C = C^1 + C^2$ et une décomposition semblable pour tous les éléments de coût et les t_i. Pour que (AD) soit respectée, il faudrait que $t_i^1 = t_i^2$ et en particulier $c_i^1(q_i) - ca_i^1(Q) = c_i^2(q_i) - ca_i^2(Q) = c_i(q_i) - ca_i(Q)$ $\forall i$, ce qui ne sera pas toujours le cas.

Montrons maintenant que la règle de Louderback et celle de Balachandran et Ramakrishnan satisfont à (IDC) quand $C(Q) = \sum_{i=1}^n ca_i(Q) + cc(Q)$ implique $cc\left(Q^{\{i\}}\right) = c_i(q_i) - ca_i(Q)$ $\forall i$. Supposons qu'on ait $C(Q) = \sum_{i=1}^n ca_i(Q) + cc(Q)$. De façon plus rigoureuse, écrivons $C(Q) = \sum_{i=1}^n ca_i(Q,C) + cc(Q,C)$. Admettons, assez naturellement, que $ca_i(Q, cc) = 0$ et $cc(Q, cc) = cc(Q, C)$. Autrement dit, il ne reste plus de coûts attribuables directement aux entités dans $cc(Q, C)$. Définissons $c_i(q_i, cc) = cc\left(Q^{\{i\}}, C\right) = c_i(q_i) - ca_i(Q, C)$ et $w_i(Q, cc) = \min\{c_i(q_i, cc),\ ca_i(Q, cc) + cc(q)\} = \min\{c_i(q_i) - ca_i(Q, C),\ cc(q)\}$. Notons que $w_i(Q, cc) = w_i(Q, C) - ca_i(Q, C)$.

Appliquée au problème (Q, cc), la règle de Louderback donne :

$$\begin{aligned} x_i(Q, cc) &= ca_i(Q, cc) + \frac{c_i(q_i, cc) - ca_i(Q, cc)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j, cc) - ca_j(Q, cc)} cc(Q, C) \\ &= \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q, C)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - ca_j(Q, C)} cc(Q, C) \end{aligned}$$

d'où :

$$x_i(Q, C) = ca_i(Q, C) + x_i(Q, cc)$$

comme l'exige (IDC).

Avec la règle de Balachandran et Ramakrishnan, on a :

$$\begin{aligned} x_i(Q, cc) &= ca_i(Q, cc) + \frac{w_i(Q, cc) - ca_i(Q, cc)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(Q, cc) - ca_j(Q, cc)} cc(Q, C) \\ &= \frac{w_i(Q, C) - ca_i(Q, C)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(Q, C) - ca_j(Q, C)} cc(Q, C) \end{aligned}$$

d'où :

$$x_i(Q, C) = ca_i(Q, C) + x_i(Q, cc)$$

comme l'exige (IDC).

Supposons maintenant un problème pour lequel $c_i(q_i) \leq ca_i(Q) + cc(Q)\ \forall i$. Avec la règle de Moriarity, on aurait :

$$x_i(Q, C) = \frac{c_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)} C(Q)$$

et :

$$x_i(Q, cc) = \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - ca_j(Q, C)} cc(Q, C)$$

On est donc loin d'avoir $\frac{c_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)} C(Q) = ca_i(Q) + x_i(Q, cc)$ comme l'exige (IDC).

Répartition proportionnelle aux coûts marginaux

Rappelons que cette règle est définie par :

$$x_i(Q, C) = \frac{\partial_i C(Q)\, q_i}{\sum_{j=1}^{n} \partial_j C(Q)\, q_j} C(Q)$$

où $\partial_i C(Q)\, q_i$ est le produit scalaire entre le vecteur des dérivées $\partial_i C(Q)$ et celui des quantités q_i.

(RG), (TE), (PS), (INP), (IEN), (IDN), (IDC), (AD)

Dans la mesure où une entité avec une faible demande peut avoir un coût marginal élevé au point Q et inversement, les conditions (RG), (TEE) et (PS) ne sont pas satisfaites. Un changement dans la demande de certaines unités peut entraîner un renversement important dans les coûts marginaux des autres et inverser l'importance relative des contributions de deux entités. (INP) ne tient donc pas. L'exemple 3.12 confirme ces affirmations. Avec $Q = (3, 3, 8)$, on a $x_1 > x_2$ en dépit du fait que $q_1 = q_2$. Il s'agit d'une violation de (TEE) et donc de (S), (TE) et (RG). Un accroissement de q_1 à 4 amène une augmentation de x_2, en violation de (PS). Finalement, avec $q_1 = 0$, on obtient une inversion de l'ordre entre les contributions des entités 2 et 3, ce qui constitue une violation de (INP).

$$C : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R} : C\left(Q\right) = q_1 + q_2 + q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} + q_3$$

Q	x_1	x_2	x_3	Total
$(3, 3, 8)$	19.09	6.03	4.47	29.59
$(4, 3, 8)$	30.12	8.54	4.05	42.71
$(0, 3, 8)$	0	3	8	11

- Exemple 3.12 -

L'exemple 3.12 montre également que (CHF) et donc (CH) ne sont pas satisfaites par cette méthode. Imaginons en effet que l'entité 2 se retire après avoir payé son dû, c'est-à-dire 6.03. Une application de la même règle aux deux autres entités et à la fonction de coût résiduel donne $x_1 = 19.09$ et $x_3 = 4.47$. L'exemple montre également que (IEN) est violée. L'entité 3 est en effet négligeable et, avec $Q = (3, 3, 8)$, on a $x_3 \neq 8 = c_3\left(8\right)$. Il est évident que (IDN) est satisfaite. En vertu de la Proposition 3.2, on doit donc conclure que (IDC) et (AD) ne le sont pas.

(CH), (IU), (O)

La répartition proportionnelle aux coûts marginaux satisfait à (CH) comme toute règle de répartition proportionnelle. Elle est insensible au choix des unités de mesure (IU). En effet, supposons qu'on ait deux problèmes équivalents (Q, C) et (Q', C') avec $Q = \lambda \otimes Q' \equiv \left(\lambda_{11} q'_{11}, \ldots, \lambda_{nm_n} q'_{nm_n}\right)$ et $C'(Q') = C\left(\lambda \otimes Q'\right)$. En particulier, $C'(Q') =$

$C'\left(\lambda^{-1}\otimes Q\right)=C\left(Q\right)$ où $\lambda^{-1}=\left(\lambda_{11}^{-1},\ldots,\lambda_{nm_n}^{-1}\right)$. En désignant par λ_{ih} la composante de λ qui s'applique à la demande pour le bien h de la part de l'entité i, on a donc :

$$\frac{\partial C'(Q')}{\partial q'_{ih}}=\frac{\partial C'\left(\lambda^{-1}\otimes Q\right)}{\partial q_{ih}}\lambda_{ih}^{-1}=\frac{\partial_i C\left(Q\right)}{\partial q_{ih}}$$

d'où :

$$\partial_i C'\left(Q'\right)q'_i\equiv\sum_{h=1}^{m_i}\frac{\partial C'\left(Q'\right)}{\partial q'_{ih}}q'_{ih}=\sum_{h=1}^{m_i}\frac{\partial C'\left(\lambda^{-1}\otimes Q\right)}{\partial q_{ih}}\lambda_{ih}^{-1}q_{ih}=\sum_{h=1}^{m_i}\frac{\partial_i C\left(Q\right)}{\partial q_{ih}}q_{ih}\equiv\partial_i C\left(Q\right)q_i$$

L'égalité qui vient d'être établie entre $\partial_i C'(Q')\,q'_i$ et $\partial_i C\left(Q\right)q_i$ dépend de façon cruciale de la linéarité de la fonction $\lambda^{-1}\otimes Q$. La condition plus forte d'ordinalité (O) ne tient pas.

(PR), (SE)

Si $C\left(Q\right)=A\cdot Q\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{m_i}a_{ih}q_{ih}$, on a $\partial_i C\left(Q\right)q_i=\sum_{h=1}^{m_i}a_{ih}q_{ih}\,\forall i$, d'où $x_i(Q,C)=\sum_{h=1}^{m_i}a_{ih}q_{ih}$, comme le veut la proportionnalité (PR). Par contre, on n'a pas la séparation entre entités (SE) à moins que C ne soit linéaire. Supposons qu'on ait $C\left(Q\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j(q_j)$ et que C ne soit pas linéaire. Il s'ensuit que $\partial_i C\left(Q\right)=\partial_i c_i\left(q_i\right)$, d'où :

$$x_i(Q,C)=\frac{\partial_i c_i\left(q_i\right)q_i}{\sum_{j=1}^{n}\partial_j c_j\left(q_j\right)q_j}\sum_{j=1}^{n}c_j(q_j)\neq c_i\left(q_i\right)$$

Cela confirme qu'on n'a pas (IEN).

(MCN), (PA), (CO), (MCP), (APA), (ACO), (MD), (MCT)

En présence d'économies d'échelle, l'augmentation d'un q_j avec $j\neq i$ entraîne une baisse de $\partial_i C\left(Q\right)$ et donc de x_i. La répartition proportionnelle aux coûts marginaux satisfait donc à (MCN), (CO) et (PA). Par le fait même, on a également (MD). On a l'inverse, c'est-à-dire (MCP), (APA), (ACO), en présence de déséconomies d'échelle. On n'a cependant pas (MD) dans ces circonstances. En fait, cette méthode ne satisfait pas à (MD) de façon générale comme le montre l'exemple 3.13.[8] En effet, une augmentation de q_1 amène une baisse de x_1.

Définissons maintenant une nouvelle fonction $\tilde{C}:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ à partir de la dernière fonction C en posant $\tilde{C}\left(q_1,q_2\right)=C\left(q_1+0.1,\ q_2\right)$. Comme C est une fonction crois-

[8] Compte tenu de sa définition en deux parties, la fonction de cet exemple est toujours croissante et positive. Seule la première partie est utilisée dans les calculs.

$$C:\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} : C(Q) = \begin{cases} q_1^2 q_2 - q_1^3 + q_2 & \text{si} \quad 2q_2 > 3q_1 \\ \frac{1}{2}q_1^3 + q_2 & \text{si} \quad q_2 \le q_1 \end{cases}$$

Q	x_1	x_2	Total
$(1,2)$	0.60	2.40	3.00
$(1.3\,,2)$	0.10	3.09	3.19

- Exemple 3.13 -

sante, on a $\tilde{C}(Q) \geq C(Q) \;\; \forall Q \geq 0$. Si on applique la répartition proportionnelle aux coûts marginaux à cette fonction $\tilde{C}$ et à $Q = (1,2)$, on obtient la répartition :

x_1	x_2	Total
0.46	2.63	3.09

Une augmentation des coûts entraîne une baisse de x_1, contrairement à ce qu'exige (MCT).

3.A.4 Démonstration relatives aux règles inspirées de la théorie des jeux

Tarification à la Aumann-Shapley

Rappelons que cette méthode est définie par :

$$x_i(Q,C) = \int_0^1 q_i\, \partial_i C(\lambda Q)\, d\lambda$$

où $q_i\, \partial_i C$ doit être interprété comme un produit scalaire dans le contexte général. De façon équivalente, si on définit la fonction $\hat{C} : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ par $\hat{C}(\tau; Q, C) = C(\tau Q) = C(\tau_1 q_1, \ldots, \tau_n q_n)$, la méthode est définie par :

$$x_i(Q,C) = \int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, \ldots, \lambda)\, d\lambda$$

(IDN), (IEN), (AD), (IDC), (SE)

Avec cette méthode, les contributions sont insensibles à l'élimination des demandes nulles (IDN). En effet, si une entité i a une demande nulle, on a $C(Q) = C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$, d'où, comme l'exige (IDN) :

$$\forall j \in N\setminus\{i\} : x_j(Q,C) = \int_0^1 q_j\, \partial_j C(\lambda Q)\, d\lambda = \int_0^1 q_j\, \partial_j C\left(\lambda Q^{N\setminus\{i\}}\right) d\lambda = x_j^{N\setminus\{i\}}(Q_{-i}, C_{-i})$$

Cette règle satisfait à (AD) dans la mesure où $C = C^1 + C^2$ implique $\partial_i C = \partial_i C^1 + \partial_i C^2$. En invoquant la Proposition 3.2, on conclut qu'elle satisfait également à (IDC), (IEN) et (SE).

(IU), (O)

Sprumont (1998) donne un exemple qui montre que cette méthode ne satisfait pas à l'ordinalité. Par contre, elle satisfait à (IU). Pour le vérifier et en même temps comprendre pourquoi elle ne satisfait pas à (O), considérons deux problèmes équivalents (Q, C) et (Q', C') Soit la liste $f = (f_1, \ldots, f_n)$ des transformations bijectives (linéaires ici) telles que $Q = f(Q') = (f_1(q_1'), \ldots, f_n(q_n'))$. Rappelons que C' est alors définie par $C'(Q') = C(f(Q'))$. Il s'agit de montrer que $\hat{C}(\,\cdot\,; Q, C) = \hat{C}(\,\cdot\,; Q', C')$. et plus précisément que $\hat{C}(\tau; Q', C') = C'(\tau Q') = C'\left(\tau f^{-1}(Q)\right) = C\left(f\left(\tau f^{-1}(Q)\right)\right) = C(\tau Q) = \hat{C}(\tau; Q, C)$. C'est la linéarité de f qui donne $f\left(\tau f^{-1}(Q)\right) = Q$. En l'absence de cette dernière, on n'est pas assuré que $\hat{C}(\,\cdot\,; Q, C) = \hat{C}(\,\cdot\,; Q', C')$ et donc que les contributions exigées des entités sont invariantes à des changements non linéaires d'unités.

(RG), (TE), (PS), (INP), (CHF)

Dans la mesure où les coûts marginaux peuvent être ordonnés différemment des coûts de faire cavalier seul, cette méthode ne satisfait ni à (TE) ni à (RG). Des changements dans la demande des entités qui paient davantage peuvent influencer les coûts marginaux des autres, invalidant ainsi (PS). L'exemple 3.14, basé sur la même fonction de coût et les mêmes demandes que dans l'exemple 3.12, le confirme. On a $x_1 > x_2$ en dépit du fait que $q_1 = q_2$. Il s'agit d'une violation de (TEE) et donc de (S), (TE) et (RG). Un accroissement de q_1 à 4 amène une augmentation de x_2, en violation de (PS). Finalement, avec $q_1 = 0$, on obtient l'inversion de l'ordre entre les contributions des entités 2 et 3, ce qui constitue une violation de (INP).

Le même exemple montre que (CHF) et donc (CH) ne sont pas satisfaites par cette méthode. Imaginons en effet que l'entité 2 se retire après avoir payé son dû, c'est-à-dire

$$C : \mathbb{R}^3_+ \rightarrow \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 + q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} + q_3$$

Q	x_1	x_2	x_3	Total
$(3,3,8)$	15.47	6.12	8.00	29.59
$(4,3,8)$	26.17	8.54	8.00	42.71
$(0,3,8)$	0	3	8	11

- Exemple 3.14 -

6.12. Une application de la méthode Aumann-Shapley aux deux autres entités et à la fonction de coût résiduel[9] donne $x_1 = 17.20$ et $x_3 = 6.26$.

(MCN), (PA), (CO), (MCP), (APA), (ACO), (MD), (MCT)

En présence d'économies d'échelle, l'augmentation d'un q_j avec $j \neq i$ entraîne une baisse de $\partial_i C(\lambda Q)$ et donc de x_i. La méthode Aumann-Shapley satisfait donc à (MCN), (CO) et (PA). Par le fait même, on a également (MD). On a l'inverse, c'est-à-dire (MCP), (APA), (ACO), en présence de déséconomies d'échelle. On n'a cependant pas (MD) dans ces circonstances. En fait, cette méthode ne satisfait pas à (MD) de façon générale comme le montre l'exemple 3.15. Un augmentation de q_1 entraîne une diminution de x_1.

C : comme dans l'exemple 3.13

Q	x_1	x_2	Total
$(1,2)$	0.33	2.67	3.00
$(1.3\,,2)$	0.06	3.13	3.19

- Exemple 3.15 -

En utilisant à nouveau la fonction $\tilde{C} : \mathbb{R}^2_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{C}(q_1, q_2) = C(q_1 + 0.1,\ q_2)$ et $Q = (1,2)$, on obtient la répartition :

x_1	x_2	Total
0.24	2.85	3.09

[9] À noter que $\hat{C}_{-2}(\lambda,\lambda) \geq 0$ si et seulement si $\lambda \geq 0.217$. On a donc $\partial_1 \hat{C}_{-2}(\lambda,\lambda) = \partial_3 \hat{C}_{-2}(\lambda,\lambda) = 0$ pour $\lambda < 0.217$.

Une augmentation des coûts entraîne une baisse de x_1 contrairement à ce qu'exige (MCT). Cette diminution s'explique par la diminution de $\partial_i C(\lambda Q)$ pour tout $\lambda \in [0,1]$. De ce fait, la diminution de x_1 est en accord avec la condition plus faible de Young (1985a). Même si le coût total a augmenté, l'entité 1 a droit à une réduction de sa contribution aux coûts totaux parce que son coût marginal a diminué.

Méthode Shapley-Shubik

Rappelons que cette méthode est définie par :

$$x_i = \sum_{S \subset N} \frac{|S \backslash \{i\}|!\,|N \backslash S|!}{|N|!} \left[\hat{c}(S) - \hat{c}(S \backslash \{i\})\right]$$

ou encore par :

$$x_i = \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{|S|!\,(|N \backslash S| - 1)!}{|N|!} \left[\hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S)\right]$$

Le terme $\frac{|S|!\,(|N \backslash S|-1)!}{|N|!}$ est la probabilité que l'entité i fasse son entrée immédiatement après celles de S. Il y a en effet $|S|!$ arrangements possibles pour les entités de S et $(|N \backslash S| - 1)!$ pour celles qui suivent i, sur un total de $|N|!$ arrangements possibles. On a donc :

$$\sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{|S|!\,(|N \backslash S| - 1)!}{|N|!} = 1$$

(IEN), (IDN), (MD), (MCN), (MCP), (PA), (APA), (CO), (ACO)

Si une entité est négligeable, on a $\hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S) = \hat{c}(\{i\})\ \forall S \subset N \backslash \{i\}$. On a donc $x_i = \hat{c}(\{i\})$, comme l'exige (IEN). On a donc également (IDN).

Dans la mesure où un accroissement de la demande d'une entité i est de nature à augmenter $\hat{c}(S \cup \{i\})$ sans changer $\hat{c}(S)$ pour tout $S \subset N \backslash \{i\}$, il s'ensuit que x_i ne peut diminuer suite à une telle augmentation, ce qui établit (MD). Par contre, si une entité $j \neq i$ accroit sa demande et qu'on est en présence d'économies d'échelle, $\hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S)$ ne peut augmenter selon (3.9). On a donc (MCN). Selon la Proposition 3.1, on a également (CO) et donc (PA). On a les propriétés inverses, c'est-à-dire (MCP), (APA), (ACO) sous les déséconomies d'échelle.

(O), (AD), (IDC), (SE), (PR), (MCT)

Cette règle ne faisant intervenir que les coûts, satisfait (O) à par le fait même. La satisfaction de (AD) est immédiate. En invoquant (IDN), on a donc également

(IDC) et (SE) en vertu de la Proposition 3.2. Comme (SE) implique (PR), on ne peut avoir (MCT) en vertu de la Proposition 3.4. On en a une confirmation en utilisant les fonctions C et $\tilde{C}$ des exemples 3.13 et 3.15. Les répartitions pour les deux fonctions, selon la règle Shapley-Shubik, sont les suivantes :

	x_1	x_2	Total
C	0.75	2.25	3.00
$\tilde{C}$	0.87	2.22	3.09

Une augmentation des coûts entraîne une baisse de x_2 contrairement à ce qu'exige (MCT). Cet exemple n'invalide pas la condition plus faible de Young (1985b) puisqu'on a $\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{1\}) = 3 - 0.5 = 2.5 > 3.09 - 0.67 = 2.42 = \tilde{c}(\{1,2\}) - \tilde{c}(\{1\})$. Selon la condition de Young, la diminution de x_2 est justifiée, et s'impose même, du fait que son coût incrémental a diminué, même si son coût de faire cavalier seul et le coût total ont augmenté.

(RG), (TE), (S), (PS), (INP), (CH)

Supposons que la fonction de coût soit symétrique par rapport aux demandes des entités i et j. On a alors $\hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S) = \hat{c}(S \cup \{j\}) - \hat{c}(S)$ $\forall S \subset N\backslash\{i,j\}$ et $\hat{c}(N\backslash\{i\}) = \hat{c}(N\backslash\{j\})$, d'où $x_i = x_j$, ce qui établit que cette règle satisfait à (S) et donc à (TEE).

Par contre, on a violation de toutes les autres propriétés, comme le montre l'exemple 3.16. Avec $Q = (3,3,3)$, on a $x_1 > x_3$, en dépit du fait que $c_1(q_1) = c_3(q_3)$. Il s'agit d'une violation de (TE) et donc de (RG). Un accroissement de q_1 à 4 amène une augmentation de x_2, ce qui constitue une violation de (PS). Si on compare les répartitions des troisième et quatrième lignes, on observe l'inversion de l'ordre entre les contributions des entités 2 et 3, en violation de (INP).

Le même exemple, avec $Q = (3,3,3)$, montre que (CHF) et donc (CH) ne sont pas satisfaites par cette méthode. Imaginons en effet que l'entité 2 se retire après avoir payé son dû, c'est-à-dire 10.79. Le jeu de coût résiduel qui en résulte est défini par $\hat{c}(\{1\} = 10.79$, $\hat{c}(\{3\} = 0$, $\hat{c}(\{1,3\} = 13.80$. L'application de la règle Shapley-Shubik à ce jeu donne $x_1 = x_3 = 6.90$, contrairement à ce que prescrit (CHF).

$$C : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 + q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} + q_3$$

Q	x_1	x_2	x_3	Total
$(3,3,3)$	10.79	10.79	3.00	24.59
$(4,3,3)$	17.86	16.86	3.00	37.71
$(3,3,8)$	10.79	10.79	8.00	29.59
$(0,3,8)$	0.00	3.00	8.00	11.00

- Exemple 3.16 -

Nucléole

Rappelons la définition de cette méthode. On désigne par $\mathcal{N}$ la famille des $(2^n - 2)$ sous-ensembles propres de N, c'est-à-dire différents de N et $\varnothing$. Étant donné une répartition $x = (x_1, \ldots x_n)$ et un sous-ensemble S non-vide de N et différent de N, on définit l'excédent de la coalition S avec la répartition x par :

$$e(x, S) = \hat{c}(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

et par $e(x)$ le vecteur des $(2^n - 2)$ valeurs de $e(x, S)$, pour $S \in \mathcal{N}$, ordonnées de la plus petite à la plus grande. Le nucléole est défini comme la répartition x^* qui maximise lexicographiquement $e(x)$:

$$e(x) \leq_\ell e(x^*) \text{ pour toute autre répartition } x$$

où $\leq_\ell$ désigne la relation «inférieure ou égale à au sens lexicographique».[10] Autrement dit, x^* est la répartition qui maximise le plus petit gain d'une coalition, de même que le deuxième plus petit gain, le troisième, etc. C'est aussi le point central, au sens géométrique, de l'ensemble des répartitions possibles.

(RG), (TE), (PS), (INP), (CH)

Dans l'exemple 3.16, la valeur de Shapley est également le nucléole. On a donc les mêmes conclusions en ce qui regarde (RG), (TE), (PS), (INP) et (CH), c'est-à-dire une

[10] Un vecteur $e = (e_1, \ldots, e_m)$ est *lexicographiquement inférieur* à un autre $d = (d_1, \ldots, d_m)$ si la première composante de e différente de la composante correspondante de d est plus petite que cette dernière. Par exemple, $(3, 1, 9)$ est lexicographiquement plus petit que $(3, 2, 1)$.

violation de toutes ces conditions. Sobolev (1975) affirme que le nucléole est cohérent mais il s'agit d'une forme de cohérence plus faible que (CH). Voir l'annexe 3.A.6 et le chapitre 5 à ce sujet.

(O), (AD), (IDC)

Cette règle ne faisant intervenir que les coûts, satisfait à (O) par le fait même. Par contre, elle ne satisfait pas à l'additivité. Considérons l'exemple 3.17. On a deux fonctions de coût et on donne les répartitions, selon le nucléole, pour ces deux fonctions de coût et pour leur somme. La troisième n'est pas la somme des deux premières, violant ainsi (AD).

$\hat{c}(\{1\}) = 5$	$\hat{c}(\{2\}) = 6$	$\hat{c}(\{3\}) = 7$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 11$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 12$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 10$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 15$	

$\hat{c}(\{1\}) = 6$	$\hat{c}(\{2\}) = 7$	$\hat{c}(\{3\}) = 4$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 12$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 10$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 15$	

x_1	x_2	x_3	Total
5.00	4.50	5.50	15
5.33	6.33	3.33	15
10.50	10.75	8.75	30

- Exemple 3.17 -

Cela n'empêche pas (IDC) d'être satisfaite. Supposons qu'on ait :

$$C(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q) + cc(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i\left(Q^{\{i\}}\right) + cc(Q)$$

et soit $x(Q, cc)$ une répartition de $cc(Q)$ selon le nucléole. Si, pour un i donné, on ajoute $ca_i(Q)$ à la fois à $cc(Q)$ et à toutes les répartitions possibles de $cc(Q)$, on laisse tous les vecteurs des excédents possibles $e(x, S)$ inchangés. Qu'on se rappelle que $ca_i\left(Q^{\{j\}}\right) = 0 \; \forall j \neq i$. C'est dire que la répartition définie par $x_i(Q, C) = ca_i(Q) + x_i(Q, cc)$ est le nucléole du problème complet (Q, C).

(IEN), (IDN), (SE), (PR), (MCT)

Le nucléole satisfait à (IEN).

Démonstration. Supposons que i soit négligeable et montrons d'abord que $x_i(Q,C) = c_i(q_i)$. Pour ce faire, imaginons que : $x_i(Q,C) < c_i(q_i)$. Comme $C(Q) = C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right) + c_i(q_i)$, on aurait $\sum_{j\neq i} x_j(Q,C) > C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$. Cette répartition serait clairement dominée, au sens lexicographique, par la répartition $x'(Q,C)$ définie par $x'_i(Q,C) = c_i(q_i)$ et $x'_j(Q,C) = x_j(Q,C) + \frac{1}{n-1}(x_i(Q,C) - c_i(q_i))$ $\forall j \neq i$, ce qui représente une contradiction.

Imaginons ensuite que $x_i(Q,C) > c_i(q_i)$ et que S soit le sous-ensemble pour lequel l'excédent $C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C)$ soit le plus faible, c'est-à-dire le plus fortement négatif. On a alors $i \in S$ car, autrement, on aurait $C\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - \sum_{j\in S\cup\{i\}} x_j(Q,C) = C\left(Q^S\right) + c_i(q_i) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C) < C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C)$. Avec la répartition $x'(Q,C)$, on a $C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C) < C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x'_j(Q,C)$. Si on a $C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x'_j(Q,C) \leq C\left(Q^T\right) - \sum_{j\in T} x'_j(Q,C)$ pour toute autre coalition T, on peut conclure que $x'(Q,C)$ domine $x(Q,C)$. Dans le cas contraire, on peut choisir $x'_i(Q,C) \in [c_i(q_i), x_i(Q,C)]$ de manière à ce que :

$$C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x'_j(Q,C) \leq C\left(Q^T\right) - \sum_{j\in T} x'_j(Q,C)$$

pour toute autre coalition T, de sorte que $x'(Q,C)$ domine $x(Q,C)$. On arrive ainsi à une contradiction.

Vérifions maintenant que, si $x(Q,C)$ appartient au nucléole du problème original, alors $x^{N\setminus\{i\}}(Q_{-i}, C_{-i})$ appartient au nucléole du problème obtenu avec l'élimination de l'entité i. Avec l'élimination de i, les composantes de $e(x,S)$ correspondant à des coalitions auxquelles appartient i sont éliminées pour donner $e_{-i}(x_{-i},S)$ et les valeurs de toutes les autres restent inchangées. En particulier, la plus petite valeur de $e_{-i}(x_{-i},S)$ est égale à la plus petite valeur de $e(x,S)$ puisque si i appartient à une coalition S pour laquelle la plus petite valeur de $e(x,S)$ est obtenue, la même valeur est obtenue avec la coalition $S\setminus\{i\}$. S'il y avait une répartition disons $x'_{-i}(Q,C)$ du problème réduit qui dominait $x_{-i}(Q,C)$, on pourrait en conclure que la répartition $x'(Q,C)$ obtenue en complétant $x'_{-i}(Q,C)$ par $x'_i(Q,C) = c_i(q_i)$ domine $x(Q,C)$ dans le problème original. ■

Comme corollaires, le nucléole satisfait à (IDN), (SE) et (PR). On ne peut donc avoir (MCT) en vertu de la Proposition 3.4. On peut utiliser à nouveau les fonctions C

et $\tilde{C}$ des exemples 3.13 et 3.15 pour s'en convaincre. On avait obtenu les répartitions suivantes pour les deux fonctions, selon la règle Shapley-Shubik :

	x_1	x_2	Total
C	0.75	2.25	3.00
$\tilde{C}$	0.87	2.22	3.09

Or, le nucléole est en effet identique à la valeur de Shapley dans ce cas. Une augmentation des coûts entraîne une baisse de x_2 contrairement à ce qu'exige (MCT).

(MD), (MCN), (MCP), (PA), (APA), (CO), (ACO)

Lorsque le coeur existe, il existe au moins une répartition dont le surplus est non-négatif. Comme on cherche à maximiser le plus petit des surplus des coalitions avec le nucléole, il est clair que ce dernier appartient au coeur lorsque ce dernier existe, ce qui est le cas en présence d'économies d'échelle. Les propriétés (CO) et (PA) sont donc satisfaites. On peut en dire autant de (ACO) et (APA) en présence de déséconomies d'échelle.

La propriété (MCN) n'est pas pour autant satisfaite, même en présence d'économies d'échelle. C'est ce que montre l'exemple 3.18, qui utilise la fonction de coût de l'exemple 3.5. Cette dernière est concave, elle satisfait à (3.10) et elle est compatible avec (3.9). Comme dans l'exemple 3.5, la deuxième répartition correspond à une augmentation de 3\$ pour $\hat{c}(\{3\})$ et $\hat{c}(\{1,3\})$ et de 2\$ pour $\hat{c}(2,3)$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$, suite à un accroissement de la demande de l'entité 3. Ce changement entraîne une augmentation de la contribution de l'entité 1, contrairement à ce que prescrit (MCN).[11]

$\hat{c}$: comme dans l'exemple 3.5

x_1	x_2	x_3	Total
3.00	4.00	5.00	12
3.33	3.33	7.33	14

- Exemple 3.18 -

La propriété (MCP) n'est pas satisfaite non plus, même avec une fonction $\hat{c}$ convexe qui satisfait à l'inverse (3.10) et des changements qui sont compatibles avec l'inverse

[11] La première répartition est également celle qu'avait donnée la méthode des bénéfices résiduels. C'est aussi celle que donne la règle Shapley-Shubik. Après la modification des coûts, la règle Shapley-Shubik donne une répartition différente du nucléole soit $(3, 3.5, 7.5)$.

de (3.9). C'est ce que montre l'exemple 3.19. La deuxième répartition résulte d'une augmentation de 1$ pour $\hat{c}(\{3\})$ et $\hat{c}(\{2,3\})$ et de 3$ pour $\hat{c}(1,3)$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$, suite à un accroissement de la demande de l'entité 3. La contribution de l'entité 2 diminue contrairement à ce qu'exige (MCP).

$\hat{c}(\{1\}) = 6$	$\hat{c}(\{2\}) = 5$	$\hat{c}(\{3\}) = 7$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 11$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 13$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 12$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 19$	

x_1	x_2	x_3	Total
6.33	5.33	7.33	19
7.5	5.0	9.5	22

- Exemple 3.19 -

La violation de (MCN) met (MD) en péril. Effectivement, le nucléole ne satisfait pas à (MD), du moins dans les problèmes où il y a au moins cinq entités. On vient de montrer que le nucléole satisfait à (CO). Or, en utilisant un exemple avec cinq entités où le coeur se réduit à un singleton[12] donc au nucléole, Young (1994) montre qu'on n'a pas nécessairement $x_i(Q,C) \leq x_i(Q,C')$ lorsque $C\left(Q^S\right) \leq C'\left(Q^S\right)\ \forall S \subset N$ et $C\left(Q^S\right) = C'\left(Q^S\right)\ \forall S \subset N\backslash\{i\}$.[13] Un accroissement de la demande de l'entité i donne précisément ce genre d'accroissement dans les coûts. Cet exemple démontre donc que le nucléole ne satisfait pas à (MD).

3.A.5 Démonstration relatives à la règle séquentielle

On commence par le contexte général dans la mesure où les propriétés qui sont satisfaites dans ce contexte le sont également dans le contexte unidimensionnel.

[12] Cet exemple est exposé en détail dans le chapitre 5.

[13] En termes des fonctions $\hat{c}$ et $\hat{c}'$ correspondantes, $\hat{c}(S) \leq \hat{c}'(S)\ \forall S \subset N$ et $\hat{c}(S) = \hat{c}'(S)\ \forall S \subset N\backslash\{i\}$.

Règle séquentielle radiale

(RG), (TE), (PSR), (INP), (OR), (MDR), (MCNR), (PA), (APA), (CO), (ACO)

Les propriétés (TE) et (PSR) caractérisent (définissent) la règle séquentielle radiale, comme l'ont montré Koster, Tijs et Borm (1998). La préservation des rangs (RG) découle de la définition même de la règle et plus précisément du fait que les agents sont ordonnés selon leurs coûts de faire cavalier seul. Les parts des coûts ne peuvent ensuite qu'augmenter à mesure qu'on passe d'une entité à une autre dont le coût de faire cavalier seul est plus élevé.

Téjédo et Truchon (2000) démontrent que la règle séquentielle radiale satisfait aux propriétés (INP), (OR) et (MDR). Téjédo et Truchon (2001) montrent que cette même règle satisfait à (MCNR), (PA) et (CO), en présence d'économies d'échelle et aux propriétés inverses, (MCPR), (APA) et (ACO), en présence de déséconomies d'échelle.

(IDN), (IEN), (IDC), (AD), (SE)

Téjédo et Truchon (2000) démontrent que la règle séquentielle radiale satisfait à (IDN) et à (SE). Par contre, (IEN), qui est plus forte que (IDN) et (SE), n'est pas satisfaite. Supposons, par exemple, que l'entité 1 est négligeable. En vertu de (IEN), on devrait avoir $x_1 = \dfrac{C\left(Q^1\right)}{n} = c_1\left(q_1\right)$, où Q^1 est un vecteur de demandes $\left(q_1^1, q_2^1, \ldots, q_n^1\right)$ tel que $c_j\left(q_j^1\right) = c_1\left(q_1\right)\ \forall j$. La condition $\dfrac{C\left(Q^1\right)}{n} = c_1\left(q_1\right)$ peut donc encore s'écrire $C\left(Q^1\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j\left(q_j^1\right)$. Cette dernière égalité n'est pas vraie de façon générale. Quand elle l'est, on a $x_1 = c_1\left(q_1\right)$ en vertu de (SE). Comme (IEN) n'est pas vérifiée, les conditions plus fortes que sont (IDC) et (AD) ne le sont pas non plus.

(CHF), (CH)

La règle séquentielle radiale satisfait à la cohérence faible (CHF).

Démonstration. Supposons que les k plus petites entités, en termes des $c_i\left(q_i\right)$, se retirent après avoir payé leur dû selon la règle séquentielle radiale. Elles forment le sous-ensemble K. La répartition séquentielle est définie par :

$$x_i(Q, C) = \sum_{j=1}^{i} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j},\ i = 1, \ldots n$$

Pour les entités au delà de k, c'est-à-dire celles de K, on peut décomposer la formule comme suit :

$$x_i(Q,C) = \sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} + \frac{C\left(Q^{k+1}\right) - C\left(Q^k\right)}{n-k} + \sum_{j=k+2}^{i} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j}, \quad i = k+1, \ldots n \tag{3.15}$$

Le dernier terme de cette décomposition est évidemment nul pour $i = k+1$. Soit $X_k\left(Q,C\right) = \sum_{j=1}^{k} x_j\left(Q,C\right)$. On a :

$$\begin{aligned} X_k\left(Q,C\right) &= \sum_{j=1}^{k} \left(k+1-j\right) \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} = \sum_{j=1}^{k} \left(k+1-j\right) \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} \left(n-k\right) \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} - \left(n-k\right) \sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \\ &= \sum_{j=1}^{k} C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right) - \left(n-k\right) \sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \\ &= C\left(Q^k\right) - \left(n-k\right) \sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \end{aligned}$$

De cette série d'égalités, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} = \frac{C\left(Q^k\right) - X_k\left(Q,C\right)}{n-k} \tag{3.16}$$

Par définition, $C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}\right) = C\left(Q\right) - X_k\left(Q,C\right)$ si bien que $C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}^{k+1}\right) = C\left(Q^{k+1}\right) - X_k\left(Q,C\right)$. De même, $C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right) = C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}^{j}\right) - C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}^{j-1}\right)$ et $Q_{N\backslash K}^{k} = 0$. En substituant le membre droit de (3.16) au premier terme du membre gauche de (3.15), on obtient donc :

$$\begin{aligned} x_i(Q,C) &= \frac{C\left(Q^{k+1}\right) - X_k\left(Q,C\right)}{n-k} + \sum_{j=k+2}^{i} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \\ &= \frac{C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}^{k+1}\right)}{n-k} + \sum_{j=k+2}^{i} \frac{C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}^{j}\right) - C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}^{j-1}\right)}{n+1-j} \\ &= \sum_{j=k+1}^{i} \frac{C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}^{j}\right) - C^{N\backslash K}\left(Q_{N\backslash K}^{j-1}\right)}{n+1-j}, \ i = k+1, \ldots n \end{aligned}$$

■

L'hypothèse que K est formé des k plus petites entités, en termes des $c_i(q_i)$, est cruciale dans la démonstration précédente. Elle ne tient évidemment pas avec un ensemble K quelconque, invalidant de ce fait (CH).

Règle séquentielle originale

Dans le contexte unidimensionnel, les propriétés (OR), (MDR) et (MCNR) deviennent (O), (MD), (MCN). Ces dernières sont donc automatiquement satisfaites dans ce contexte. Aux propriétés satisfaites par la règle radiale, s'ajoutent (GR) et (AD). En vertu de la Proposition 3.2, on a donc également (IDC) et (IEN) mais, en fait, (IDC) est satisfaite de façon triviale dans le contexte unidimensionnel et homogène et (IEN) se confond avec (SE) et (PR). En effet, si la fonction de coût est de la forme $C(Q) = c\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right)$, on ne peut identifier de coûts comme étant spécifiques aux entités. De même, une entité ne saurait être négligeable à moins que c ne soit linéaire. Dans un tel cas, (PR) impose $x_i = c_i(q_i)$. C'est la raison pour laquelle (IDC) et (IEN) n'apparaissent pas dans la liste des propriétés satisfaites par cette règle.

3.A.6 Sur la cohérence

La propriété de cohérence implique une fonction de coût résiduel. On peut écrire celle qui a été retenue dans ce chapitre comme suit. Étant donné une règle de partage x, un problème (Q, C) et un sous-ensemble d'entités $T \subset N$, définissons $m_T = \sum_{i \in T} m_i$ et la fonction de coût résiduelle $C^T : \mathbb{R}_+^{m_T} \to \mathbb{R}$ par :

$$C^T(Y_T) = \max\left\{C\left(Y^T + Q^{N\backslash T}\right) - \sum_{j \in N\backslash T} x_j(Q, C),\ 0\right\}$$

Soit maintenant un $S \subset T$ et Y_T^S la demande obtenue de Y_T en annulant les composantes d'indices $i \in T \backslash S$. On a évidemment :

$$C^T\left(Y_T^S\right) = \max\left\{C\left(Y^S + Q^{N\backslash T}\right) - \sum_{j \in N\backslash T} x_j(Q, C),\ 0\right\}$$

En particulier, pour $Y_T = Q_T$, on a :

$$C^T\left(Q_T^S\right) = C\left(Q^{S \cup N\backslash T}\right) - \sum_{j \in N\backslash T} x_j(Q, C)$$

En termes de jeu, on a :

$$\hat{c}^T(S) = \hat{c}(S \cup N\backslash T) - \sum_{j \in N\backslash T} x_j(N, \hat{c})$$

ce qui est exactement la définition de Hart et Mas-Colell (1989).

La définition de Young (1994) est :

$$\hat{c}_Y^T(S) = \min_{S' \subset N \backslash T} \left(\hat{c}\left(S \cup S'\right) - \sum_{j \in S'} x_j(N, \hat{c}) \right)$$

C'est aussi celle qui est donnée dans le chapitre 5. Selon cette définition, la coalition $S \subset T$ est libre de choisir la coalition $S' \subset N \backslash T$ dont elle produira la demande et encaissera les contributions. On a bien sûr $\hat{c}_Y^T(S) \leq \hat{c}^T(S)$. Soit $S^*(T)$ le S' pour lequel le minimum est atteint dans la définition de $\hat{c}_Y^T(S)$. On a également $\hat{c}_Y^T(S^*(T)) = \hat{c}^T(S^*(T))$.

Young met des restrictions sur les valeurs possibles de $\hat{c}_Y^T$ par rapport à $\hat{c}^T$. Il se peut en effet qu'on ait $S^*(T) = S^*(T')$ pour $T \neq T'$. Sa condition de cohérence est donc moins forte que la nôtre.

Références

Aumann, R.J. et L.S. Shapley, 1974. *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, NJ : Princeton University Press.

Biddle, G.C. et R. Steinberg, 1985. "Common Cost Allocation in the Firm," in H.P. Young, ed., *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, North-Holland, 31-54.

Balanchandran, B. et Ramakrishnan, 1981. "Joint Cost Allocation : a Unified Approach," *Accounting Revie*w, 56, 85-96.

Friedman, E. et H. Moulin, (1999). "Three Methods to Share Joint Costs or surplus", *Journal of Economic Theory,* 87, 275-312.

Gangolly, J.S., 1981. "On Joint Cost allocation : Independent Cost Proportional Scheme (ICPS) et its Properties," *Journal of Accounting Research*, 19, 299-312.

Hart, S. et A. Mas-Colell, 1989. "Potential, Value and Consistency," *Econometrica*, 57, 589-614.

Koster M., Tijs S., et Borm P, 1998. "Serial Cost Sharing Methods for Multicommodity Situations," *Mathematical Social Science*, 36, 229-242.

Louderback, J.G., 1976. "Another Approach to Allocating Joint Costs : A Comment," *Accounting Review*, 50, 683-85.

Mirman, L.J., D. Samet et Y. Tauman, 1983 " An Axiomatic Approach to the Allocation of a Fixed Cost through Prices," *Bell Journal of Economics*, 14, 139-151.

Moriarity, S., 1975. "Another Approach to Allocating Joint Costs," *Accounting Review*, 49, 791-795.

Moulin, H. et S. Shenker, 1992. "Serial Cost Sharing," *Econometrica*, 50, 5, 1009-1039.

Moulin, H. et S. Shenker, 1994. "Average Cost Pricing Versus Serial Cost Sharing : an axiomatic comparison," *Journal of Economic Theory*, 64, 1, 178-201.

Moulin, H., 1999. "Incremental Cost Sharing : Characterization by Strategyproofness," *Social Choice and Welfare*, 16, 279-320.

Okada, N., 1985. "Cost Allocation in Multipurpose Reservoir Developmemt : The Japanese Experience," in H.P. Young, ed., *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, North-Holland, 3-29.

Ransmeier, J.S., 1942. *The Tennessee Valley Authority : A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning*, Nashville, TN : Vanderbilt University Press.

Schmeidler. D., 1969. “The Nucleolus of a Characteristic Function Game,” *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17, 1163-1170.

Shapley, L.S., 1953. “A Value for n-Person Games,” in Kuhn, H., et A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton : Princeton University Press, 307-317.

Shenker, S., 1990. “Making Greed Work in Netwoks : A Game-Theoretic Analysis of Gateway Service Disciplines,” Mimeo, Xerox Research Center, Palo Alto.

Shubik, M., 1962. “Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing,” *Management Science*, 8, 325-43.

Sobolev, A.I., 1975. “Characterization of the Principle of Optimality for Cooperative Games through Functional Equations,” in N.N. Voroby'ev, ed., *Mathematical Methods in Social Sciences*, Vipusk 6, Academy of Sciences of the Lithuanian SSR, Vilnius, 92-151.

Sprumont, Y., 1998. “Ordinal cost sharing,” *Journal of Economic Theory*, 81, 126-162.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2000. “Serial Cost Sharing with Many Goods and General Aggregation,” Cahier de recherche 0007, Département d'économique, Université Laval.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2001. “Monotonicity and Bounds for Cost Share under the Path Serial Rule,” Cahier de recherche 0203, Département d'économique, Université Laval.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2002. “Serial Cost Sharing in Multidimensional Contexts,” *Mathematical Social Sciences*, 44, 277-299.

Young, H.P., 1985a. “Producer Incentives in Cost Allocation,” *Econometrica,* 53, 757-65.

Young, H.P., 1985b. “Monotonicity in Cooperative Games,” *International Journal of Game Theory,* 13, 65-72.

Young, H.P., 1994. “Cost Allocation”, in R.J.Aumann et S. Hart, eds., *Handbook of Game Theory, Vol. II,* Amsterdam : North-Holland, Chap. 34, 1191-1235.

Wang, Y.T., 2002. “Proportionally Adjusted Marginal Pricing Method to Share Join Costs,” *Review of Economic Design,* 7, 205-211.

Chapitre 4

Jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables des solutions

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter la notion de jeu de coûts. Un jeu de coûts est un jeu coopératif[1] dans lequel le gain de la coopération est la moindre dépense permise par la réalisation coordonnée des projets d'un ensemble d'agents. Le problème est alors de savoir comment ces agents vont se répartir ce gain, c'est-à-dire cette réduction des coûts, ou de façon équivalente comment ils vont contribuer au financement de la dépense ainsi occasionnée.

Le chapitre est organisé comme suit. On définit formellement à la section 4.2 ce qu'il faut entendre par jeu de coûts et on en recense les principaux types. On introduit à la section 4.3 les notions de pré-solution et de solution. Enfin on passe en revue à la section 4.4 les propriétés habituellement requises d'une solution.

4.2 Jeux de coûts

4.2.1 Définitions

Soit $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels, ensemble des indices des joueurs ou ensemble des indices des projets,[2] et $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties de N (y compris la partie vide que l'on note ϕ). On appelle *coalition de joueurs* ou *groupe de projets* toute partie de N, *grande coalition* ou *totalité des projets* N lui-même. Un *jeu de coûts* défini sur N est une application $c : \mathcal{N} \to I\!R_+$ qui possède les quatre propriétés suivantes :[3]

(i) *gratuité de l'inaction :*

$$c(\phi) = 0$$

(ii) *monotonicité :*

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : S \subseteq T \Rightarrow c(S) \leq c(T)$$

(iii) *sous-additivité :*

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$$

[1] Pour un exposé général de la théorie des jeux coopératifs, on pourra consulter l'ouvrage de Owen (1995) et pour son application aux problèmes d'imputation des coûts joints, on pourra se référer à Young (1994).

[2] On distinguera soigneusement l'ensemble N des joueurs d'un arrangement de ces mêmes joueurs. Dans un arrangement l'ordre des joueurs est spécifié.

[3] $I\!R^n$ désigne l'espace réel de dimension n, $I\!R^n_+$ sa partie non négative et $I\!R^n_{++}$ sa partie strictement positive. $I\!N$ désigne l'ensemble des entiers, $I\!N_+$ l'ensemble des entiers non négatifs et $I\!N_{++}$ l'ensemble des entiers positifs. Le cardinal de tout ensemble fini X est noté $|X|$.

(iv) *non-trivialité :*

$$0 < c(N) < \sum_{i \in N} c(\{i\})$$

On appelle parfois *jeux essentiels* les jeux pour lesquels $c(N)$ est inférieur à la somme des $c(\{i\})$.

On dira qu'un jeu est strictement monotone si :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : S \subset T \Rightarrow c(S) < c(T)$$

et qu'il est strictement sous-additif si :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} \setminus \phi : S \neq T \Rightarrow c(S \cup T) < c(S) + c(T)$$

La monotonicité stricte et la sous-addivité stricte impliquent respectivement :

$$c(\{i\}) > 0, \ i \in N \quad \text{et} \quad c(N) < \sum_{i \in N} c(\{i\})$$

La condition de non-trivialité est donc superflue pour ce genre de jeu.

On peut considérer également un jeu de coûts défini sur N comme un point de l'espace réel de dimension 2^n. Notons[4] c les vecteurs de composantes c_S, $S \in \mathcal{N}$, $c \in I\!R_+^{2^n}$ et soit $\mathbb{C}_N$ la partie de $I\!R_+^{2^n}$ dont les éléments sont des jeux de coûts. Alors $c \in \mathbb{C}_N$ si :

(i') gratuité de l'inaction :

$$c_\phi = 0$$

(ii') monotonicité :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : S \subseteq T \Rightarrow c_S \leq c_T$$

(iii') sous-additivité :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : c_{S \cup T} \leq c_S + c_T$$

(iv') non-trivialité :

$$0 < c_N < \sum_{i=1}^{n} c_{\{i\}}$$

On note C_N l'ensemble des jeux de coûts définis sur N, c'est-à-dire soit l'ensemble des fonctions c qui vérifient les quatre conditions (i)-(iv), soit l'ensemble $\mathbb{C}_N$ des vecteurs c qui vérifient les conditions (i')-(iv'). Dans ce qui suit on appellera indifféremment un élément $c \in C_N$, soit un jeu de coûts défini sur N, soit une fonction de

[4] Nous notons de la même façon, c, la fonction $c : \mathcal{N} \rightarrow I\!R_+$ et le vecteur $c \in \mathbb{C}_N$. Aucune confusion n'est cependant possible.

coût définie sur $\mathcal{N}$. On appelle simplement jeu de coûts, tout couple (c, N) tel que $c \in C_N$. L'ensemble des jeux de coûts est donc l'ensemble :

$$JC = \{(c, N) \mid |N| \in I\!N_{++}, c \in C_N\}$$

La signification de cette formalisation est la suivante : N est un ensemble d'agents autonomes qui ont chacun un *projet* à réaliser. Un projet est éventuellement décomposable en sous-projets, mais alors tous ces sous-projets sont à réaliser par le même agent. On peut voir N comme l'ensemble des projets eux-mêmes.

Ces projets peuvent être de natures très diverses. Le cas le plus simple est celui d'agents qui veulent disposer de différentes quantités d'un ou de plusieurs biens ordinaires. Regrouper leur production permet de tirer parti d'économies d'échelle ou de complémentarités.[5] Il peut s'agir aussi de biens publics que différentes autorités veulent mettre à la disposition de leurs administrés.

Considérons par exemple les municipalités d'une même communauté urbaine qui veulent, chacune, équiper leur territoire d'un éclairage public. Pour chaque municipalité i, un projet est un plan qui définit pour chaque voie, ou chaque portion de voie, du territoire qu'elle administre, un certain niveau d'intensité de l'éclairage à mettre en place.

Considérons maintenant des villes situées au bord d'un même lac. Pour préserver la qualité des eaux du lac, chaque ville est dans l'obligation légale de traiter les eaux usées des ménages et des entreprises implantés sur son territoire. Le projet de la ville i est alors un système de collecte et de traitement des eaux usées avant rejet dans le lac.

Soit maintenant une vallée et dans cette vallée une compagnie d'électricité, un syndicat d'agriculteurs et une association des pêcheurs à la ligne. La compagnie d'électricité voudrait construire un barrage pour turbiner l'eau et produire de l'électricité selon un profil intra-annuel d'appels de charge bien spécifié. Les agriculteurs voudraient construire eux aussi un barrage qui leur garantirait un certain profil intra-annuel de disponibilités en eau pour irriguer les terres qu'ils cultivent. Le profil intra-annuel de leurs besoins n'est généralement pas le même que celui des hydro-électriciens. Enfin, les pêcheurs voudraient aussi construire un barrage qui permettrait de régulariser le débit de la rivière et garantir l'étiage en période de basses eaux, préservant ainsi la richesse de la flore aquatique, donc la qualité des frayères et par conséquent l'abondance des poissons. Pour la compagnie d'électricité, le projet est un certain type de barrage équipé

[5] Pour un examen détaillé des gains ainsi permis les meilleurs ouvrages sont encore ceux de Baumol, Panzar et Willig (1982) et Sharkey (1982).

de turbines[6] et un réseau de transport de l'électricité produite, du barrage jusqu'aux divers points d'entrée de son réseau de distribution. Pour le syndicat d'agriculteurs le projet est un barrage sans turbine, d'une capacité de rétention différente, et un réseau d'adduction de l'eau aux différentes parcelles à cultiver. Pour l'association des pêcheurs le projet est un barrage d'une capacité de rétention probablement différente de la capacité requise pour les deux autres projets.

Toute partie $S \in \mathcal{N}$ est un sous-ensemble des projets réalisés de façon coordonnée, c'est-à-dire de façon à minimiser le coût total de réalisation des projets en question ; $c(S)$ ou c_S s'interprète comme ce coût total minimisé. Le fait qu'on définisse la fonction c sur l'ensemble des parties de N signifie que pour toute partie S de N le coût total de réalisation ou bien ne dépend pas de l'ordre dans lequel on envisage la réalisation de ces projets, ou bien que l'ordre dans lequel ils seront réalisés est optimisé de façon à minimiser leur coût global.[7] Dans l'exemple des villes qui doivent épurer leurs rejets, $c(S)$ est le coût d'un système de collecte et de traitement des eaux usées de toutes les municipalités $i \in S$ et d'aucune municipalité $j \notin S$. Dans l'exemple des barrages, convenons d'affecter l'indice 1 à la compagnie d'électricité, l'indice 2 au syndicat d'agriculteurs et l'indice 3 à l'association des pêcheurs. Alors $c(\{1,2\})$ est le coût de construction d'un barrage dont le volume de retenue permet de satisfaire les besoins en eau à turbiner de la compagnie d'électricité et les besoins en eau des agriculteurs,[8] barrage équipé de turbo-alternateurs, duquel partent deux réseaux, le réseau de transport de l'énergie produite aux points d'entrée dans le réseau de distribution de la compagnie d'électricité, et le réseau d'adduction de l'eau aux parcelles à irriguer des agriculteurs.

La formalisation est une formalisation en termes de coûts des projets. La seule caractéristique d'un projet à réaliser, ou d'un ensemble de projets qui importe ici, est son coût, et non ses caractéristiques physiques. Le même projet peut avoir des caractéristiques physiques identiques mais des coûts de réalisation différents pour deux agents car ces agents sont, par exemple, à même d'exercer des pressions différentes sur leurs fournisseurs qui leur accorderont donc des conditions de vente différentes. Si les agents sont des entreprises, ils peuvent également bénéficier, pour la réalisation de

[6] On suppose pour simplifier que l'eau est turbinée au pied du barrage.

[7] Si le coût de réalisation dépendait de l'ordre, il faudrait définir c sur la famille de tous les arrangements de sous-ensembles d'indices de N. On aurait par exemple pour les arrangements $a = (3,5,9)$ et $a' = (5,9,3)$ du sous-ensemble $S = \{3,5,9\}$, $c(a) \neq c(a')$.

[8] On suppose pour simplifier que le débit de la rivière suffit pour alimenter une retenue qui permettrait de satisfaire les besoins en eau des agents. En d'autres termes le profil intra-annuel des apports naturels et les profits intra-annuels des besoins des utilisateurs sont compatibles, comme dans l'exemple numérique traité en détail plus loin.

ces projets, de compétences qui leurs sont propres et qui diffèrent d'une entreprise à l'autre. Pour les mêmes raisons, deux groupes d'agents, deux coalitions, qui réalisent un ensemble de projets physiquement identiques, peuvent avoir à supporter des coûts différents. Inversement deux projets différents peuvent avoir des coûts identiques. Ce qui importe ce n'est pas la différence physique des projets mais la similitude ou la dissemblance de leurs coûts.

Les conditions (i) à (iv) s'interprètent comme suit. La condition (i) précise que s'il n'y a aucun projet à réaliser le coût à encourir est nul. La condition (ii) signifie que, partant d'un sous-ensemble S quelconque de projets, le coût total de réalisation coordonnée ne baisse pas lorsqu'on adjoint un ou plusieurs autres projets à l'ensemble S initialement considéré. Dans l'exemple des barrages $c(\{1,2\}) \leq c(\{1,2,3\})$ signifie que tenir compte des contraintes de maintien d'étiage auxquelles est sensible l'association des pêcheurs, ne peut pas faire baisser le coût de réalisation d'une retenue qui doit déjà garantir le flux d'approvisionnement des turbo-alternateurs que demande la compagnie d'électricité, ainsi que le flux nécessaire à l'irrigation. La condition (iii) énonce que le coût de réalisation d'un ensemble de projets est au plus égal à la somme des coûts de réalisation de ses parties, quelle que soit la partition de l'ensemble. En quelque sorte «qui peut le plus, peut le moins».

Pour illustrer pourquoi les deux propriétés (ii) et (iii) devraient être satisfaites, reprenons l'exemple des barrages dont les données sont présentées au Tableau 4.1. Supposons aussi pour simplifier, que :

- au cours de chaque mois les débits instantanés sont constants ;
- la loi oblige ceux qui retiennent l'eau, qui construisent une retenue, à laisser dans la rivière le débit d'étiage lorsque le débit naturel lui est supérieur ;
- les pertes par évaporation de la masse d'eau retenue dans tout barrage, sont négligeables ;
- l'eau prélevée pour irrigation ne retourne pas dans le réseau hydrographique : elle part en totalité dans l'atmosphère soit par évaporation depuis le sol, soit par évapo-transpiration des plantes, de sorte que les prélèvements pour irrigation sont des prélèvements nets.

S'il n'y a que le projet des pêcheurs à réaliser, il suffit de construire un réservoir dont la capacité de retenue est de $500 - 100 = 400$, pour remédier à l'insuffisance du débit naturel de la rivière au mois de septembre, le seul mois au cours duquel le débit naturel est inférieur au débit d'étiage demandé par l'association des pêcheurs.

Mois	Débit naturel de la rivière	Débit voulu Électriciens	Débit voulu Agriculteurs	Débit voulu Pêcheurs
Janvier	1000	3000	0	500
Février	1000	2000	0	500
Mars	2500	1000	0	500
Avril	3500	0	0	500
Mai	2500	0	1000	500
Juin	1500	0	2000	500
Juillet	500	0	2500	500
Août	500	0	1500	500
Septembre	100	0	0	500
Octobre	2000	0	0	500
Novembre	3500	1500	0	500
Décembre	2500	3000	0	500
Cumulée sur l'année	21100	10500	7000	6000

Tableau 4.1 – Débit naturel et débits demandés par les agents

S'il n'y a que le projet du syndicat d'agriculteurs à réaliser, il faut tenir compte du fait que l'eau prélevée pour irriguer est totalement perdue et donc le syndicat doit laisser dans la rivière le volume du débit d'étiage lorsque le débit naturel lui est supérieur. Pour compenser le déficit du débit du fleuve au cours du mois de juin, il faut détenir en réserve un volume égal à $2000 + 500 - 1500$, c'est-à-dire le débit appelé par les agriculteurs, soit 2000, augmenté du débit d'étiage, 500, diminué du flux d'apports naturel, 1500 ; pour le mois de juillet la réserve à détenir s'élève à $2500 + 500 - 500$ et pour le mois d'août à $1500 + 500 - 500$. Puisqu'au cours de ces trois mois consécutifs les demandes des agriculteurs sont supérieures au débit naturel, les réserves qu'il faut avoir accumulé fin mai, s'élèvent à 5000.

En général, du fait que les flancs des vallées sont évasés, et à cause de la pente du lit du fleuve, il est moins coûteux de construire un seul barrage d'une capacité de 5400 plutôt que deux barrages, l'un d'une capacité de 5000, l'autre d'une capacité de 400.[9]

[9] On notera qu'on dispose de débits suffisants tout au long de l'année pour constituer un stock de 5400 disponible fin mai, pour utilisation en juin, juillet, août et septembre. En effet, compte tenu de la contrainte d'étiage, en mai le solde du débit naturel net des retraits pour irrigation s'élève à 2500-500-1000=1500. En avril, le respect de la seule contrainte d'étiage permet d'accumuler 3500-500=3000. Enfin en mars on peut accumuler 2500-500=2000. Ce projet commun des agriculteurs et des pêcheurs est réalisable indépendamment du projet des électriciens qui turbinent 1000 au mois de mars. Il suffit

La réalisation du seul projet des électriciens nécessite l'érection d'une retenue d'une capacité de 3500. En décembre la compagnie veut turbiner 3000, le débit naturel n'est que de 2500 d'où un déficit de 500 ; en janvier elle veut turbiner 3000 alors que le débit n'est que de 1000, d'où un déficit de 2000 ; enfin en février elle veut turbiner 2000 tandis que le débit naturel n'est que de 1000, d'où un déficit de 1000.[10]

Le coût de réalisation coordonnée des projets des électriciens et des pêcheurs est égal au coût de réalisation du seul projet des électriciens. La retenue construite pour réaliser le seul projet des électriciens permet en effet de satisfaire aussi les besoins des pêcheurs.

Le coût de réalisation coordonnée des trois projets est le coût d'érection d'un barrage d'une capacité de retenue de 5400, équipé de turbo-alternateurs et des réseaux de transport de l'énergie et de l'adduction de l'eau. Ce coût sera évidemment moindre que le coût de réalisation de deux barrages, l'un d'une capacité de 3000 équipé des mêmes turbo-alternateurs, l'autre d'une capacité de 5400, coût qui devrait être engagé si d'une part la compagnie d'électricité agissait seule et si d'autre part le syndicat d'agriculteurs et l'association des pêcheurs agissaient de façon coordonnée. A fortiori le coût de construction du grand barrage équipé pour produire l'électricité est moindre que le coût d'érection des trois barrages qu'il faudrait édifier si les trois agents devaient mettre en oeuvre, chacun séparément, leurs projets.

On remarquera, pour en terminer avec la condition (iii), que la condition de sous-additivité implique que, pour toute partition $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_h, \ldots, P_m\}$ de l'ensemble des projets, on doit avoir :

$$\sum_{h=1}^{m} c\left(P_h\right) \geq c\left(N\right)$$

que la retenue commune soit située en aval de celle des électriciens qui restituent l'eau après l'avoir turbinée.

[10] Là encore le débit naturel est suffisamment élevé pour accumuler un stock de 3000 disponible fin novembre. Compte tenu de la contrainte d'étiage, il est possible de constituer, au cours du mois de novembre un stock de 3500-1500=2000, car après turbinage les 1500 que veulent utiliser les électriciens sont restitués à la rivière de sorte que la contrainte d'étiage est satisfaite, et, au cours du mois d'octobre, un stock de 2000-500=1500. La constitution de cette réserve au cours des mois de novembre et d'octobre n'interfère pas avec la constitution de la réserve nécessaire à la réalisation des projets des agriculteurs et des pêcheurs qui a lieu au cours des mois de mars, avril et mai. Il n'y a donc pas de conflit pour l'appropriation de l'eau. C'est ce qui permet une formalisation en termes d'un pur jeu de coûts de construction de barrages de capacités de retenues différentes et de caractéristiques techniques également différentes.

La condition (iv) exclut de l'étude les situations triviales dans lesquelles ou bien l'ensemble des projets à réaliser ne coûterait rien, ou bien leur réalisation coordonnée ne permettrait aucune économie.

Pour conclure, soulignons le fait que si chacune des quatre propriétés supposées de la fonction c, à savoir la gratuité de l'inaction, la monotonicité, la sous-additivité et la non-trivialité semble bien capter un aspect essentiel des situations dans lesquelles se pose un réel problème des gains de la coopération, leur ensemble constitue un tout difficilement réductible. En effet :

1. la gratuité de l'inaction et la monotonicité impliquent ensemble que :
$$\forall S \in \mathcal{N} : c(S) \geq 0$$
2. la gratuité de l'inaction, la monotonicité et le non-respect de la première des inégalités qui définissent la non-trivialité impliqueraient ensemble que :
$$\forall S \in \mathcal{N} : c(S) = 0$$
3. la gratuité de l'inaction, la monotonicité, la sous-additivité et le non-respect de la seconde des inégalités définissant la non-trivialité impliqueraient ensemble que :
$$\forall S \in \mathcal{N} \setminus \phi : c(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\})$$

On remarquera enfin que si les m fonctions $c^1, .., c^g, .., c^m$ définies sont $\mathcal{N}$ et à valeurs dans $I\!R_+$ vérifient les quatre conditions (i)-(iv), alors :

1. la fonction $c = \sum_{g=1}^{m} c^g$, somme des jeux $c^1, .., c^m$, définie ainsi :
$$\forall S \leq N : c(S) = \sum_{g=1}^{m} c^g(S)$$
vérifie ainsi les quatre conditions (i)-(iv) ; la somme d'un nombre fini de jeux mettant en présence le même ensemble de joueurs est elle-même un jeu ;
2. la fonction $c = \sum_{g=1}^{m} x^g c^g$, $0 \leq x^g \leq 1$, $g = 1, .., m$ et $\sum_{g=1}^{m} x^g = 1$, combinaison linéaire connexe des jeux $c^1, .., c^m$, définie ainsi :
$$\forall S \leq N : c(S) = \sum_{g=1}^{m} x^g c^g(S)$$
vérifie aussi les quatre conditions (i)-(iv) ; toute combinaison linéaire convexe d'un nombre fini de jeux mettant en présence le même ensemble de joueurs est donc elle-même un jeu.

Il est clair par ailleurs que si c est un jeu, alors, pour tout $\lambda > 0$, la fonction $c^{(\lambda)}$ définie par :

$$\forall S \leq N : c^{(\lambda)}(S) = \lambda c(S)$$

est elle-même un jeu ; la multiplication d'un jeu par un réel positif définit un nouveau jeu. On en conclut que $\mathbb{C}_N U \{0\}$ est un cône convexe.[11]

4.2.2 Quelques grandes classes de jeux de coûts

Distinguons les propriétés générales de la fonction c et les propriétés de décomposabilité de la structure des coûts.

Propriétés générales

Jeux à somme constante On dit qu'un jeu $c \in C_N$ est *à somme constante* si :[12]

$$\forall S \in \mathcal{N} : c(S) + c(N \backslash S) = c(N)$$

Pour ce genre de jeu la somme du coût de réalisation de tout sous-ensemble de projets S et du coût de réalisation du sous-ensemble complémentaire $N \backslash S$ est égale au coût de réalisation de l'ensemble des projets N. On peut se demander s'il existe de tels jeux qui soient aussi des jeux essentiels ou non triviaux. Le jeu suivant à trois agents montre que c'est bien le cas.

Exemple 4.1 Soit le jeu à trois joueurs dont la fonction de coût est donnée par :

$$\begin{aligned}
&c(\{1\}) = 3\ ,\ c(\{2\}) = 5\ ,\ c(\{3\}) = 7 \\
&c(\{1,2\}) = 7\ ,\ c(\{1,3\}) = 9\ ,\ c(\{2,3\}) = 11 \\
&c(\{1,2,3\}) = 14
\end{aligned}$$

Le jeu est à somme constante, car :

$$\begin{aligned}
c(\{1\}) + c(\{2,3\}) &= 3 + 11 = 14 \\
c(\{2\}) + c(\{1,3\}) &= 5 + 9 = 14 \\
c(\{3\}) + c(\{1,2\}) &= 7 + 7 = 14
\end{aligned}$$

[11] Considérons un ensemble $\{x^1, .., x^g, .., x^m\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle cône convexe engendré par ces vecteurs l'ensemble des vecteurs x de la forme :

$$x = \sum_{g=1}^{m} \lambda^g x^g$$

où $\{\lambda^1, .., \lambda^g, .., \lambda^m\}$ est un ensemble de réels non-négatifs quelconques.

[12] Soit X un ensemble, X_1 et X_2 deux sous-ensembles de X. On appelle soustraction ensembliste X_1 moins X_2, le sous-ensemble de X_1, noté $X_1 \backslash X_2$, défini par : $X_1 \backslash X_2 = \{x | x \in X_1, x \notin X_2\}$.

Par ailleurs le jeu est essentiel puisqu'on a :

$$c(\{1\}) + c(\{2\}) + c(\{3\}) = 3 + 5 + 7 = 15 > 14 = c(\{1, 2, 3\})$$

Il est assez évident que la somme de jeux essentiels est un jeu essentiel, que toute combinaison linéaire convexe de jeux essentiels est un jeu essentiel et qu'enfin la multiplication d'un jeu essentiel par un réel positif est aussi un jeu essentiel. Soit $\mathbb{C}_N^E$ l'ensemble des jeux essentiels vus comme des points de $\mathbb{R}^{2^n}$. Alors $\mathbb{C}_N^E U \{0\}$ est un cône convexe.

Jeux concaves Les jeux de coûts *concaves* constituent une classe de jeux particulièrement importante. Ce sont des jeux dans lesquels les incitations à coopérer sont puissantes et les solutions généralement faciles à calculer.

On dit que la fonction de coût $c \in C_N$ est concave si l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

$$\forall i \in N, \forall Q, R \subseteq N \setminus \{i\} : Q \subseteq R \Rightarrow \quad c(Q \cup \{i\}) - c(Q) \geq c(R \cup \{i\}) - c(R) \qquad \text{(a)}$$

$$\forall S, T \subseteq N : c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T) \qquad \text{(b)}$$

La condition (a) signifie que le coût additionnel encouru pour adjoindre un projet i à un groupe de projets R à réaliser de façon coordonnée est inférieur (stricto sensu n'est pas supérieur) au coût additionnel qu'il faudrait supporter pour l'adjoindre à un sous-groupe de projets plus restreint $Q \subseteq R$. Cette condition prend une forme remarquablement simple lorsque la fonction de coût est symétrique (cf paragraphe suivant).

Il est clair que la condition (a) est un cas particulier de la condition (b). En effet soit $Q, R \subseteq N \setminus \{i\}$ et $Q \subseteq R$, posons $S = Q \cup \{i\}$ et $T = R$, et supposons la condition (b) satisfaite c'est-à-dire :

$$c(Q \cup \{i\}) + c(R) \geq c(Q \cup \{i\} \cup R) + c(\{Q \cup \{i\}\} \cap R)$$

Or $Q \subseteq R$ implique que $Q \cup \{i\} \cup R = R \cup \{i\}$ et, de plus, puisque $i \notin R$, on a aussi, $\{Q \cup \{i\}\} \cap R = Q$. L'inégalité ci-dessus se réduit donc à :

$$c(Q \cup \{i\}) + c(R) \geq c(R \cup \{i\}) + c(Q)$$

c'est-à-dire à la condition (a) :

$$c(Q \cup \{i\}) - c(Q) \geq c(R \cup \{i\}) - c(R)$$

On montre dans l'annexe que, réciproquement, la condition (a) implique la condition (b). Les deux conditions sont donc équivalentes.

On remarquera que la concavité de la fonction de coût implique sa sous-additivité. C'est une conséquence immédiate de la condition (b). $c(S \cap T) \geq 0$ implique en effet que $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$. On verra que la réciproque n'est pas vraie.

Un exemple de jeu concave est le jeu suivant. Considérons trois régions, indicées $i = 1, 2, 3$, qui veulent être reliées à un terminal gazier T pour leur alimentation en énergie et dont les localisations sont celles représentées à la Figure 4.1.

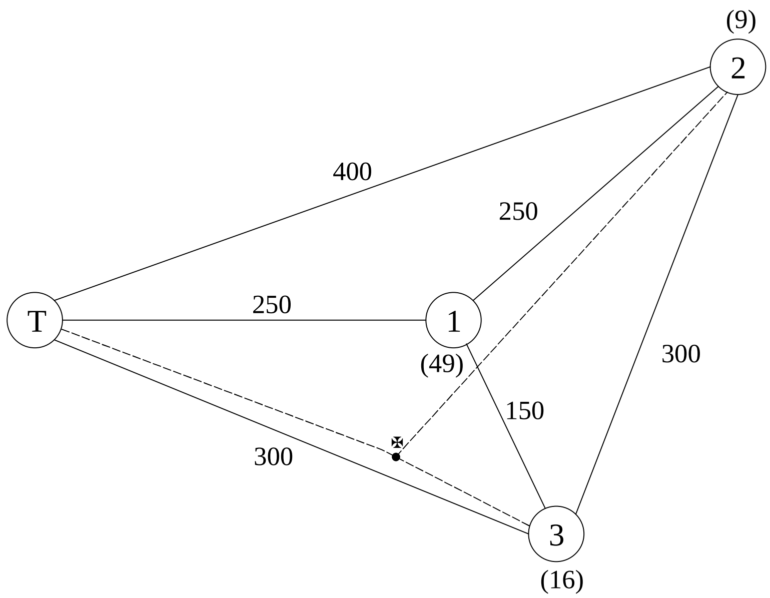


Figure 4.1 – Disposition géographique du terminal et des régions

Les distances, en kilomètres, entre les différentes régions et le terminal sont portées à côté du segment correspondant. Les quantités à acheminer par unité de temps, les débits, du terminal à chaque région, sont les suivantes : Région 1 : 49 , Région 2 : 9, Région 3 : 16.

Le coût de construction d'une liaison est proportionnel à sa longueur mais moins que proportionnel au débit à cause d'effets surface-volume bien connus.[13] On posera

[13] En général pour la construction d'un réservoir, le coût est à peu près proportionnel à la surface du contenant, qui croît comme le carré du rayon de la sphère pour un réservoir sphérique, ou comme le carré de la longueur du côté pour un réservoir cubique. La capacité du réservoir croît comme le cube du rayon ou le cube de la longueur du côté. Pour le réservoir sphérique si v est le volume et r le rayon, alors $v = \pi r^3$, soit $r = \pi^{-1/3} v^{1/3}$. La surface est égale à πr^2. Si le coût par unité de surface est égal

que le coût d'une liaison de longueur l et de débit d est de la forme $a\ l\sqrt{d}$ où a est un coefficient qui dépend des unités de mesure et des conditions économiques générales. Pour le calcul, on prendra, pour obtenir le coût en millions de dollars : $a = 4$, $l =$ longueur en kilomètres, $d =$ débit exprimé dans la même unité que celle utilisée pour exprimer les besoins des régions.

On notera que :

- si les régions 2 et 3 devaient chacune construire un gazoduc, elles construiraient une liaison directe du terminal à la région concernée ;
- si les régions 2 et 3 devaient agir de concert, elles seraient indifférentes entre les deux solutions qui consistent :
  - · l'une à construire deux conduits l'un du terminal à 2 et l'autre du terminal à 3, ce qu'elles feraient si elles agissaient indépendamment l'une de l'autre et qui coûte :
    $(4 \times 400 \times \sqrt{9}) + (4 \times 300\sqrt{16}) = 4800 + 4800 = 9600$
  - · l'autre à construire un conduit entre T et 3 d'une capacité de $16+9 = 25$, puis un conduit de 3 à 2 d'une capacité de 9 et qui coûte :
    $(4 \times 300 \times \sqrt{25}) + (4 \times 300 \times \sqrt{9}) = 6000 + 3600 = 9600$

La première solution ne fait pas jouer les phénomènes de rendements croissants puisqu'il n'y a pas de conduit commun. Mais elle minimise le parcours que doit effectuer le fluide à livrer. En effet, avec cette solution, le parcours moyen d'une unité de gaz liquéfié est égal à $[(400 \times 9) + (300 \times 16)]/25 = 336$ km. La seconde solution permet de bénéficier d'économies d'échelle le long du tronc commun de 300 km entre T et 3. Mais elle allonge le parcours des unités qui sont acheminées de T à 2, de $600 - 400 = 200$ km, le parcours moyen d'une unité de fluide s'élevant maintenant à $[(300 \times 25) + (300 \times 9)]/25 = 408$ km. Par rapport à la première solution, le gain permis par les rendements d'échelle sur le parcours commun est exactement perdu dans l'allongement de la distance que doivent parcourir les unités livrées en 2.[14]

à c, le coût total C est égal à $c\pi r^2$. En substituant à r son expression en fonction de v, on obtient le coût total en fonction du volume $C = c\ \pi^{1/3} v^{2/3}$. Pour un gazoduc d'une longueur donnée, le coût croît à peu près proportionnellement au diamètre du conduit, tandis que le débit admissible croît avec le carré du diamètre. Donc le coût par unité de longueur est de la forme $a\sqrt{d}$, où a est un paramètre positif et d est le débit.

[14] La solution qui consisterait pour 2 et 3 à construire une liaison d'un débit de 25 entre T et 1, une liaison d'un débit de 9 entre 1 et 2 et enfin une liaison d'un débit de 16 entre 1 et 3, coûterait : $\left(4 \times 250 \times \sqrt{25}\right) + \left(4 \times 250 \times \sqrt{9}\right) + \left(4 \times 150 \times \sqrt{16}\right) = 5000 + 3000 + 2400 = 10400$

Par rapport à la solution avec tronc commun entre T et 3, cette configuration de réseau réduit le tronc commun de 50 km, allonge de 100 km le parcours des unités à acheminer en 3, $250 + 150 = 400$ km au lieu de 300, et réduit de 100 km le parcours des unités à acheminer en 2, $250 + 250 = 500$ km au

On néglige pour simplifier les solutions qui consisteraient à construire un tronc commun de T à X, X situé en un endroit quelconque éventuellement confondu avec 1 mais pas nécessairement, puis deux liaisons, l'une de X à 2 et l'autre de X à 3. Un réseau de ce type est représenté en pointillés à la Figure 4.1.

La fonction de coût a la structure suivante :[15]

$$\begin{array}{l} c(\{1\}) = 7000\ ,\ c(\{2\}) = 4800\ ,\ c(\{3\}) = 4800 \\ c(\{1,2\}) = 10616\ ,\ c(\{1,3\}) = 10462\ ,\ c(\{2,3\}) = 9600 \\ c(\{1,2,3\}) = 14002 \end{array}$$

Cette fonction est sous-additive. En effet :

$$\begin{array}{c} c(\{1,2\}) = 10616 \leq 11800 = c(\{1\}) + c(\{2\}) \\ c(\{1,3\}) = 10462 \leq 11800 = c(\{1\}) + c(\{3\}) \\ c(\{2,3\}) = 9600 \leq 9600 = c(\{2\}) + c(\{3\}) \end{array}$$

$$c(\{1,2,3\}) = 14002 \leq \left\{ \begin{array}{l} 16600 = c(\{1\}) + c(\{2\}) + c(\{3\}) \\ 16600 = c(\{1\}) + c(\{2,3\}) \\ 15416 = c(\{1,2\}) + c(\{3\}) \\ 15262 = c(\{1,3\}) + c(\{2\}) \end{array} \right.$$

Ces inégalités impliquent que la condition (a) est satisfaite. En effet :

– pour le projet 1, on a :

$$c(\{1\}) = 7000 \geq \left\{ \begin{array}{l} c(\{1,2\}) - c(\{2\}) = 5816 \\ c(\{1,3\}) - c(\{3\}) = 5662 \end{array} \right\} \geq c(\{1,2,3\}) - c(\{2,3\}) = 4402$$

– pour le projet 2, on a :

$$c(\{2\}) = 4800 \geq \left\{ \begin{array}{l} c(\{1,2\}) - c(\{1\}) = 3616 \\ c(\{2,3\}) - c(\{3\}) = 4800 \end{array} \right\} c(\{1,2,3\}) - c(\{1,3\}) = 3450$$

– pour le projet 3, on a :

$$c(\{3\}) = 4800 \geq \left\{ \begin{array}{l} c(\{1,3\}) - c(\{1\}) = 3462 \\ c(\{2,3\}) - c(\{2\}) = 4800 \end{array} \right\} c(\{1,2,3\}) - c(\{1,2\}) = 3386$$

lieu de 600. Mais il y a plus d'unités à acheminer en 3 qu'en 2, et donc le coût augmente. Le parcours moyen d'une unité à livrer est ici de $[(250 \times 25) + (250 \times 9) + (150 \times 16)]/25 = 446$ km, au lieu de 408.

[15] Pour les calculs, on a retenu : $\sqrt{58} = 7,616$, $\sqrt{65} = 8,062$ et $\sqrt{74} = 8,602$.

Le jeu est donc bien concave.

On remarquera que la somme de jeux concaves est un jeu concave, que toute combinaison linéaire convexe de jeux concaves est un jeu concave et que la multiplication d'un jeu concave par un réel positif est encore un jeu concave. Soit $\mathbb{C}_N^C$ l'ensemble des jeux concaves vus comme des points de $\mathbb{R}^{2^n}$. Alors $\mathbb{C}_N^C U \{0\}$ est un cône convexe.

Jeux symétriques Un jeu *symétrique* est un jeu dans lequel le coût de tout sous-ensemble de projets à réaliser ne dépend que du nombre de projets du sous-ensemble en question. Formellement la fonction de coût $c \in C_N$ est symétrique si :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : |S| = |T| \Rightarrow c(S) = c(T)$$

Un exemple de jeu symétrique serait la situation où chaque agent i veut disposer de la même quantité $q_i = q$ d'un certain bien, ou disposer d'un même vecteur de biens, les coûts de production de ces vecteurs ou de leurs multiples ne dépendant pas de l'agent ou du groupe d'agent qui les produit ou les fait produire.

Dans ce genre de jeux la fonction de coût est une collection de n nombres $\bar{c}(m), m = 1, 2, \ldots, n$, $\bar{c}(m)$ étant le coût de réalisation coordonnée de m projets différents. Une telle fonction est concave si, pour tout $m = 1, \ldots, n-1$, on a $\bar{c}(m) - \bar{c}(m-1) \geq \bar{c}(m+1) - \bar{c}(m)$, en convenant de noter $c(\phi)$ par $c(0) (= 0)$. La courbe obtenue en joignant les points de coordonnées $(m, \bar{c}(m))$ (cf Figure 4.2) est concave. On notera que $\Delta c(m)$, l'accroissement $c(m) - c(m-1)$, une fonction décroissante de m.

Puisque dans ce genre de jeu le coût de réalisation coordonnée ne dépend que de la taille du groupe de projets à réaliser, assimilée à leur nombre, on peut sans ambiguïté définir le coût moyen d'un projet de tout groupe de taille m, comme le rapport $\bar{c}(m)/m$. La fonction de coût est concave si le coût moyen d'un projet décroît lorsque la taille du groupe dans le cadre duquel il est réalisé, augmente. Les conditions (a) et (b) peuvent être vues comme deux généralisations équivalentes de cette propriété aux cas de fonctions de coût non-symétriques.

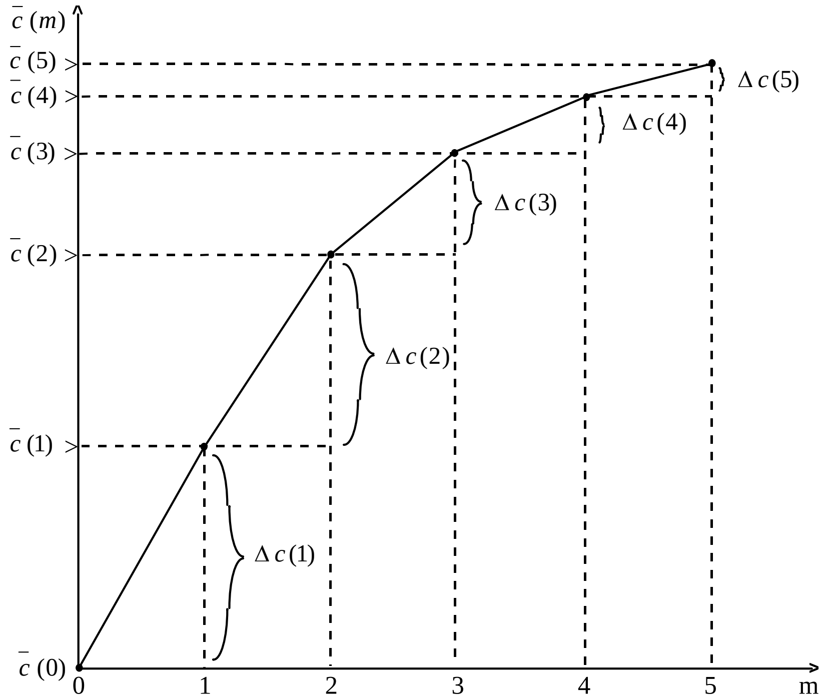


Figure 4.2 – Graphe d'un jeu de coût symétrique et concave

On remarquera que, même dans les jeux symétriques, la sous-additivité de la fonction de coût n'implique pas la concavité du jeu, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.2 Soit le jeu symétrique à quatre joueurs défini par :

$$\bar{c}(1) = 1\ ,\ \bar{c}(2) = 1.5\ ,\ \bar{c}(3) = 2.5\ ,\ \bar{c}(4) = 3$$

Cette fonction de coût est sous-additive :

$$\bar{c}(2) = 1.5 < 2 = 2\bar{c}(1)$$

$$\bar{c}(3) = 2.5 < \begin{cases} 3 = 3\bar{c}(1) \\ 3.5 = 2\bar{c}(1) + \bar{c}(2) \end{cases}$$

$$\bar{c}(4) = 3 \leq \begin{cases} 4 = 4\bar{c}(1) \\ 3.5 = 2\bar{c}(1) + \bar{c}(2) = \bar{c}(1) + \bar{c}(3) \\ 3 = 2\bar{c}(2) \end{cases}$$

Mais ce jeu, dont le graphe est représenté à la Figure 4.3, n'est clairement pas concave.

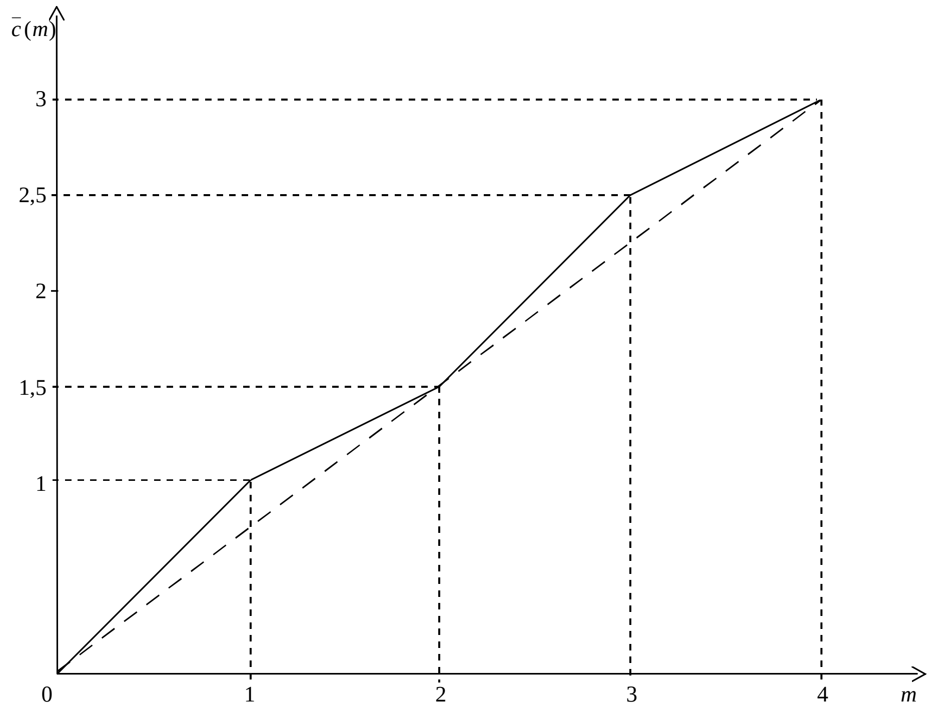


Figure 4.3 – Jeu symétrique, sous-additif et non-concave

Jeux à rendements croissants Enfin, il est clair que la somme de jeux symétriques est un jeu symétrique, que toute combinaison linéaire convexe de jeux symétriques est un jeu symétrique et que la multiplication d'un jeu symétrique par un réel positif est aussi un jeu symétrique. Notons $\mathbb{C}_N^S$ l'ensemble des jeux symétriques, vus comme des points de $\mathbb{R}^{2^n}$. Alors $\mathbb{C}_N^S U \{0\}$ est un cône convexe. Dans les jeux symétriques, on peut définir le coût moyen de réalisation d'un ensemble de projets car, ces projets étant indistinguables les uns des autres pour ce qui concerne les coûts, on leur affecte naturellement le même poids, posé conventionnellement égal à 1. Le poids ou la taille d'une coalition est égal au nombre des projets qu'elle doit réaliser, c'est-à-dire la somme des poids des projets qu'elle doit mener à bien, et le coût moyen de réalisation de chaque projet est posé égal au coût de réalisation de l'ensemble, divisé par la taille de la coalition en question. Le jeu est à rendements croissants lorsque le coût moyen décroît avec la taille. Ceci suggère une autre généralisation de la notion de rendements croissants que celle qu'essaye de capter la notion de jeu concave lorsque les différents projets n'affectent pas les coûts de la même façon.[16]

[16] Cette généralisation a été proposée récemment par Izquierdo et Rafels (2001).

Pour tout *système de poids individuels* $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in I\!R^n_+ \backslash \{0\}$ et pour toute coalition $S \subseteq N$ définissons le *poids* ou la *taille* $\gamma(S)$ de cette coalition comme la somme des poids des projets qui y figurent, la coalition ϕ se voyant attribuer un poids nul :

$$\forall S \subseteq N : \gamma(S) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in S} \gamma_i & \text{si} \quad S \neq \phi \\ 0 & \text{si} \quad S = \phi \end{cases}$$

On dit que le jeu $c \in C_N$ est à *rendements croissants par rapport à* γ si :

$$\forall S, T \subseteq N : S \subseteq T \Rightarrow \gamma(T)c(S) \geq \gamma(S)c(T)$$

Lorsque $\gamma_i > 0, \forall i \in N,$[17] un jeu est à rendements croissants si :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} \backslash \phi : S \subseteq T \Rightarrow \frac{c(S)}{\gamma(S)} \geq \frac{c(T)}{\gamma(T)}$$

Le coût moyen de réalisation des projets d'une coalition R, $c(R)/\gamma(R)$, décroît avec la taille de la coalition, mesurée par $\gamma(R)$. Cependant, puisque la mesure de la taille des coalitions est en partie arbitraire, on ne se permet de comparer deux coalitions S et T que si l'une est indiscutablement plus grande que l'autre, d'où la condition $S \subseteq T$.

Il est clair que si le jeu est à rendements croissants par rapport à γ, il l'est aussi par rapport à $\lambda\gamma, \lambda > 0$. Soit G l'ensemble des vecteurs γ pour lesquels le jeu est à rendements croissants. Alors $G \cup \{0\}$ est un cône convexe.

Un jeu est à *rendements croissants* s'il existe un vecteur de poids γ par rapport auxquels les rendements sont croissants.

La classe des jeux à rendements croissants et la classe des jeux concaves ne se confondent pas. Le jeu de l'exemple 4.3 est un jeu concave qui n'est pas à rendements croissants et le jeu de l'exemple 4.4, un jeu à rendements croissants qui n'est pas concave.

Exemple 4.3 Soit le jeu à quatre projets dont les coûts de réalisation sont les suivants :

$$\begin{aligned} \forall i &\in N : c(\{i\}) = 5 \\ \forall S &\subseteq N, |S| = 2 : c(S) = \begin{cases} 9 & \text{si} \quad S \in \{\{1,2\}, \{3,4\}\} \\ 10 & \text{sinon} \end{cases} \\ \forall S &\subseteq N, |S| = 3 : c(S) = 14, \text{ et } c(N) = 18 \end{aligned}$$

[17] C'est le cas si le jeu est strictement monotone. Si le jeu est à rendements croissants, il existe un joueur j au moins pour lequel $\alpha_j > 0$. Considérons alors n'importe quel autre joueur $i \neq j$. On doit avoir $(\gamma_i + \gamma_j)\, c(\{i\}) > \alpha_j c(\{i,j\})$. Cette dernière inégalité, l'inégalité $c(\{i,j\}) > c(\{i\})$ et $\gamma_j > 0$ impliquent que $\gamma_i > 0$.

Montrons d'abord que la condition (a) définissant un jeu concave est satisfaite.

Pour les coalitions de trois projets, on a :

$$\forall S \subseteq N,\ |S| = 3 \text{ et } \forall i \notin S : c\left(S \cup \{i\}\right) - c(S) = 4$$

et pour les coalitions de deux projets :

$$\begin{aligned}
&\forall R \subseteq N,\ |R| = 2,\ \text{ et } \forall i \notin R : \\
&\qquad c\left(R \cup \{i\}\right) - c(R) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad R = \{1,2\} \text{ et } i \in \{3,4\} \\ \text{ou} & \text{si} \quad R = \{3,4\} \text{ et } i \in \{1,2\} \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{gathered}
\forall S \subseteq N,\ |S| = 3,\ \ \forall R \subseteq N, |R| = 2 \ \text{ et } \ R \subseteq S,\ \text{ et } \forall i \notin S : \\
c\left(R \cup \{i\}\right) - c(R) \geq 4 = c\left(S \cup \{i\}\right) - c(S)
\end{gathered}$$

Pour les coalitions d'un seul projet, on a :

$$\begin{aligned}
&\forall Q \subseteq N,\ |Q| = 1,\ \text{ et } \forall i \notin Q : \\
&\qquad c\left(Q \cup \{i\}\right) - c(Q) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad Q \in \{\{1\},\{2\}\} \text{ et } i \in \{3,4\} \\ \text{ou} & \text{si} \quad Q \in \{\{3\},\{4\}\} \text{ et } i \in \{1,2\} \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

On déduit de cette relation et des deux relations précédentes que :

$$\begin{gathered}
\forall S \subseteq N,\ |S| = 3,\ \ \forall Q,\ |Q| = 1 \ \text{ et } \ Q \subseteq S,\ \text{ et } \forall i \notin S : \\
c\left(Q \cup \{i\}\right) - c(Q) \geq 4 = c\left(S \cup \{i\}\right) - c(S)
\end{gathered}$$

et :

$$\begin{gathered}
\forall R \subseteq N,\ |R| = 2,\ \ \forall Q \subseteq N,\ |Q| = 1 \ \text{ et } \ Q \subseteq S,\ \text{ et } \forall i \notin R : \\
c\left(Q \cup \{i\}\right) - c(Q) = c\left(R \cup \{i\}\right) - c(R)
\end{gathered}$$

Montrons maintenant que, si ce jeu devait être à rendements croissants pour un certain vecteur de poids non négatifs γ, ces poids seraient nécessairement nuls. On devrait avoir en effet :

$$\begin{aligned}
\forall i \quad &\in \quad \{3,4\} : \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_i\right) c\left(\{1,2\}\right) \geq \left(\gamma_1 + \gamma_2\right) c\left(\{1,2,i\}\right) \\
&\Rightarrow \quad \gamma_i \geq 5\left(\gamma_1 + \gamma_2\right)/9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall i &\in \{1,2\} : (\gamma_i + \gamma_3 + \gamma_h)\, c(\{3,4\}) \geq (\gamma_3 + \gamma_4)\, c(\{i,3,4\}) \\ &\Rightarrow \gamma_i \geq 5\,(\gamma_3 + \gamma_4)\,/9\end{aligned}$$

d'où :

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \geq 10\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)\,/9$$

ce qui n'est possible que si $\gamma_i = 0$, $i \in N$.

Exemple 4.4 Soit le jeu à trois projets dont la fonction de coût est la suivante :

$\forall i \in N : c(\{i\}) = 5$, $c(\{1,2\}) = 7.5$, $c(\{1,3\}) = 7$, $c(\{2,3\}) = 9$ et $c(\{1,2,3\}) = 10$

Ce jeu n'est pas concave car :

$$c(\{1,3\}) - c(\{1\}) = 2 < 2.5 = c(\{1,2,3\}) - c(\{1,2\})$$

Mais il est à rendements croissants pour les poids $\gamma_i = 1, i \in N$. En effet :

– pour les coalitions de un et deux projets, on a :

$$\begin{array}{llll}(\gamma_1+\gamma_2)\,5 \geq \gamma_1 7.5 & \text{et} & (\{\gamma_1+\gamma_2\}\,5 \geq \gamma_2 7.5) & \Leftrightarrow \quad 10 \geq 7.5 \\ (\gamma_1+\gamma_3)\,5 \geq \gamma_1 7 & \text{et} & (\{\gamma_1+\gamma_3\}\,5 \geq \gamma_3 7) & \Leftrightarrow \quad 10 \geq 7 \\ (\gamma_2+\gamma_3)\,5 \geq \gamma_2 9 & \text{et} & (\{\gamma_2+\gamma_3\}\,5 \geq \gamma_3 9) & \Leftrightarrow \quad 10 \geq 9\end{array}$$

– pour la grande coalition et les coalitions de deux joueurs :

$$\begin{array}{lcll}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\,7.5 & \geq & (\gamma_1+\gamma_2)\,10 & \Leftrightarrow \quad 22.5 \geq 20 \\ (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\,7 & \geq & (\gamma_1+\gamma_3)\,10 & \Leftrightarrow \quad 21 \geq 20 \\ (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\,9 & \geq & (\gamma_2+\gamma_3)\,10 & \Leftrightarrow \quad 27 \geq 20\end{array}$$

On remarquera que, dans ce jeu, le vecteur γ pour lequel le jeu est à rendements croissants, n'est pas unique.

On verra que pour les jeux à rendements croissants, certaines solutions ou parties de solutions sont très faciles à calculer. Il est trivial de constater que la multiplication d'un jeu à rendements croissants pour l'ensemble de poids G , est un jeu à rendements croissants pour le même ensemble de poids. Mais la somme de jeux à rendements croissants n'est pas nécessairement un jeu à rendements croissants, ni donc leur combinaison linéaire non plus, comme le montre l'exemple 4.5.

Exemple 4.5 Considérons les jeux à quatre joueurs, c, c' et c'', $c = c' + c''$, suivants :

$$c'(S) = \begin{cases} 19 & \text{si} \quad \{1,2\} \leq S \\ 10 & \text{si} \quad i \in S \text{ et } j \notin S, \quad i,j \in \{1,2\} \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad \{1,2\} \cap S = \phi \end{cases}$$

$$c''(S) = \begin{cases} 19 & \text{si} \quad \{3,4\} \leq S \\ 10 & \text{si} \quad i \in S \text{ et } j \notin S, \quad i,j \in \{3,4\} \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad \{3,4\} \cap S = \phi \end{cases}$$

$$c(S) = \begin{cases} 48 & \text{si} \quad S = N \\ 29 & \text{si} \quad |S| = 3 \\ 20 & \text{si} \quad |S| = 2 \text{ et } S \notin \{\{1,2\}, \{3,4\}\} \\ 19 & \text{si} \quad |S| = 2 \text{ et } S \in \{\{1,2\}, \{3,4\}\} \\ 10 & \text{si} \quad S = \{i\}, i \in N \end{cases}$$

Les jeux c' et c'' sont semblables, en ce sens que les rôles tenus par les joueurs 1 et 2 dans c' sont ceux que tiennent 3 et 4 dans c'' et les rôles tenus par les joueurs 3 et 4 dans c' sont ceux que tiennent les joueurs 1 et 2 dans c''. On laisse au lecteur le soin de vérifier que c' (resp. c'') est un jeu à rendements croissants pour les poids $\gamma_1' = \gamma_2' = \frac{1}{2}$ et $\gamma_3' = \gamma_4' = 0$ (resp. $\gamma_1'' = \gamma_2'' = 0$ et $\gamma_3'' = \gamma_4'' = \frac{1}{2}$).

Montrons maintenant que la somme de ces deux jeux, le jeu c, n'est pas à rendements croissants. Supposons qu'il le soit pour des poids $\gamma_i, i \in N$. On devrait alors avoir :

$$\forall i \in \{3,4\} : (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_i)\, 19 \geq (\gamma_1 + \gamma_2)\, 29$$

d'où :

$$19\gamma_i \geq 10\,(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\forall i \in \{1,2\} : (\gamma_i + \gamma_3 + \gamma_4)\, 19 \geq (\gamma_3 + \gamma_4)\, 20$$

d'où :

$$19\gamma_i \geq 10\,(\gamma_2 + \gamma_3)$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$19\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \geq 20\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)$$

ce qui n'est pas possible que si $\gamma_i = 0, i \in N$, d'où la contradiction.

Propriétés de décomposition

Les efforts de décomposition des coûts visent à isoler cette partie des coûts que la coopération des joueurs permet de réduire.

Décomposition en coûts spécifiques ou directs et coûts joints Considérons à nouveau l'exemple de l'aménagement hydraulique qui réunit électriciens, agriculteurs et pêcheurs. Le projet de la compagnie d'électricité est décomposable en trois composantes principales : une retenue d'une certaine capacité, des machines transformatrices d'énergie d'une certaine puissance et un réseau de transport de l'énergie électrique depuis le site du barrage jusqu'à son réseau de distribution. Une partie de ces dépenses devra de toute façon être engagée, quel que soit le mode réalisation (coordonnée ou non) de la retenue. Ce sont les dépenses en équipements de transformation de l'énergie d'une part et en transport d'autre part.

En revanche le coût de réalisation de la retenue dépend de façon critique du fait qu'elle doit satisfaire ou non, les exigences de tel ou tel des partis en présence. Le projet du syndicat d'agriculteurs admet une décomposition analogue. Quel que soit le mode de réalisation de la retenue, il faudra construire un réseau d'adduction de l'eau, du barrage jusqu'aux parcelles à irriguer, dont le coût est indépendant du type de barrage qui sera finalement édifié. Dans certains cas, il est donc possible de décomposer naturellement les coûts en coûts directs ou spécifiques à chaque projet d'une part et coûts joints d'autre part, décomposition qu'on peut formaliser comme suit.

Étant donné un jeu de coûts (c, N) et un vecteur de coûts directs ou coûts spécifiques $d \in I\!R_+^n$, on dit que ce jeu admet une *décomposition en coûts directs et coûts joints selon* d, s'il existe une fonction $\hat{c}_d : \mathcal{N} \rightarrow I\!R_+$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

- $c(\phi) = 0 \qquad$ et $\qquad \forall S \in \mathcal{N} \backslash \phi : \hat{c}_d(S) = c(S) - \sum\limits_{i \in S} d_i,$
- $(\hat{c}_d, N)$ est lui-même un jeu de coûts.

La fonction $\hat{c}_d$ doit donc vérifier les propriétés suivantes, outre la gratuité de l'inaction qu'elle vérifie par construction : monotonicité, sous-additivité et non-trivialité.

Montrons que la seule propriété, dont il suffit de s'assurer que la fonction $\hat{c}_d$ la possède, est la monotonicité. En effet, si $\hat{c}_d$ est monotone :

1. on déduit de $\hat{c}_d(\phi) = 0$ que $\hat{c}_d(S) \geq 0, \forall S \in \mathcal{N}$, condition requise pour que $(\hat{c}_d, N)$ soit un jeu de coûts ;
2. la sous-additivité de c implique celle de $\hat{c}_d$. Considérons deux coalitions S et T différentes de ϕ et N et distinguons selon que $S \cap T = \phi$ ou $S \cap T \neq \phi$:
   - si $S \cap T = \phi$, alors $\hat{c}_d\left(S \cup T\right) = c\left(S \cup T\right) - \sum\limits_{i \in S \cup T} d_i$ et la sous-additivité de c, $c\left(S \cup T\right) \leq c(S) + c(T)$, implique que $\hat{c}_d\left(S \cup T\right) \leq c(S) - \sum\limits_{i \in S} d_i + c(T) - \sum\limits_{i \in T} d_i = \hat{c}_d(S) + \hat{c}_d(T)$;

– si $S \cap T \neq \phi$, soit $\bar{S} = S \backslash \{S \cap T\}$ et alors, puisque $\bar{S} \cup T = S \cup T$ et $\bar{S} \cap T = \phi$, ce qu'on vient de montrer au point précédent implique, après identification de $\bar{S}$ à S dans les relations ci-dessus, que :$\hat{c}_d(S \cup T) = \hat{c}_d\left(\bar{S} \cup T\right) \leq \hat{c}_d(\bar{S}) + \hat{c}_d(T)$.

Mais si $\hat{c}_d$ est monotone, alors $\hat{c}_d(\bar{S}) \leq \hat{c}_d(S)$, de sorte finalement :

$$\hat{c}_d(S \cup T) \leq \hat{c}_d(S) + \hat{c}_d(T)$$

3. la non-trivialité de c implique celle de $\hat{c}_d$. Supposons d'abord que $\hat{c}_d(N) = 0$. Puisque $c(N) > 0$ et $d_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$, alors $\hat{c}_d(N) = 0$ implique que $\sum_{i \in N} d_i = c(N) > 0$. Puisque c est non-triviale, $c(N) < \sum_{i \in N} c(\{i\})$ et donc $\sum_{i \in N} \hat{c}_d(\{i\}) = \sum_{i \in N} c(\{i\}) - \sum_{i \in N} d_i = \sum_{i \in N} c(\{i\}) - c(N) > 0$, de sorte qu'il existe un joueur j pour lequel $\hat{c}_d(\{j\}) > 0$. La monotonicité de $\hat{c}_d$, implique alors que $\hat{c}_d(N) \geq \hat{c}_d(\{j\}) > 0$, d'où une contradiction. Si maintenant $\hat{c}_d(N) > 0$, puisque $c(N) < \sum_{i \in N} c(\{i\})$, alors $\hat{c}_d(N) = c(N) - \sum_{i \in N} d_i < \sum_{i \in N}(c(\{i\}) - d_i) = \sum_{i \in N} \hat{c}_d(\{i\})$.

En général, un jeu admet plusieurs décompositions, autres que celle qui, prima facie, semble la plus naturelle, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.6 Soit trois projets dont les réalisations isolées ou coordonnées requièrent les types de dépenses suivantes :

– des dépenses en capital machine, les machines utilisées pour réaliser un projet ou un groupe de projets étant spécifiques à chaque projet ou groupe de projets ;
– des dépenses en deux types de travail, I et II ;
– des dépenses en deux types de matières premières, A et B.

Ces dépenses sont présentées dans le Tableau 4.2, la fonction de coût total étant monotone, sous-additive et non triviale.

Les dépenses en matières premières ne dépendent pas du fait que les projets sont réalisés isolément ou en groupe. Elles constituent donc indiscutablement des dépenses spécifiques. Pour les autres dépenses, aucune n'apparaît comme naturellement spécifique à un projet.

Pour un vecteur d correspondant aux dépenses en matière première, c'est-à-dire $d_1 = 50$, $d_2 = 80$ et $d_3 = 150$, la fonction de coût $\hat{c}_d$ prend les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{c}_d(\{1\}) &= 250,\ \ \hat{c}_d(\{2\}) = 320,\ \hat{c}_d(\{3\}) = 350 \\ \hat{c}_d(\{1,2\}) &= 370,\ \ \hat{c}_d(\{1,3\}) = 500,\ \hat{c}_d(\{2,3\}) = 570 \ \text{ et } \ \hat{c}_d(\{1,2,3\}) = 670 \end{aligned}$$

Projets ou groupes de projets	Machines	Travail		Matières premières		Total
		type I	type II	type A	type B	
$\{1\}$	200	20	30	25	25	300
$\{2\}$	220	45	55	50	30	400
$\{3\}$	250	55	45	100	50	500
$\{1,2\}$	240	60	70	75	55	500
$\{1,3\}$	370	55	75	125	75	700
$\{2,3\}$	390	85	95	150	80	800
$\{1,2,3\}$	480	70	120	175	105	950

Tableau 4.2 – Structure des coûts des projets et groupes de projets de l'exemple 4.6

On vérifie aisément que cette fonction est monotone, de sorte que $(\hat{c}_d, N)$ est un jeu de coûts.

Il existe cependant d'autres décompositions que la décomposition naturelle $(d, \hat{c}_d)$ ci-dessus. Par exemple $d' \geq d$, de composantes $d'_1 = 60 > d_1$, $d'_2 = d_2 = 80$ et $d'_3 = d_3 = 150$, définit une autre décomposition $(d', \hat{c}_{d'})$.

Appelons *décomposition maximale* du jeu (c, N) toute décomposition $(d^+, \hat{c}_{d^+})$ telle que, pour toute décomposition $(d, \hat{c}_d)$:

$$\exists i \in N : d_i > d_i^+ \Rightarrow \exists j \in N, j \neq i : d_j < d_j^+$$

et appelons *décomposition maximale pour le joueur i*, toute décomposition $(d^i, \hat{c}_{d^i})$ telle que pour toute autre décomposition $(d, \hat{c}_d)$: $d_i \leq d_i^i$.

Il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une décomposition $(d^i, \hat{c}_{d^i})$ soit une décomposition maximale pour le joueur i est que :

$$d_i^i = \min_{S \subseteq N \backslash \{i\}} \{c(S \cup \{i\}) - c(S)_a\}, \min \{c(SU\{i\} - c(S)\}$$

sous les contraintes :

$$0 \leq d_j^i \leq c(S \cup \{j\}) - c(S), \ \ S \subseteq N \backslash \{i\}, \ j \neq i$$

En effet, on a vu plus haut qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $(d^i, \hat{c}_{d^i})$ soit une décomposition est que $\hat{c}_{d^i}$ soit monotone, c'est-à-dire :

$$\hat{c}_{d^i}(S \cup \{h\}) - \hat{c}_{d^i}(S) = c(S \cup \{h\}) - c(S) - d_h^i \geq 0, \ S \subseteq N \backslash \{h\}, h \in N$$

La valeur de d_i^i est alors la valeur maximale de d_i compatible avec le respect de ces contraintes pour $h \neq i$.

Pour tout $i \in N$ et tout $S \subseteq N \backslash \{i\}$, convenons de noter $\Delta(i, S)$ le coût incrémental d'adjonction de i à S :

$$\Delta(i, S) = c(S \cup \{i\}) - c(S)$$

Soit $\Delta_{\min}(i)$ le plus petit coût incrémental de i :

$$\Delta_{\min}(i) = \min_{S \subseteq N \backslash \{i\}} \Delta(i, S)$$

Alors le vecteur d^+ de composantes $d_i^+ = \Delta_{\min}(i)$, $i \in N$, définit l'unique décomposition maximale du jeu. En effet, pour ce vecteur de coûts spécifiques toutes les conditions qui garantissent la monotonicité de $\hat{c}_{d^+}$ sont satisfaites et pour tout $i \in N$, d_i^+ est la plus grande valeur de d_i compatible avec le respect des conditions qui font intervenir le joueur i.

On remarquera que pour les jeux concaves, dans lesquels le coût incrémental d'adjonction de tout joueur à une coalition décroît avec la taille de la coalition, le coût spécifique attribuable à un joueur dans la décomposition maximale est son coût incrémental d'adjonction à la coalition de tous les autres joueurs :

$$\forall i \in N : d_i^+ = \Delta_{\min}(i) = \Delta(i, N \backslash \{i\})$$

De plus, le jeu réduit $(\hat{c}_{d^+}, N)$ est lui-même un jeu concave.

Il est clair que le jeu $\left(c^\lambda, N\right)$ obtenu par multiplication du jeu (c, N) par un réel positif λ admet comme décompositions les multiplications par ce même λ des décompositions du jeu (c, N), c'est-à-dire si $(d, \hat{c}_d)$ est une décomposition de (c, N) alors $(\lambda d, \hat{c}_d^{(\lambda)})$ est une décomposition de $\left(c^{(\lambda)}, N\right)$.

Enfin si $c^1, .., c^g, .., c^m$ sont les fonctions de coût de m jeux joués par le même ensemble de joueurs N, alors :

1. la somme, $c = \sum_{g=1}^{m} c^g$, admet comme décomposition toute somme de décompositions $\left(d^1, \hat{c}^1_{d^1}\right), .., \left(d^g, \hat{c}^g_{d^g}\right), .., \left(d^m, \hat{c}^m_{d^m}\right)$ des jeux en question, c'est-à-dire $(d, \hat{c}_d)$ où $d = \sum_{g=1}^{m} d^g$ et $\hat{c}_d = \sum_{g=1}^{m} \hat{c}^g_{d^g}$, est une décomposition de (c, N) ;
2. toute combinaison linéaire convexe $c = \sum_{g=1}^{m} \alpha^g c^g, \alpha^g \geq 0, g = 1, .., m$ et $\sum_{g=1}^{m} \alpha^g = 1$, admet comme décomposition la même combinaison linéaire convexe de toutes décompositions des jeux $(c^g, N), g = 1, .., m$, c'est-à-dire $(d, \hat{c}_d)$ ou $d = \sum_{g=1}^{m} \alpha^g d_g$ et $\hat{c}_d = \sum_{g=1}^{m} \alpha^g \hat{c}^g_{d^g}$, est une décomposition de (c, N).

Décomposition en éléments de coûts Considérons trois villes A,B et C qui veulent se raccorder à un réseau de fibre optique. L'implantation du tronc principal et des villes est représentée à la Figure 4.4, les points R_1 et R_2 étant les points de raccord au tronc principal. Une ville qui se raccorde seule doit subir un coût de pose de la ligne proportionnel à la distance qui la sépare du tronc principal. Mais il est clair que si les trois villes réalisent en commun leurs projets, en supposant $BC < R_2C$, le mieux est de construire une ligne R_1ABC. Le tronçon R_1A servira aux trois villes, le tronçon AB aux deux villes B et C et enfin le tronçon BC à la seule ville C.

Si chaque ville se raccorde séparément au tronc commun, la ville A doit poser une ligne de coût proportionnel à R_1A, la ville B une ligne de coût proportionnel à $R_1B = R_1A + AB$ et la ville C une ligne de coût R_2C. Il est clair que dans cet exemple il existe des éléments de coûts, les coûts des différents tronçons de lignes, tels que le coût de tout sous-ensemble de projets réalisés en commun, est la somme de certains de ces éléments. La décomposition en éléments de coûts essaie de séparer au mieux certains coûts joints en composantes qui doivent être répliquées lorsque l'ensemble des projets n'est pas réalisé de façon coordonnée.

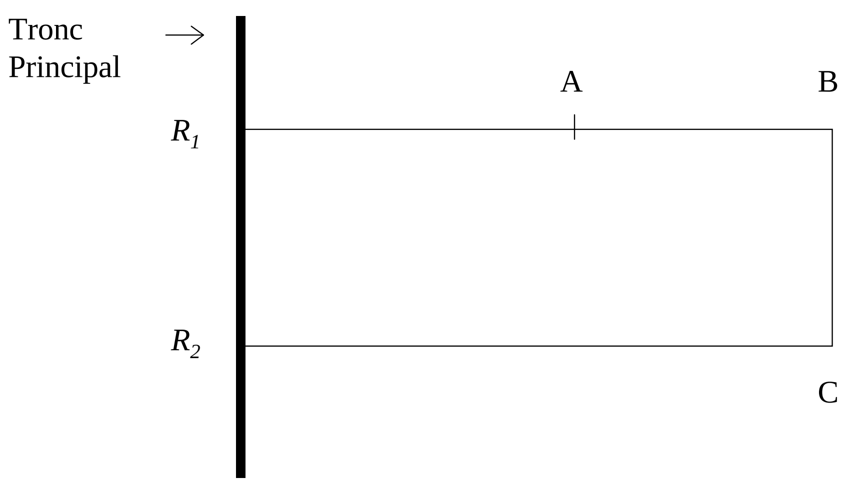


Figure 4.4 – Un réseau de fibres optiques

Soit un jeu (c, N). On appelle *décomposition en éléments de coûts* de ce jeu, tout couple $(m, \tilde{c})$, $m \in I\!N_+$ et $\tilde{c} = \left(\tilde{c}^1, ..., \tilde{c}^g, ..., \tilde{c}^m\right)$, $\in I\!R^m_{++}$, tel qu'à tout g est associé un sous-ensemble de projets $\tilde{N}(g) \subseteq \mathcal{N} \backslash \phi$, et pour toute coalition $S \in \mathcal{N} \backslash \phi$, le coût $c(S)$ peut s'écrire sous la forme :

$$c(S) = \sum_{g : S \cap \tilde{N}(g) \neq \phi} \tilde{c}^g$$

Si le jeu (c, N) admet une décomposition $(d, \hat{c})$ en coûts spécifiques d et coûts joints $\hat{c}_d$, l'intérêt de la décomposition en éléments de coûts ne concerne que les coûts joints. À tout coût spécifique $d_i, i \in N$, correspond un seul élément de coût, auquel on peut convenir d'attribuer l'indice i, et l'on a : $\tilde{c}^i = d_i$ et $\tilde{N}(i) = \{i\}$.

4.3 Concepts de pré-solution et de solution

Puisque les joueurs ont intérêt à coopérer, ils devraient le faire. Le problème est alors de répartir entre eux le coût global $c(N)$ de réalisation coordonnée de l'ensemble des projets. On appelle solution du jeu toute méthode de répartition de ce coût global. Une méthode de répartition peut soit sélectionner une répartition particulière du coût $c(N)$ soit, plus modestement, restreindre l'ensemble des répartitions à priori envisageables.

Pour tout jeu (c, N) on appelle *pré-imputation* du coût global de l'ensemble des projets toute ventilation de ce coût entre les joueurs, c'est-à-dire tout vecteur $x = (x_1 \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, $x_i \geq 0$ pour tout i, tel que $\sum\limits_{i \in N} x_i = c(N)$. On note $PX(c, N)$ l'ensemble des pré-imputations et $\overline{PX}(c, N)$ l'ensemble $PX(c, N) \cup \phi$. On appelle *imputation* toute pré-imputation n'exigeant d'aucun agent une somme supérieure à celle qu'il devrait débourser s'il réalisait seul son projet : $x_i \leq c(\{i\})$ pour tout $i \in N$, c'est-à-dire toute pré-imputation *individuellement rationnelle*. On note $X(c, N)$ l'ensemble des imputations et $\overline{X}(c, N)$ l'ensemble $X(c, N) \cup \phi$. Sur la Figure 4.5, on a représenté les imputations et pré-imputations d'un jeu à deux joueurs.

Un exemple de méthode de répartition des coûts qui définit des pré-imputations, mais pas des imputations, est la méthode qui consiste à répartir le coût global $c(N)$ de façon égale entre tous les joueurs :

$$x_i = c(N)/n, i = 1, \ldots, n$$

Considérons par exemple le jeu à deux joueurs suivant :

$$c(\{1\}) = 5, c(\{2\}) = 7, c(\{1, 2\}) = 11$$

On a $x_1 = x_2 = 5.5 > c(\{1\})$, de sorte que la pré-imputation $x = (x_1, x_2)$ n'est pas individuellement rationnelle.

On appelle *solution (pré-solution)* tout application σ qui à tout jeu (c, N) fait correspondre un ensemble d'imputations $\sigma(c, N) \subseteq \bar{X}(c, N)$ (respectivement un ensemble de pré-imputations $\sigma(c, N) \subseteq \overline{PX}(c, N)$).

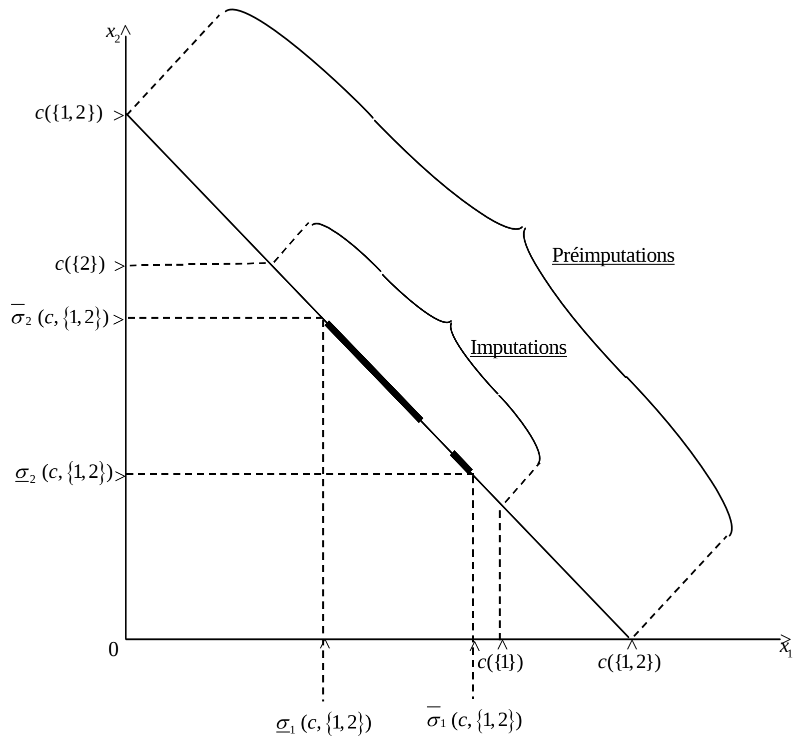


Figure 4.5 – Imputations et pré-imputations

Dans cette définition le fait que $\sigma\,(c,N)$ puisse prendre la valeur ϕ signifie que la méthode de partage des coûts sous examen est inapplicable, c'est-à-dire détermine un ou des vecteurs extérieurs à $X\,(c,N)$. Soit par exemple la méthode qui consisterait à faire payer deux millions de dollars au porteur du projet 1 et rien aux autres. Il est clair que cette méthode ne définit un partage du coût global que si $c\,(N)$ est égal à deux millions de dollars. Donc pour tout jeu (c,N) tel que $c\,(N) \neq 2 \cdot 10^6$ on aura $\sigma\,(c,N) = \phi$. Cette méthode ne brille évidemment pas par sa sophistication. Mais le problème est, comme on le montrera plus loin, que pour certaines méthodes qui, contrairement à celle-ci, présentent à priori beaucoup d'attrait, $\sigma\,(c,N) = \phi$ pour certains jeux.

On dira qu'une solution (pré-solution) est *effective pour le jeu* (c,N) si $\sigma\,(c,N) \neq \phi$, *effective pour une classe de jeux* Γ, si pour tout $(c,N) \in \Gamma$, $\sigma\,(c,N) \neq \phi$. On dira enfin qu'une solution (pré-solution) est *effective* si elle est effective pour tout jeu.

Pour tout jeu (c, N) et toute solution effective pour ce jeu, on définit $\underline{\sigma}_i(c, N)$ et $\overline{\sigma}_i(c, N)$ comme respectivement la plus petite et la plus grande contribution demandée au joueur i :

$$\underline{\sigma}_i(c, N) = \inf\{x_i | x \in \sigma(c, N)\} \text{ et } \overline{\sigma}_i(c, N) = \sup\{x_i | x \in \sigma(c, N)\}$$

Sur la Figure 4.5, on a représenté en trait gras l'ensemble des imputations sélectionnés par une hypothétique solution $\sigma(c, N)$ d'un jeu à deux joueurs. On remarquera que, pour cette solution, toutes les combinaisons linéaires convexes de $\underline{\sigma}_i(c, N)$ et $\overline{\sigma}_i(c, N)$ n'apparaissent pas dans l'ensemble des solutions.

Mathématiquement, une solution σ peut être vue comme une famille d'applications $\{\sigma^n, n \in \mathbb{N}_{++}\}$ telle que, pour tout n, $\sigma^n : \mathbb{C}_N \to \mathbb{R}_+^n \cup \phi$, et pour tout $c \in \mathbb{C}_N$, $\sigma^n(c) \subseteq \overline{X}(c, N)$. Les notations $\sigma^n(c)$ et $\sigma(c, N)$ sont équivalentes.

4.4 Propriétés exigibles des solutions

Une solution ou une pré-solution peut vérifier ou non certaines propriétés. Les unes sont relatives à la façon dont les joueurs sont traités, d'autres essayent de traduire certains éléments de la négociation qui s'instaure entre les partenaires lors de la discussion sur la répartition des charges, d'autres enfin posent des restrictions sur la façon dont l'ensemble solution devrait se modifier lorsque la structure des coûts change. Il n'est pas toujours facile, ni même possible, d'isoler ces différents aspects dans une situation du type de celle envisagée tant les intérêts des joueurs peuvent être imbriqués.

Comme on le verra plus loin, requérir certaines propriétés peut restreindre de façon drastique l'ensemble des imputations et à la limite définir une seule et unique méthode de partage. Mais plusieurs propriétés peuvent aussi s'avérer incompatibles entre elles, même si chacune d'elle semblerait désirable, de sorte qu'aucune méthode n'existe qui, pour une certaine classe de jeux, les satisferait toutes. Nous présentons dans cette section les propriétés les plus souvent exigées. L'un des objectifs de cette revue est aussi de montrer qu'une intuition admet généralement plusieurs formulations qui ne sont pas toutes nécessairement équivalentes.

4.4.1 Traitement symétrique des projets équivalents et anonymat

Une première propriété que l'on pourrait exiger d'une solution est qu'elle ne traite pas arbitrairement les joueurs.

Traitement identique et traitement symétrique de projets équivalents

Une première acception de cette condition de non-discrimination consiste à exiger d'une solution que les agents porteurs de projets équivalents doivent contribuer de la même façon au financement du coût global $c(N)$. Puisque l'intérêt d'une approche par la théorie des jeux coopératifs est de mettre l'accent sur la façon dont les projets peuvent se combiner de multiples façons pour réduire les coûts, des projets ne devraient être déclarés équivalents que s'ils ont les mêmes conséquences en termes de coûts lorsqu'on les adjoint ou retranche de tout sous-ensemble de projets.

Convenons de dire qu'un projet i est *plus coûteux* qu'un projet j si pour toute coalition ne comprenant ni i ni j, l'adjonction de i à cette coalition implique un accroissement de coût supérieur à celui qu'implique l'adjonction de j :

$$\forall S \subseteq N \backslash \{i,j\} : \Delta(i,S) \geq \Delta(j,S)$$

Une solution σ est *équitable* si pour tout $x \in \sigma(c,N)$ et pour tout couple de projets $\{i,j\}$, i, est plus coûteux que j, ou $x : x_i \geq x_j$.

Deux projets sont dits *équivalents* s'ils sont aussi coûteux l'un que l'autre :

$$\forall S \subseteq N \backslash \{i,j\} : \Delta(i,S) = \Delta(j,S)$$

Un ensemble de projets équivalents est alors un ensemble de projets dont chaque élément est équivalent à chaque autre. Il est maximal si tout projet extérieur à l'ensemble n'est pas équivalent aux projets de l'ensemble.[18]

On notera que si E est un ensemble de projets équivalents, alors :

$$\forall S \in \mathcal{N}, \forall i \in S \cap E, \forall j \in \{\{N \backslash S\} \cap E\} : \ c(\{S \backslash \{i\}\} \cup \{j\}) = c(S)$$
$$\forall S \in \mathcal{N}, \forall i,j \in S \cap E : \ c(S \backslash \{i\}) = c(S \backslash \{j\})$$

La première condition énonce que si un groupe de projets S comprend certains projets de E mais pas tous, en sortant de S un projet i qui appartient aussi à E pour lui substituer un autre projet j de E qui n'appartient pas à S, le coût ne change pas. La seconde condition enfin requiert que pour tout groupe de projets S comprenant plusieurs projets de E, le retrait du groupe S de l'un quelconque des projets qui sont aussi des projets de E a pour conséquence une baisse de coût qui est indépendante du

[18] On remarquera que pour tout ensemble de projets équivalents E, la restriction de c à E définit un jeu symétrique. Réciproquement, dans un jeu symétrique (c,N), le seul ensemble maximal de projets équivalents est l'ensemble N lui-même.

projet i ou j retiré. L'ensemble de ces conditions implique que pour tout ensemble de projets S, l'adjonction à cet ensemble de m projets de E a les mêmes conséquences en termes d'accroissement du coût quels que soient les m projets en question : ce qui importe c'est le nombre m des projets que l'on adjoint à S, et symétriquement pour les retraits.

Toute solution équitable σ *traite de façon identique les projets équivalents*, c'est-à-dire pour tout ensemble de projets équivalents E, on a :

$$\forall x \in \sigma\left(c, N\right), \forall i, j \in E : x_i = x_j$$

Pour les solutions qui sélectionnent un sous-ensemble d'imputations des conceptions moins exigeantes de l'équité pourraient être les suivantes.

Une solution σ sera dite *faiblement équitable* si pour tout couple de projets $\{i, j\}, i$ plus coûteux de j, alors :

$$\bar{\sigma}_i(c, N) \geq \bar{\sigma}_j(c, N) \qquad \text{et} \qquad \bar{\sigma}_i(c, N) \geq \bar{\sigma}_j(c, N)$$

Cette condition implique que si les projets i et j sont équivalents, alors :

$$\bar{\sigma}_i(c, N) = \bar{\sigma}_j(c, N) \qquad \text{et} \qquad \bar{\sigma}_i(c, N) = \bar{\sigma}_j(c, N)$$

Une solution faiblement équitable σ sera réputée *traiter symétriquement les projets équivalents,* si pour tout jeu (c, N) pour lequel elle est effective, et dans ce jeu pour tout ensemble maximal de projets équivalents E, lorsqu'il existe une imputation $x \in \sigma\left(c, N\right)$ telle que $x_i \neq x_j$, $i, j \in E$, alors il existe aussi une imputation $x' \in \sigma\left(c, N\right)$ telle que $x'_i = x_j$ et $x'_j = x_i$.

On remarquera que les conditions de traitement identique et de traitement symétrique imposent toutes deux que, pour une solution monovaluée, si $x = \sigma\left(c, N\right)$ et $i, j \in E$ alors $x_i = x_j$, c'est-à-dire la condition posée au début du paragraphe.

Anonymat

Une autre acception de la non-discrimination est que les projets ne soient pas traités différemment du seul fait de leur nom. Cette conception impose que si deux jeux se déduisent l'un de l'autre par simple permutation des indices des joueurs, alors toutes les imputations de la solution de l'un se déduisent des imputations de la solution de l'autre par la même permutation des indices des joueurs.

Formellement soit (c, N) et (c', N) deux jeux tels qu'il existe une permutation π des indices de N pour laquelle :

$$\forall S \in \mathcal{N} : c'(S) = c(\pi(S))$$

où, pour tout $S \in \mathcal{N}$, $\pi(S)$ désigne la coalition $\{\pi(i), i \in S\}$. On dit qu'une solution σ est *anonyme* si premièrement elle est effective pour (c', N) lorsqu'elle est effective pour (c, N) et si, deuxièmement, à toute imputation $x' \in \sigma(c', N)$ on peut faire correspondre une imputation $x \in \sigma(c, N)$ telle que pour tout $i \in N : x'_i = x_{\pi(i)}$.

On notera que cette définition implique que, réciproquement pour toute imputation $x \in \sigma(c, N)$, il existe une imputation $x' \in \sigma(c', N)$ telle que, pour tout $i \in N$, $x_i = x'_{\pi^{-1}(i)}$ puisqu'évidemment (c', N) se déduit de (c, N) par la permutation inverse π^{-1}.

Elle implique aussi que, pour toute solution monovaluée, les porteurs de projets équivalents soient traités identiquement.

Un exemple de solution qui satisferait la propriété d'anonymat est la procédure de partage du coût $c(N)$ de façon égale entre tous les joueurs :[19]

$$x_i = c(N)/n, \quad i = 1, \ldots, n$$

4.4.2 Insensibilité à l'élimination des joueurs négligeables

Supposons qu'un projet ne coûte rien si on le réalise seul et ne fait encourir aucun surcoût à tout groupe quelconque de projets auquel on pourrait l'adjoindre. Le bon sens et l'équité suggèrent qu'on ne devrait demander aucune contribution au porteur du projet en question, et que sa présence ou son absence ne devrait avoir aucune incidence sur les contributions demandées aux autres joueurs. À la réflexion le fait que le surcoût soit nul n'est pas la caractéristique essentielle de la situation. Ce qui importe c'est que l'accroissement de coût soit constant et égal au coût de réalisation isolée du projet. On devrait alors demander cette constante au joueur concerné qui devrait de toute façon supporter cette dépense s'il réalisait seul son projet et dont le seul rôle dans toute coalition à laquelle il adhère, est de gonfler le coût de réalisation coordonnée de cette même constante. Ce projet est un projet sans importance pour les autres joueurs.

Pour tout jeu (c, N) on dit que le projet i est *négligeable* si :

$$\forall S \subseteq N \backslash \{i\} : c(S \cup \{i\}) - c(S) = c(\{i\})$$

[19] On a vu plus haut que cette méthode, dans certains jeux, sélectionne une pré-imputation puisque la condition de rationalité individuelle peut ne pas être satisfaite.

On notera que si un joueur i est négligeable alors le jeu admet une décomposition $\left(d^i, \hat{c}_{d^i}\right)$ maximale pour ce joueur, décomposition dans laquelle d^i a la structure suivante : $d^i_i = c(\{i\})$ et $d^i_j = 0$, $j \neq i$. Considérons alors le jeu à $n-1$ joueurs $(\tilde{c}, N\backslash\{i\})$ dans lequel :

$$\forall S \subseteq N\backslash\{i\} : \tilde{c}(S) = \hat{c}_{d^i}(S)$$

On dira que la solution σ est insensible à l'élimination des joueurs négligeables si :[20]

$$\forall x \in \sigma(c, N),\ \exists x' \in \sigma(\tilde{c}, N\backslash\{i\}) : x_j = x'_j, \quad j \in N\backslash\{i\}$$

et réciproquement :

$$\forall x' \in \sigma(\tilde{c}, N\backslash\{i\}),\ \exists x \in \sigma(c, N) : x'_j = x_j, \quad j \in N\backslash\{i\}$$

Il est clair que si ces conditions sont remplies, alors pour tout joueur i négligeable, on doit avoir :

$$\forall x \in \sigma(c, N) :\ x_i = c(\{i\})$$

4.4.3 Additivité et super-additivité

On dit qu'une solution est *additive* si pour toute paire de jeux (c', N) et (c'', N) pour lesquels cette solution est effective, elle est également effective pour le jeu $c = c' + c''$ d'une part, et d'autre part :

$$x' \in \sigma\left(c', N\right) \text{ et } x'' \in \sigma\left(c'', N\right) \Rightarrow x = x' + x'' \in \sigma(c, N)$$

et si, réciproquement :

$$x \in \sigma(c, N) \Rightarrow \exists x' \in \sigma\left(c', N\right) \text{ et } \exists x'' \in \sigma\left(c'', N\right) : x' + x'' = x$$

Considérée isolément cette propriété n'exclut pas certains modes de partage des coûts peu plausibles ou barbares. Soit la méthode consistant à faire supporter au seul joueur $i = 1$ la totalité du coût de l'ensemble des projets, $c(N)$.[21] Assez évidemment cette méthode est additive. On doit remarquer cependant qu'elle ne néglige pas les joueurs négligeables. En effet dans un jeu à deux agents dont la fonction de coût est la suivante :

$$c(\{1\}) = 0\ ,\ c(\{2\}) = 2 \text{ et } c(\{1, 2\}) = 2$$

[20] Pour simplifier, on doit comprendre que, dans les deux expressions ci-dessous, $x \epsilon \mathbb{R}^n_+$ et $x' \epsilon \mathbb{R}^{n-1}_+$.

[21] En tout état de cause, il ne peut s'agir que d'une pré-solution puisque la condition de rationalité individuelle n'est pas respectée.

la méthode en question impute au joueur 1 une charge égale à 2. La seule méthode négligeant les joueurs négligeables dans ce jeu simpliste devrait mettre à la charge du joueur 1 un montant de 0 et à celle du joueur 2, un montant de 2.

Une propriété voisine est la propriété de super-additivité. On dit qu'une solution σ est *super-additive* si pour tous jeux $(c', N), (c'', N)$ et (c, N), tels que $c = c' + c''$, et pour lesquels cette solution est effective, on a :[22]

$$\sigma\left(c', N\right) + \sigma\left(c'', N\right) \subseteq \sigma(c, N)$$

Pour les solutions qui sélectionnent une seule imputation, la super-additivité se ramène à l'additivité.

4.4.4 Invariance à la décomposition en coûts directs et joints

Une solution σ est dite invariante à la décomposition en coûts directs et coûts joints si pour tout jeu (c, N) admettant une telle décomposition $(d, \hat{c}_d)$:

$$\forall x \in \sigma(c, N),\ \ \exists \hat{x}_d \in \sigma(\hat{c}_d, N) :\ x = \hat{x}_d + d$$

et réciproquement :

$$\forall \hat{x}_d \in \sigma(\hat{c}_d, N),\ \exists x \in \sigma(c, N) : \hat{x}_d = x - d$$

Si on admettait d'affaiblir la condition de non trivialité et d'appeler jeu les situations dans lesquelles $c(N) = \sum\limits_{i \in N} c(\{i\})$, cette propriété d'invariance serait une simple conséquence de l'additivité. On pourrait voir alors le jeu (c, N) comme la somme du jeu $(\hat{c}_d, N)$ et d'un jeu (c', N) défini par :

$$c'(\phi) = 0 \quad \text{et} \quad \forall S \in \mathcal{N} \backslash \phi : c'(S) = \sum_{i \in s} d_i$$

Cette propriété d'invariance peut être vue également comme un cas particulier de la propriété suivante.

4.4.5 Traitement équivalent des jeux équivalents

On dit que deux jeux c et c' définis pour un même ensemble de joueurs N, sont *équivalents*[23] s'il existe un nombre positif α et des nombres β_i, $i = 1, \ldots, n$, tels que :

$$\forall S \in \mathcal{N} : c'(S) = \alpha c(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$$

[22] Étant donnés deux sous-ensembles X et Y de $\mathbb{R}^n$, on appelle somme de X et Y le sous-ensemble, noté $X + Y$, défini par $X + Y = \{z | z = x + y,\ x \in X \text{ et } y \in Y\}$.

[23] Stricto sensu «stratégiquement équivalents». Pour les raisons de ce qualificatif cf par exemple Owen (1995).

Un exemple de jeux équivalents est la paire de jeux (c, N) et $(\hat{c}_d, N)$ où (c, N) admet une décomposition $(d, \hat{c}_d)$ en coûts spécifiques d et coûts joints $\hat{c}_d$. Il suffit, pour identifier, de poser dans la définition précédente $\alpha = 1$, et, $\beta_i = d_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Une solution σ *traite de façon équivalente les jeux équivalents* si, pour toute paire de tels jeux, (c, N) et (c', N), on a :

$$\forall x, x' : \left\{x'_i = \alpha x_i + \beta_i,\ i = 1, \ldots, n\right\} \Rightarrow \left\{x \in \sigma\left(c, N\right) \Rightarrow x' \in \sigma\left(c', N\right)\right\}$$

4.4.6 Égal partage du gain de la coopération

L'idée de «couper la poire en deux» est une idée qui peut sembler attrayante parce que simple. L'application de ce principe amène à définir la solution $\sigma(c, N)$ de tout jeu (c, N), comme suit :

$$\forall_i \in N : \sigma_i\left(c, N\right) = c\left(\{i\}\right) - \frac{1}{n}\left[\sum_{j \in N} c\left(\{j\}\right) - c\left(N\right)\right]$$

On remarquera que cette solution peut impliquer qu'un joueur soit subventionné, c'est-à-dire $x_i < 0$. Considérons un jeu à trois joueurs dont la fonction de coût est donnée par :[24]

$$c\left(\{1\}\right) = 500\ ,\ c\left(\{2\}\right) = 1000,\ c\left(\{3\}\right) = 5000,\ \text{et},\ c\left(\{1, 2, 3\}\right) = 5200$$

Un financement du coût global $c\left(N\right) = 5200$ par égal partage de la réduction du coût, conduit à demander aux joueurs les sommes suivantes, puisque $\frac{1}{3}\left[7000 - 5200\right] = 600$:

$$x_1 = 500 - 600 = -100,\ x_2 = 1500 - 600 = 900,\ \text{et},\ x_3 = 5000 - 600 = 4400$$

Le joueur 1 doit donc être subventionné. Ce phénomène de subvention d'un joueur pour qu'il participe à la réalisation coordonnée des projets ne peut cependant pas se produire dans les jeux de coûts à deux joueurs qui vérifient les conditions (i) à (iv) posées à la sous-section 4.2.1. En effet, si $N = \{1, 2\}$ on doit avoir : $\forall i, j \in N,\ i \neq j$:

$$x_i = c\left(\{i\}\right) - \tfrac{1}{2}\left[c\left(\{i\}\right) + c\left(\{j\}\right) - c\left\{(1, 2)\right\}\right] = \tfrac{1}{2}c\left(\{i\}\right) + \tfrac{1}{2}c\left(\{1, 2\}\right) - c\left(\{j\}\right)$$

Or sous la condition (ii) de monotonicité, on a :

$$c\left(\{1, 2\}\right) - c\left(\{j\}\right) \geq 0, \forall j \in N$$

[24] On n'a pas besoin de spécifier la fonction pour les coalitions de deux joueurs.

d'où $x_i \geq 0,\ i \in N$.

Pour les jeux (c, N) qui admettent une décomposition $(d, \hat{c}_d)$ en coûts directs et coûts joints, ce mode de financement revient à partager le gain sur les coûts joints puisque c'est sur cette seule partie des coûts que se réalise le gain de la coopération. On a donc pour ces jeux :

$$\forall i \in N : x_i = d_i + \hat{c}_d(\{i\}) - \frac{1}{n}\left[\sum_{j \in N} \hat{c}_d(\{j\}) - \hat{c}(N)\right]$$

4.4.7 Monotonicité

Considérons deux jeux qui ne diffèrent que parce que dans l'un, les coûts associés à certaines coalitions sont plus élevés que dans l'autre. D'une certaine façon, la position des joueurs membres des coalitions concernées est plus faible dans le premier jeu que dans le second et donc la charge qu'on leur impute devrait être au moins aussi élevée.

Soit deux jeux (c, N) et (c', N) tels qu'il existe une famille de coalitions $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$ pour laquelle :

$$\forall S \in \mathcal{N} : S \in \mathcal{S} \Rightarrow c(S) \geq c'(S) \quad \text{et} \quad S \notin \mathcal{S} \Rightarrow c(S) = c'(S)$$

La solution σ vérifie la propriété de *monotonicité par rapport aux coûts des coalitions* si, pour toute paire de jeux (c, N) et (c', N) satisfaisant les conditions ci-dessus, jeux pour lesquels cette solution est effective, on a :

$$\forall i \in \bigcup_{g=1}^{m} S_g : \underline{\sigma}_i(c, N) \geq \underline{\sigma}_i\left(c', N\right) \text{ et } \overline{\sigma}_i(c, N) \geq \overline{\sigma}_i\left(c', N\right)$$

Cette définition est équivalente à la définition suivante. Soit deux jeux (c, N) et (c', N), tels qu'il existe un sous-ensemble T de joueurs pour lequel :

$$\forall S \in \mathcal{N} : c(S) \geq c'(S) \text{ si } S \cap T \neq \phi, \text{ et, } c(S) = c'(S) \text{ si } S \cap T = \phi$$

alors :

$$\forall i \in T : \underline{\sigma}_i(c, N) \geq \underline{\sigma}_i\left(c', N\right), \text{ et, } \overline{\sigma}_i(c, N) \geq \overline{\sigma}_i\left(c', N\right)$$

On notera que la prémisse implique en particulier que $c(N) \geq c'(N)$.

Un exemple de règle de partage qui n'est pas monotone est la méthode de ventilation du coût global proportionnellement aux coûts de réalisation isolée des projets, c'est-à-dire la solution monovaluée définie par :

$$\forall (c, N),\ \forall i \in N : \sigma_i(c, N) = \frac{c(\{i\})}{\sum_{j \in N} c(\{j\})} c(N)$$

Pour cette règle, on a :

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial c(S)} = \begin{cases} c(N) \sum\limits_{j \neq i} c(\{j\}) / \sum\limits_{j \in N} (c(\{j\}))^2 > 0 & \text{si} \quad S = \{i\} \\ -c(N) c(\{i\}) / (\sum\limits_{j \in N} c(\{j\}))^2 < 0 & \text{si} \quad S = \{h\} \text{ et } h \neq i \\ 0 & \text{si} \quad \forall S : 1 < |S| < n \\ c(\{i\}) / \sum\limits_{j \in N} c(\{j\}) \geq 0 & \text{si} \quad S = N \end{cases}$$

La condition de monotonicité est donc violée puisque tout joueur i peut voir sa contribution diminuer alors même que les coûts de toutes les coalitions d'au moins deux joueurs auxquelles il appartient, à l'exception du coût de la grande coalition, augmentent, tous les autres coûts restant constants à l'exception du seul coût de réalisation d'un projet $h \neq i$ qui augmente.

4.4.8 Prise en compte des coûts incrémentaux des coalitions

Étant donné un jeu (c, N) et une coalition S quelconque, on peut toujours considérer le coût de réalisation de l'ensemble des projets $c(N)$ comme le coût qu'implique la réalisation des projets de la coalition complémentaire $N \backslash S$, $c(N \backslash S)$ auquel il faut ajouter un accroissement $\delta(S) = c(N) - c(N \backslash S)$ dû à l'adjonction des projets de la coalition S. On convient en général d'appeler *coût incrémental de la coalition* S cet accroissement de coût $\delta(S)$. Puisque la coalition S est «responsable» d'un accroissement du coût de $\delta(S)$ la somme des contributions qui sont demandées à chacun de ses membres devrait au moins couvrir cet accroissement du coût, ou coût incrémental.

On dit qu'une solution σ *tient compte des coûts incrémentaux* si pour tout jeu (c, N) pour lequel cette solution est effective, on a :

$$\forall S \in \mathcal{N} : x \in \sigma(c, N) \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \delta(S)$$

4.4.9 Robustesse aux menaces de retrait coordonné ou de sécession

Partons de l'hypothèse que les porteurs de projets sont libres de se coordonner avec qui ils veulent. Cette liberté de contracter implique que toute coalition d'agents S pourrait décider de ne pas participer à un plan de réalisation coordonnée de l'ensemble des projets, le plus économique pour tous, si la partie du coût global qu'on lui demande de supporter est trop importante, en l'espèce supérieure au coût $c(S)$ qu'elle devrait assumer en se retirant et en réalisant seule les projets de ses membres. On dit qu'une solution σ est *robuste* ou *résiste aux menaces de retraits coordonnées* ou de *sécessions* si pour tout jeu (c, N) pour lequel elle est effective, on a :

$$\forall S \in \mathcal{N} : x \in \sigma(c, N) \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$$

Cette même idée est parfois présentée de la façon équivalente suivante. On dit qu'une imputation x *domine l'imputation* x' *via la coalition* S si :[25]

$$\forall i \in S : x_i < x'_i, \text{ et, } \sum_{i \in S} x_i \geq c(S)$$

On note xD_Sx' le fait que x domine x' via S. On dit qu'une imputation x domine une imputation x', ce qu'on note xDx', s'il existe une coalition S pour laquelle xD_Sx'. Une imputation x' est *dominée* s'il existe une imputation x qui la domine. Une imputation *non-dominée* est une imputation qui n'est dominée par aucune autre. Pour une telle imputation x, $\forall x' \in \overline{X}(c, N), x' \neq x, \forall S \in \mathcal{N}$, l'une au moins des deux inégalités suivantes est donc vraie :[26]

$$\begin{aligned} &\text{soit} \quad \exists i \in S : x'_i \geq x_i \\ &\text{soit} \quad \sum_{i \in S} x'_i < c(S) \end{aligned}$$

Une solution σ est alors dite *robuste aux menaces de retraits ou de sécessions* si elle ne sélectionne que des imputations non-dominées lorsqu'elle est effective.

Pour les jeux de coûts considérés dans ce chapitre, montrons que cette définition est équivalente à la définition donnée plus haut. Supposons d'abord qu'une imputation x soit robuste aux menaces de sécessions, c'est-à-dire robuste au sens de la première définition, mais non robuste au sens de la seconde, c'est-à-dire elle est dominée par une imputation x' via une coalition S'. On aurait alors :

1. puisque x est robuste au sens de la première définition, pour tout $S \in \mathcal{N}$, et donc en particulier pour S', on a :

$$\sum_{i \in S'} x_i \leq c(S')$$

[25] Une définition moins stricte, mais équivalente étant donné le type de jeu, imposerait :

$$\forall i \in S : x_i \leq x'_i, \exists j \in S : x_j < x'_j, \quad et, \quad \sum_{i \in S} x_i \geq c(S).$$

[26] Avec l'autre définition de la domination, donnée dans la note précédente, une imputation x serait non-dominée si pour toute imputation $x' \neq x$ et toute coalition S l'une au moins des inégalités suivantes est satisfaite : soit $\exists i \in S : x'_i > x_i$, soit $\forall j \in S : x'_j \geq x_j$, soit enfin $\sum_{i \in S} x'_i < c(S)$.

2. puisque x est dominée par x' via S' :

$$\forall i \in S' : x'_i < x_i, \text{ et, } \sum_{i \in S'} x'_i \geq c(S')$$

Les deux premières inégalités impliquent que $\sum_{i \in S'} x'_i < c(S')$, inégalité qui contredit la troisième.

Considérons maintenant une imputation x qui ne serait pas robuste au sens de la première définition. Il existerait alors une coalition S' pour laquelle : $\sum_{i \in S'} x_i > c(S')$. Posons $\alpha = \sum_{i \in S'} x_i - c(S')$, $\alpha > 0$. Soit $\beta = c(N) - c(S') - \sum_{i \notin S'} c(\{i\})$. Puisque la fonction c est sous-additive $c(S') + \sum_{i \notin S'} c\{i\} \geq c(N)$ de sorte que $\beta \leq 0$.[27] Considérons alors l'imputation x' dont les composantes sont définies comme suit :

$$\forall i \in N : x'_i = \begin{cases} x_i - \frac{\alpha}{|S'|} & \text{si } i \in S' \\ c(\{i\}) + \frac{\beta}{n - |S'|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons d'abord que si x est une imputation alors x' en est une autre. D'abord le coût global $c(N)$ est bien réparti entre tous les agents :

$$\begin{aligned} c(N) &= \sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in S'} x_i + \sum_{i \notin S'} x_i = \left[c\left(S'\right) + \alpha\right] + \left[c(N) - c\left(S'\right) - \alpha\right] \\ &= c\left(S'\right) + \left[c(N) - c\left(S'\right)\right] = \sum_{i \in S'} x'_i + \sum_{i \notin S} x'_i \end{aligned}$$

Ensuite, la condition de rationalité individuelle est satisfaite. On a :

$$\begin{aligned} &x'_i < x_i \leq c(\{i\}), \quad \text{si} \quad i \in S' \\ &x'_i \geq c(\{i\}), \qquad\quad \text{si} \quad i \in S' \end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que, pour l'imputation x', on a par construction $\sum_{i \in S'} x'_i = c(S')$ et, puisque $x'_i < x_i$ pour tout $i \in S'$, x' domine donc x via S'.

Pour les jeux de coûts étudiés ici, la robustesse aux menaces de retrait est équivalente au principe de prise en compte des coûts incrémentaux. Considérons d'abord une imputation x robuste aux menaces de retrait. Puisque x est une imputation, on a pour toute coalition S :

$$\sum_{i \in S} x_i = c(N) - \sum_{i \notin S} x_i$$

[27] On remarquera qu'on a besoin de la sous-additivité dans la démonstration.

Puisque x est robuste à la menace de retrait de la coalition $N\backslash S$, on a aussi :

$$\sum_{i \notin S} x_i \leq c\left(N\backslash S\right)$$

inégalité qui, avec l'inégalité précédente, implique :

$$\sum_{i \in S} x_i \geq c\left(N\right) - c\left(N\backslash S\right) = \delta\left(S\right)$$

L'imputation tient donc compte du coût incrémental de S.

Réciproquement supposons que x tienne compte des coûts incrémentaux. On a pour toute coalition $N\backslash S$, $S \in \mathcal{N}$:

$$\sum_{i \notin S} x_i \geq c\left(N\right) - c\left(N\backslash\left\{N\backslash S\right\}\right) = c\left(N\right) - c\left(S\right)$$

et, puisque x est une imputation, on a aussi :

$$\sum_{i \notin S} x_i = c\left(N\right) - \sum_{i \in S} x_i$$

égalité qui, avec l'inégalité précédente, implique que :

$$c\left(N\right) - \sum_{i \in S} x_i \geq c\left(N\right) - c\left(S\right) \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \leq c\left(S\right)$$

L'imputation x est donc robuste à toute menace de retrait.

4.4.10 Cohérence

Considérons un jeu (c, N) et une solution monovaluée σ, effective pour ce jeu. Soit x la pré-imputation sélectionnée par cette solution : $x = \sigma\left(c, N\right)$. Fixons une coalition $N\backslash T$ de joueurs. La coalition $N\backslash T$ doit participer aux charges pour un montant $\sum\limits_{i \notin T} x_i$. On peut alors voir les agents de la coalition complémentaire T comme jouant un jeu de coût restreint dans lequel le coût global à supporter s'élève à $c\left(N\right) - \sum\limits_{i \notin T} x_i = \sum\limits_{i \in T} x_i$. Pour que la solution x soit cohérente, il faudrait que la solution de ce jeu restreint exige des agents concernés, c'est-à-dire des joueurs $i \in T$, précisément la somme x_i qui leur était initialement demandée.

Cependant, la spécification du jeu restreint aux seuls joueurs $i \in T$, sachant que l'ensemble des autres doit payer $\sum\limits_{i \notin S} x_i$, n'est pas sans poser quelques problèmes. Globalement les agents $i \in T$ doivent payer $\sum\limits_{i \in S} x_i$. Le coût de la grande coalition de ce jeu restreint est donc défini sans ambiguïté. Mais comment définir la réalisation des projets d'un sous-ensemble de joueurs $S \subset T$? Puisque les joueurs $i \in N \backslash T$ doivent de toute façon payer x_i, on peut, dans une première approche, poser que les joueurs de toute coalition $S \subset T$ peuvent faire appel à tout sous-ensemble U de joueurs de $N \backslash T$ pour réduire le coût net, $c(S \cup U) - \sum_{i \in U} x_i$, de réalisation de leurs projets. C'est cette idée que nous formalisons d'abord pour des concepts de solution qui ne sont pas nécessairement monovalués.

Soit x une pré-imputation du jeu (c, N) et $T \subset N$ un sous-ensemble strict de joueurs. On appelle *jeu réduit pour* T *en* x*, au sens de Davis et Maschler*,[28] le jeu dont la fonction de coût c_{Tx} est la suivante :

$$\forall S \subseteq T : c_{Tx}(S) = \begin{cases} \sum_{i \in S} x_i & \text{si} \quad S = T \\ \min_{U \subseteq N \backslash T} \left\{ c(S \cup U) - \sum_{i \in U} x_i \mid U \subseteq N \backslash T \right\} & \text{si} \quad \phi \neq S \subset T \\ 0 & \text{si} \quad S = \phi \end{cases}$$

Remarquons que cette définition n'exclut pas que, pour deux coalitions disjointes S' et S'' dans T, les coalitions U' et U'' de $N \backslash T$ auxquelles S' et S'' font respectivement appel pour minimiser leurs coûts, n'aient pas de partie commune. Si $U' \cap U'' \neq \phi$ alors stricto sensu, on ne peut pas interpréter (c_{Tx}, T) comme un jeu de coûts. Il faut plutôt voir le jeu réduit (c_{Tx}, T) comme une méthode de répartition de la somme $\sum_{i \in T} x_i$ entre les agents de la coalition T.

On dira qu'une solution σ effective pour le jeu (c, N) est *cohérente* si pour toute imputation $x \in \sigma(c, N)$ et toute coalition stricte $T \subset N$, $T \neq \phi$, alors, premièrement, cette solution est effective pour le jeu réduit (c_{Tx}, T) et, deuxièmement, la restriction de x à T appartient à $\sigma(c_{Tx}, T)$.

Un exemple de méthode qui satisfait cette condition est la règle de partage égalitaire du coût global qui sélectionne la pré-imputation $x_i = c(N)/n$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.[29]

Diverses variantes de la condition de cohérence ont été proposées qui caractérisent certains types de solution présentés plus loin.

Le concept de *cohérence au sens faible* réduit l'ensemble des coalitions T via lesquelles le jeu est réduit aux coalitions de deux joueurs au plus.

Une autre variante, proposée par Hart et Mas-Colell (1989), part d'une définition différente du jeu réduit. Elle permettra de caractériser la valeur de Shapley, l'un

[28] cf Davis et Maschler (1965).

[29] Rappelons que les charges que cette règle définit, peuvent violer la condition de rationalité individuelle.

des concepts de solution les plus importants. Pour tout jeu (c, N), pour toute pré-imputation $x \in X(c, N)$ et, pour toute coalition stricte $T \subset N$, on appelle *jeu réduit au sens de Hart et Mas-Colell* le jeu $\left(c_{Tx}^{HM}, T\right)$ dans lequel :

$$\forall S \subseteq T : c_{Tx}^{HM}(S) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in S} x_i & \text{si} \quad S = T \\ c\left(S \cup \{N \backslash T\}\right) - \sum\limits_{i \notin T} x_i & \text{si} \quad S \subset T \text{ et } S \neq \phi \\ 0 & \text{si} \quad S = \{\phi\} \end{cases}$$

La différence avec la définition donnée plus haut est qu'ici tous les membres du groupe complémentaire $N \backslash T$ sont censés se joindre à toute coalition $S \subseteq T$ pour réaliser ensemble leurs projets, alors que dans la définition précédente la coalition S optimise le groupe des projets de $N \backslash T$ qu'elle joint aux siens.

Une solution σ, effective pour le jeu (c, N), est *cohérente au sens de Hart et Mas-Collel* si pour toute imputation $x \in \sigma(c, N)$ et toute coalition stricte $T \subset N$, $T \neq \phi$, alors, d'une part, ce concept est effectif pour le jeu (c_{Tx}^{HM}, T) et, d'autre part, la restriction de x à T appartient à $\sigma(c_{Tx}^{HM}, T)$.

Il est clair que, quelle que soit la définition du jeu réduit, on peut requérir que la solution vérifie une propriété inverse de la propriété de cohérence, qui spécifierait des propriétés de stabilité lorsqu'on plonge un certain jeu dans un jeu plus vaste. Utilisons la première définition de la notion de jeu réduit. Soit (c, N) un jeu pour lequel une solution σ est effective et considérons une pré-imputation x, telle que, pour tout $T \subset N$, la solution en question est aussi effective pour le jeu (c_{Tx}, T). On dira que cette solution σ vérifie la propriété de *cohérence inverse* si l'imputation x appartient à $\sigma(c, N)$ lorsque, pour tout $U \subset N$, $U \neq \phi$, sa restriction à U est une des pré-imputations de $\sigma(c_{Ux}, U)$.

4.A Annexe : équivalence des conditions de définition des jeux concaves

On a vu dans le texte que la condition (b) implique la condition (a). Montrons que la condition (a) implique la condition (b).

Considérons deux coalitions Q et R telles que $Q \subseteq R$ et soit $U \subseteq N \backslash R$. Sur la figure qui suit, le grand rectangle est l'image de N et les différentes bandes verticales sont les images des sous-ensembles de N qu'indiquent les accolades correspondantes.

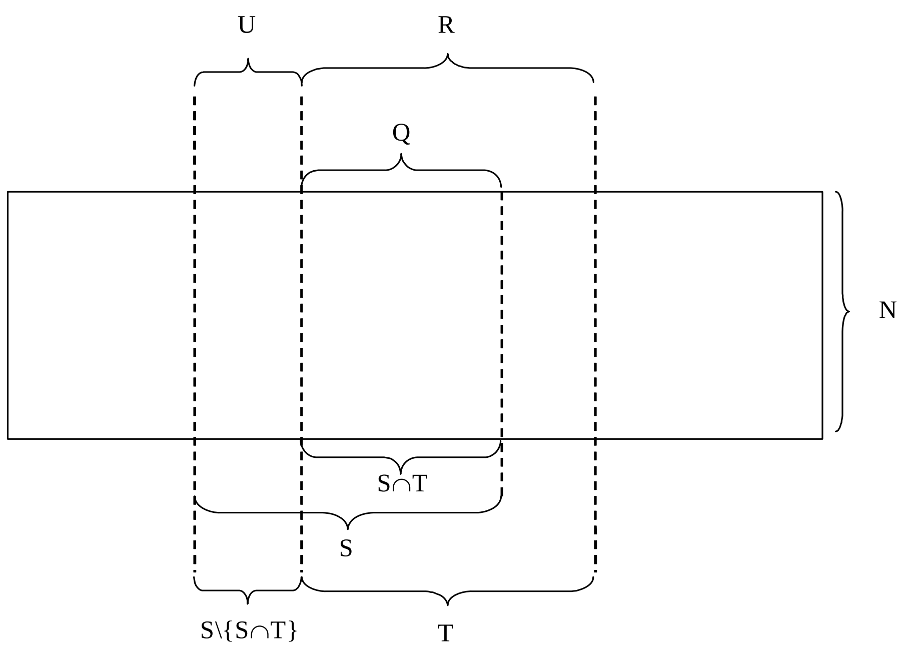


Figure 4.6 – Coalitions considérées dans la démonstration

Convenons d'indicer par $i = 1, \ldots, u$ les projets de l'ensemble U. Appliquons la relation (a) en adjoignant successivement aux ensembles Q et R les projets $1, \ldots, i, \ldots, u$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} c(Q \cup \{1\}) - c(Q)) & \geq & c(R \cup \{1\}) - c\,(R) \\ c(Q \cup \{1,2\}) - c(Q \cup \{1\}) & \geq & c(R \cup \{1,2\}) - c(R \cup \{1\} \\ & \vdots & \\ c(Q \cup \{1,\ldots,u\}) - c(Q \cup \{1,\ldots,u-1\}) & \geq & c(R \cup \{1,\ldots,u\}) - c(R \cup \{1,\ldots,u-1\}) \end{array}$$

Sommons ces inégalités. Il vient :

$$\forall U \subseteq N \backslash R : c(Q \cup U) - c(Q) \geq c(R \cup U) - c(R) \tag{4.1}$$

Considérons maintenant deux coalitions quelconques S et T. Alors de deux choses l'une :

– ou bien $S \cap T \neq \phi$ et alors le fait que S et T vérifient la condition (b) résulte simplement de la gratuité de l'inaction, $c(\phi) = 0$, et de la sous-additivité, $c(S)+c(T) \geq c(S \cup T)$;

– ou bien $S \cap T \neq \phi$ et dans ce cas posons d'une part que $Q = S \cap T$ et que $R = T$ de sorte que $Q \subseteq R$. En d'autres termes les hypothèses sous lesquelles la condition (a) s'applique à Q et R sont vérifiées. Définissons alors U comme le sous-ensemble de projets $S \backslash \{S \cap T\}$. Par construction $U \subseteq N \backslash R$ de sorte que la relation (4.1) ci-dessus doit être satisfaite si la condition (a) est elle-même satisfaite.

Explicitons (4.1) pour les coalitions ou groupes de projets que l'on vient de définir :

$$c(\{S \cap T\} \cup \{S \backslash \{S \cap T\}\}) - c\{S \cap T\} \geq c(T \cup \{S \backslash \{S \cap T\}\}) - c(T). \tag{4.2}$$

Remarquons que, par définition (se reporter à la figure 6) :

$$\{S \cap T\} \cup \{S \backslash \{S \cap T\}\} = S, \qquad \text{et} \qquad T \cup \{S \backslash \{S \cap T\}\} = S \cup T,$$

de sorte que (4.2) s'écrit encore :

$$c(S) - c(S \cap T) \geq c(S \cup T) - c(T),$$

c'est-à-dire :

$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T). \tag{4.3}$$

Puisque S et T sont des groupes de projets quelconques, l'inégalité (4.3) n'est autre que la condition (b).

Références

Baumol, W.J., J.C. Panzar et R.D. Willig 1982. *Constestable Markets and the Industry Structure*, New-York : Harcourt Brace Jovanovich.

Davis, M. et M. Maschler 1965. "The Kernel of a Cooperative Game", *Naval Research Logistics Quarterly*, 12, 223-259.

Hart, S. et A. Mas-Colell 1989. "The Potential and the Shapley Value", in A.E. Roth, ed., *The Shapley Value. Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge, U.K. : Cambridge University Press, 127-137.

Izquierdo, J.M. et C. Rafels 2001. "Average Monotonic Cooperative Game", *Games and Economic Behavior*, 36, 174-198.

Owen, G. 1995. *Game Theory*, third edition, San Diego, CA : Academic Press.

Shapley, L.S. 1953. "A Value for n-Person Games", in H.W.Kuhn et A.W. Tucker, eds, *Contributions to the Theory of Games, Vol. II,* Annals of Mathematics Studies N^o 28, Princeton, N.J. : Princeton, University Press.

Sharkey, W.W 1982. *The Theory of Natural Monopoly,* Cambridge : Cambridge University Press.

Young, H.P. 1994. "Cost Allocation", in R.J.Aumann et S. Hart, eds, *Handbook of Game Theory, Vol. II,* Amsterdam, North-Holland, Chap. 34, 1191-1235.

Chapitre 5

Jeux de coûts : principaux concepts de solution

5.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les principaux concepts de solution proposés pour les jeux coopératifs dont plusieurs ont été utilisés pour résoudre les jeux de coûts. Le concept de solution "peut-être le plus intuitif" pour reprendre l'expression de B. Peleg (1986) est le concept de *coeur* parce que c'est le concept de solution qui prend totalement en compte les menaces de sécession, et que, dans un monde où la liberté contractuelle ou d'association prévaut, une solution qui ne tiendrait pas compte de ces menaces serait certainement contestable et contestée. Pour cette raison nous consacrons à l'étude de cette solution une place privilégiée. La section 5.2 a pour objet la définition même du concept et l'examen des conditions de non-vacuïté de l'ensemble des imputations ainsi définies. On verra que le coeur d'un jeu de coûts peut être vide bien que les joueurs aient intérêt à coopérer. Dans certains jeux au contraire l'ensemble des imputations du coeur aurait plutôt tendance à être trop vaste. Dans ces deux cas il est nécessaire d'explorer d'autres voies pour trouver une solution.

On recense à la section 5.3 les différentes propriétés du coeur ainsi que celles qu'il ne possède pas et dont on pourrait penser que, pour diverses raisons, en particulier des raisons d'équité, toute solution devrait posséder. Le concept de *semi-coeur* présenté à la section 5.4 est un affaiblissement de la notion de coeur qui consiste à ne prendre en compte que les menaces de retrait des coalitions d'un seul joueur et, symétriquement, de tous les joueurs sauf un. On verra qu'elle permet de rationaliser certaines pratiques. Nous montrons à la section 5.5 les liens qui existent entre l'*ensemble stable de von Neumann et Morgenstern*, historiquement le premier concept de solution proposé pour les jeux coopératifs, et le coeur. Les sections 5.6 et 5.7 sont respectivement consacrées à deux autres concepts de solution, le *nucléole* et la *valeur de Shapley*, qui sélectionnant une seule imputation, contrairement aux concepts précédents qui simplement définissent un sous-ensemble d'imputations parmi lesquelles la répartition des coûts entre les joueurs devrait être choisie. Nous ne présentons pas les concepts de pré-noyau (pre-kernel), noyau (kernel) ni d'ensemble de marchandage.

5.2 Le coeur

5.2.1 Définition

Puisque les différents joueurs sont libres de réaliser leurs projets avec qui ils veulent, tout concept de solution devrait tenir compte des menaces de sécession. On appelle coeur d'un jeu coopératif le concept de solution exclusivement fondé sur la prise en compte de ces menaces et de toutes ces menaces. Plus précisément le coeur d'un jeu de coûts est l'ensemble maximal des pré-imputations qui résistent aux menaces de retrait coordonné de toute coalition. Formellement, pour tout jeu (c, N) on appelle coeur le sous-ensemble des pré-imputations suivant :

$$\mathcal{C}(c, N) = \left\{ x \in \overline{PX}(c, N) : \sum_{i \in N} x_i \leq c(S) \quad \forall S \in \mathcal{N} \backslash \phi \right\}$$

Par définition, une pré-imputation $x \in \mathcal{C}(c, N)$ doit vérifier, la condition $x_i \leq c(\{i\})$ $\forall i \in N$, c'est-à-dire la condition de rationalité individuelle. Cette pré-imputation est donc une imputation.

5.2.2 Existence

On exclut du champ de l'analyse les jeux de coûts qui ne sont pas sous-additifs. Or la propriété de sous-additivité, on l'a souligné dans le chapitre 4 consacré à la présentation de la notion de jeu de coût, implique en particulier que pour toute partition $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ de l'ensemble des projets, la somme des coûts de réalisation coordonnée des parties, $\sum_{h=1}^{m} c(P_h)$, n'est pas inférieure au coût de réalisation coordonnée de l'ensemble des projets, $c(N)$. L'incitation à coopérer est donc très forte mais, et c'est peut-être un peu surprenant, cette incitation forte à coopérer, ne garantit pas la non-vacuïté du coeur de tout jeu de coûts, sauf dans le cas où il n'y a que deux projets à réaliser.[1] Pour comprendre pourquoi la sous-additivité ne garantit pas la non-vacuïté lorsque trois projets au moins doivent être menés à terme, le plus simple est de considérer un jeu symétrique.

[1] S'il n'y a que deux projets à réaliser, la sous-additivité implique que $c(\{1\}) + c(\{2\}) \geq c(\{1,2\})$. Répartissons alors le gain de la mise en commun des projets $c(\{1\}) + c(\{2\}) - c(\{1,2\}) \geq 0$, proportionnellement à leurs coûts de réalisation isolée, c'est-à-dire affectons au projet i, $i = 1, 2$, la partie x_i du coût global défini par :

$$x_i = c(\{i\}) - \frac{c(\{i\})}{c(\{1\}) + c(\{2\})} \left[c(\{1\}) + c(\{2\}) - c(\{1,2\}) \right].$$

On a bien $x_1 + x_2 = c(\{1,2\})$ et $x_i \leq c(\{i\})$, $i = 1, 2$ et donc $x = (x_1, x_2)$ est une imputation du coeur. Cette méthode, sous l'hypothèse de sous-additivité dont on s'est servi, définit ici une imputation du coeur parce que, dans un jeu à deux joueurs, il n'y a pas de coalition intermédiaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de coalitions autre que les coalitions d'un seul joueur et la grande coalition.

Exemple 5.1 Soit le jeu symétrique à quatre joueurs dont la fonction de coût est la fonction suivante :[2]

$$\bar{c}(1) = 1, \quad \bar{c}(2) = 1.9, \quad \bar{c}(3) = 2.5 \text{ et } \bar{c}(4) = 3.5$$

La fonction de coût est bien sous-additive car :

$$\bar{c}(2) = 1.9 \leq 2 = 2\bar{c}(1)$$

$$\bar{c}(3) = 2.5 \leq \begin{cases} 3 = 3\bar{c}(1) \\ 2.9 = \bar{c}(1) + \bar{c}(2) \end{cases}$$

$$\bar{c}(4) = 3.5 \leq \begin{cases} 4 = 4\bar{c}(1) \\ 3.9 = 2\bar{c}(1) + \bar{c}(2) \\ 3.5 = \bar{c}(1) + \bar{c}(3) \\ 3.8 = 2\bar{c}(2) \end{cases}$$

Pour les coalitions de taille $m = 3$, on a : $\bar{c}(3)/3 = 2.5/3 < 3.5/4 = \bar{c}(4)/4$. Le coût que doivent supporter les agents d'une coalition de trois joueurs est inférieur à trois fois la charge $\bar{c}(4)/4$ que doivent supporter en moyenne tous les agents pour réaliser en commun l'ensemble des quatre projets.

Considérons alors une pré-imputation quelconque qui répartit $\bar{c}(4)$ entre les quatre joueurs. Les trois joueurs dont les charges sont les plus lourdes, si cette pré-imputation ne répartit pas $\bar{c}(4)$ de façon égale entre les quatre projets, ou trois joueurs quelconques, si cette pré-imputation répartit $\bar{c}(4)$ de façon égale entre tous les joueurs, doivent payer au moins, ensemble, $3\bar{c}(4)/4 > \bar{c}(3)$. Cette pré-imputation n'est donc pas robuste à la sécession des trois joueurs en question. Puisqu'aucune pré-imputation n'est robuste à une telle menace, le coeur de ce jeu est vide. Il est clair que c'est le coût de réalisation des groupes intermédiaires de trois projets qui, parce qu'il est relativement faible, est responsable ici de la vacuïté du coeur.

Un autre exemple classique de jeux de coûts à coeur vide est celui des jeux essentiels à somme constante parce que, dans ces jeux, les coalitions de $n-1$ joueurs, quel que soit n, sont trop efficaces.[3]

Pour que le coeur soit non-vide il faut donc, et il suffit, que les coûts de réalisation coordonnée des projets des coalitions intermédiaires $S \subset N$, soient suffisamment élevés par rapport au coût de réalisation de tous les projets. Dans les jeux symétriques cette condition prend la forme relativement simple, suivante :

Proposition 5.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que le coeur d'un jeu de coûts symétrique soit non-vide est que :*

$$\forall m < n : \frac{m}{n}\bar{c}(n) \leq \bar{c}(m)$$

[2] Rappelons que pour les jeux symétriques nous sommes convenus de noter $\bar{c}(m)$ le coût de réalisation coordonnée de m projets, quels qu'ils soient.

[3] Voir l'annexe 5.A.1 pour les détails.

Démonstration. La condition est suffisante. Soit $\overline{x}$ la pré-imputation répartissant le coût global $\bar{c}(n)$ de façon égale entre tous les projets : $\overline{x}_i = \bar{c}(n)/n$, pour $i = 1, \ldots, n$. Cette pré-imputation résiste à toute menace de sécession puisque :

$$\forall S \subset N : |S| = m \Rightarrow \bar{c}(m) \geq \frac{m}{n}\bar{c}(n) = \sum_{i \in S} \overline{x}_i$$

La condition est nécessaire. Supposons qu'on ait $\bar{c}(m) < \frac{m}{n}\bar{c}(n)$ pour un certain $m < n$. Pour toute pré-imputation x convenons d'indicer les joueurs par ordre décroissant des charges qui leur sont imputées : $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, de sorte que $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq \frac{m}{n}\bar{c}(n) > \bar{c}(m)$. Aucune pré-imputation ne peut donc être robuste aux menaces de retrait d'une coalition de taille m. ■

On remarquera que la condition de la Proposition 5.1 est satisfaite par tout jeu symétrique concave. Pour de tels jeux on a en effet :[4]

$$\bar{c}(m) - \bar{c}(m-1) \geq \bar{c}(m+1) - \bar{c}(m), m = 1, \ldots, n-1$$

La fonction $\bar{c}(m)/m$ est donc décroissante de sorte que $\bar{c}(m)/m \geq \bar{c}(n)/n$ pour $m = 1, \ldots, n-1$.

Pour les jeux non-symétriques, l'expression des conditions nécessaires et suffisantes de non-vacuïté est un peu plus complexe car il est plus difficile de formaliser l'idée que les coalitions intermédiaires ne sont pas trop fortes, c'est-à-dire que le coût de réalisation coordonnée de leurs projets n'est pas trop faible, comparé au coût de réalisation coordonnée de l'ensemble de tous les projets. Pour cette formalisation nous devons introduire les notions de familles équilibrées de coalitions et de jeu équilibré.

Soit $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_h, \ldots, S_m\}$ une famille de coalitions non-vides, où $S_h \in \mathcal{N} \backslash \phi$ pour $h = 1, \ldots, m$. On dit que cette famille est une *famille équilibrée* si :

1. tout joueur $i \in N$ est membre d'au moins une coalition de la famille : $\forall i \in N$: $\exists S_h \in \mathcal{S} : i \in S_h$
2. il existe des nombres positifs λ_h, $h = 1, \ldots, m$, dits poids d'équilibrage, tels que, pour tout joueur, la somme des poids des coalitions auxquelles il appartient est égale à 1 :
$$\forall i \in N : \sum_{h: i \in S_h} \lambda_h = 1$$

Donnons quelques exemples de familles équilibrées de coalitions. Toute partition de N constitue une famille équilibrée, les poids d'équilibrage étant tous égaux à 1. Toute

[4] Voir le chapitre 4.

famille constituée de p partitions différentes constitue une famille équilibrée pour des poids $1/p$ affectés à chaque coalition de chaque famille. La famille constituée de toutes les coalitions d'une même taille m, $1 < m < n$, est équilibrée avec des poids égaux à $1/C_{n-1}^{m-1}$, où C_{n-1}^{m-1} est le nombre des combinaisons différentes de $m-1$ éléments pris dans un ensemble de $n-1$ éléments. Les coalitions de taille m dans lesquelles figurent un joueur i sont en effet les coalitions de $m-1$ joueurs autres que i prises dans l'ensemble $N\backslash\{i\}$ de taille $n-1$, auxquelles on ajoute le joueur i. Il y a donc C_{n-1}^{m-1} coalitions de taille m auxquelles le joueur i appartient.

On remarquera que les poids d'équilibrage ne sont pas nécessairement uniques. Toute famille qui est l'union de l partitions différentes peut s'équilibrer par une infinité de poids différents. Il suffit d'une part que les poids attribués à chacune des coalitions d'une même partition soient identiques et d'autre part que la somme des divers poids affectés à chaque partition s'élève à 1. Soit l partitions $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_g, \ldots, \mathcal{P}_l$, où $\mathcal{P}_g = \left(P_{g_1}, \ldots, P_{g_h}, \ldots, P_{gm_g}\right)$, $g = 1, \ldots, l$, et considérons la famille de coalitions $\mathcal{S} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_g, \ldots, \mathcal{P}_l)$. Cette famille est équilibrée par tout système de poids d'équilibrage qui associe à toute coalition P_{g_h} le poids $\lambda_{g_h} = \lambda_g$, pourvu que, pour $g = 1, \ldots, l$, d'une part $0 < \lambda_g < 1$, et d'autre part $\sum_{g=1}^{l} \lambda_g = 1$.

Plus généralement si $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$ et $\mathcal{S}' = \left\{S'_1, \ldots, S'_h, \ldots, S^l_p\right\}$ sont deux familles équilibrées par des poids respectifs :

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h, \ldots, \lambda_m) \text{ et } \lambda' = \left(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_h, \ldots, \lambda'_p\right)$$

alors $\mathcal{S}'' = \left\{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m, S'_1, \ldots, S'_h, \ldots, S'_p\right\}$ est aussi une famille équilibrée par n'importe quels poids λ''_j tels que :

$$\lambda''_j = \begin{cases} \alpha\lambda_g & \text{si } S''_j = S_g \in \mathcal{S} \\ (1-\alpha)\,\lambda_h & \text{si } S''_j = S'_h \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

où $\alpha \in (0,1)$. Alors, puisque pour tout i, $\sum_{g:i\in S_g} \lambda_g = 1$ et $\sum_{h:i\in S'_h} \lambda'_h = 1$, il est clair que :

$$\sum_{j:i\in S''_j} \lambda''_j = \alpha \sum_{g:i\in S_g} \lambda_g + (1-\alpha) \sum_{h:i\in S_h} \lambda'_h = 1$$

On voit qu'en procédant ainsi on peut construire une infinité de familles équilibrées de coalitions qui sont, chacune, équilibrées par une infinité de poids d'équilibrage.

On dit qu'*un jeu de coûts* (c, N) *est équilibré* si, pour toute famille équilibrée $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$ et tout système de poids d'équilibrage $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \ldots, \lambda_m)$, on a :

$$\sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g) \geq c(N)$$

Dans le cas où $\mathcal{S}$ est constituée de toutes les coalitions d'une même taille m, $1 < m < n$, cette condition devient :

$$\forall m < n : \frac{m}{n} \bar{c}(n) \leq \bar{c}(m)$$

Si $\mathcal{S}$ est une partition $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_g, \ldots, P_m\}$, alors les seuls poids d'équilibrage sont tous égaux à 1 et la condition ci-dessus est la condition de sous-additivité $\sum\limits_{h=1}^{m} c(P_h) \geq c(N)$.

Plus généralement cette condition est, pour les jeux qui ne sont pas nécessairement symétriques, l'expression du fait que les coalitions intermédiaires ne sont pas trop puissantes, c'est-à-dire que le coût de réalisation de leurs projets n'est pas trop bas.

Théorème 5.2 (Bondavera (1963), Shapley (1967)) *Une condition nécessaire et suffisante pour que le coeur d'un jeu de coûts soit non-vide est que ce jeu soit équilibré.*[5]

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit $\bar{x}$ une pré-imputation du coeur et $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$ une famille équilibrée de poids d'équilibrage $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \ldots, \lambda_m\}$. Puisque $\bar{x}$ est dans le coeur, on doit avoir :

$$\sum_{i \in S_g} \bar{x}_i \leq c(S_g), \ g = 1, \ldots, m$$

Multiplions chacune de ces inégalités par le poids λ_g de la coalition concernée et sommons sur l'ensemble des coalitions de la famille. On obtient :

$$\sum_{g=1}^{m} \lambda_g \sum_{i \in S_g} \bar{x}_i \leq \sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g)$$

Permutons l'ordre de sommation dans le membre gauche de l'inégalité :

$$\sum_{i \in N}^{m} \sum_{g : i \in S_h} \lambda_g \bar{x}_i \leq \sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g)$$

[5] Cette caractérisation vaut pour tout jeu coopératif, qu'il s'agisse d'un jeu de coûts ou non.

Puisque λ est un système de poids d'équilibrage, on a $\sum_{g:i\in S_g} \lambda_g = 1$ pour tout joueur $i \in N$. Par ailleurs $\bar{x}$ est une pré-imputation, de sorte que $\sum_{i\in N} \bar{x}_i = c(N)$. L'inégalité ci-dessus s'écrit donc encore :

$$c(N) \leq \sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g)$$

Puisque cette inégalité doit être satisfaite pour toute famille équilibrée, le jeu doit être équilibré. La démonstration de la suffisance, un peu plus technique, est donnée à l'annexe 5.A.2. ■

La caractérisation du Théorème 5.2 peut s'avérer lourde à tester. On vient de remarquer que le nombre des familles équilibrées est infini et que, pour certaines, il existe une infinité de poids d'équilibrage différents. Il est clair que, dans cette infinité de familles et de poids, il y a des redondances. On peut ordonner l'ensemble des familles équilibrées à partir de l'ensemble fondamental des familles équilibrées minimales. On dit qu'une famille équilibrée est une *famille équilibrée minimale* si aucune de ses sous-familles strictes n'est elle-même équilibrée. On peut démontrer que toute famille équilibrée peut s'exprimer comme l'union de familles équilibrées minimales.[6] De plus les familles minimales ne sont équilibrées que pour un seul système de poids d'équilibrage. Toute partition est par exemple une famille minimale dont on a vu plus haut que le système de poids d'équilibrage est unique (chaque coalition est de poids égale à 1, cf supra). Pour déterminer si le coeur est vide ou non il suffit de considérer les familles minimales.

Théorème 5.3 (Bondavera (1963), Shapley (1967)) *Une condition nécessaire et suffisante pour que le coeur d'un jeu de coûts soit non-vide est que pour toute famille équilibrée minimale $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$, de poids d'équilibrage $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \ldots, \lambda_m)$, on ait :*

$$\sum_{g=1}^{m} \lambda_g c(S_g) \geq c(N)$$

5.2.3 Jeux concaves

On a remarqué plus haut que le coeur des jeux symétriques concaves n'est pas vide. C'est une propriété de tous les jeux de coûts concaves, symétriques ou non. Surtout, pour ces jeux, l'ensemble des imputations du coeur est facile à calculer. Montrons comment.

[6] Voir exemple Owen (1995) pour une démonstration.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_h, \ldots, a_n)$ un arrangement des joueurs de N et $A(N)$ l'ensemble des arrangements de n joueurs. Pour tout joueur $i \in N$, on note $h(i,a)$ le rang du joueur i dans l'arrangement a de ces n joueurs, et on note $i(h,a)$ le joueur qui figure au rang h dans l'arrangement en question. Pour tout arrangement a, on définit le coût incrémental du joueur j dans cet arrangement comme l'accroissement du coût qu'implique l'adjonction de son projet au sous-ensemble des projets de rangs inférieurs au sien, dans l'arrangement en question. Notons $\delta c(j,a)$ ce coût incrémental :

$$\begin{aligned} \delta c(j,a) &= c(\{i(1,a), i(2,a), \ldots, i(h(j,a)-1,a), j\}) \\ &\quad -c(\{i(1,a), i(2,a), \ldots, i(h(j,a)-1,a)\}) \end{aligned}$$

On appelle *imputation par les coûts incrémentaux sous l'arrangement a*, le vecteur $\tilde{x}(a)$ de composantes $\tilde{x}_i(a) = \delta c(i,a),\ i \in N$. Il s'agit bien d'une imputation car, sous l'hypothèse de sous-additivité de la fonction de coût, $\forall a \in A(N),\ \forall i \in N$, on a $\tilde{x}_i(a) \leq c(\{i\})$. Si de plus la fonction de coût est strictement sous-additive le seul joueur i pour lequel on a $\tilde{x}_i(a) = c(\{i\})$ est celui qui figure au premier rang dans l'arrangement a en question.

Dans un jeu concave toute imputation par les coûts incrémentaux est une imputation du coeur (cf annexe 5.A.3). De plus toute imputation du coeur est une combinaison linéaire convexe d'imputations par les coûts incrémentaux.

Théorème 5.4 (Shapley (1971)) *Soit (c,N) un jeu de coûts concave. Quel que soit l'arrangement $a \in A(N)$, l'imputation par les coûts incrémentaux $\tilde{x}(a)$ est une imputation du coeur. Le coeur est la fermeture convexe de l'ensemble $\{\tilde{x}(a), a \in A(N)\}$ de l'ensemble des imputations par les coûts incrementaux, c'est-à-dire :*

$$x \in \mathcal{C}(N) \Leftrightarrow \exists \gamma(a), a \in A(N), \gamma(a) \geq 0, \forall a \in A(N), \text{ et } \sum_{a \in A(N)} \gamma(a) = 1 : \forall i \in N : x_i = \sum_{a \in A(N)} \gamma(a)\, \tilde{x}_i(a)$$

Ré-examinons le jeu de répartition du coût de construction du système d'approvisionnement au gaz de trois régions, présenté dans le chapitre 4, dont la fonction de coût est pour rappel :

$$\begin{aligned} c(\{1\}) &= 7000, \quad c(\{2\}) = 4800, \quad c(\{3\}) = 4800 \\ c(\{1,2\}) &= 10616, \quad c(\{1,3\}) = 10462, \quad c(\{2,3\}) = 9600 \\ c(\{1,2,3\}) &= 14002 \end{aligned}$$

Le Tableau 5.1 donne les six imputations par les coûts incrémentaux correspondant aux six arrangements possibles des trois agents.

	Imputations		
Arrangements	Projet 1	Projet 2	Projet 3
$(1,2,3)$	7000	3616	3386
$(1,3,2)$	7000	3462	3540
$(2,1,3)$	5816	4800	3386
$(2,3,1)$	4402	4800	4800
$(3,1,2)$	5662	3540	4800
$(3,2,1)$	4402	4800	4800

Tableau 5.1 – Imputations par les coûts incrémentaux dans le jeu de construction du réseau de gazoducs

Toute imputation du coeur est une combinaison linéaire convexe de ces six imputations. L'ensemble des imputations du coeur est donc assez vaste. L'intervalle des charges qui pourraient être retenues dans le coeur varie :

- pour le projet 1 de 4402 à 7000, soit dans un rapport de 100 à 160 ;
- pour le projet 2 de 3462 à 4800, soit dans un rapport de 100 à 138 ;
- pour le projet 3 de 3386 à 4800, soit dans un rapport de 100 à 140.

Ce qui rend ces intervalles assez larges dans les jeux concaves, c'est le fait que, dans cette classe de jeux, pour chaque joueur il existe des imputations du coeur dans lesquelles il se voit demander une contribution aux coûts globaux exactement égale au coût de réalisation isolée de son projet. C'est en effet la contribution qui lui est demandée dans toute imputation par les coûts incrémentaux sous tous les arrangements dans lesquels il figure au premier rang. Donc le pire qu'il puisse lui arriver dans le coeur est qu'il ne retire aucun bénéfice de sa coopération avec les autres joueurs. Ceci ne peut cependant pas se produire simultanément pour tous les joueurs dans un jeu essentiel où $\sum\limits_{i \in N} c(\{i\}) > c(N)$.

La plus petite contribution qu'on puisse demander à un joueur i est l'accroissement de coûts que provoque l'adjonction de son projet à l'ensemble $N \setminus \{i\}$ des projets des autres joueurs. Par exemple pour le projet 1 la plus petite contribution est l'accroissement de coûts 4402, auquel il faut consentir lorsqu'on ajoute ce projet aux projets 2 et 3.

Formellement, dans un jeu concave (c, N), si le concept de solution retenu est le coeur, alors :

$$\overline{\sigma}_i(c, N) = \max_{S \subseteq N : i \in S} \{c(S) - c(S \backslash \{i\})\} = c(\{i\})$$

et :

$$\underline{\sigma}_i(c, N) = \min_{S \subseteq N : i \in S} \{c(S) - c(S \backslash \{i\})\} = c(\{i\}) - c(\phi) = c(N) - c(N \backslash \{i\})$$

5.2.4 Jeux à rendements croissants

Le coeur des jeux à rendements croissants n'est jamais vide. Considérons un tel jeu et soit $\gamma = (\gamma_1, .., \gamma_n) \in I\!R_+^n \backslash \{0\}$ un système de poids pour lequel :

$$\forall S, T \leq N : S \leq T \Rightarrow \gamma(S) c(T) \leq \gamma(T) c(S)$$

Soit x la pré-imputation du coût $c(N)$ proportionnelle aux poids γ_i :

$$x_i = \frac{\gamma_i}{\gamma(N)} c(N)$$

Pour toute coalition ScN, ou x, puisque $\gamma(S) c(N) \leq \gamma(N) c(S)$:

$$\sum_{i \in S} x_i = \frac{\gamma(S)}{\gamma(N)} c(N) \leq c(S)$$

Aucune coalition n'a donc intérêt à faire sécession.

5.2.5 Jeux décomposables

Décomposition en coûts directs et coûts joints On peut ramener l'étude du coeur d'un jeu (c, N) qui admet une décomposition $(d, \hat{c})$ en coûts directs et coûts joints, à l'étude du coeur du jeu $(\hat{c}, N)$, réduit à la seule fonction de coût joints $\hat{c}$. Il est clair que si $\hat{x}$ est une imputation du jeu $(\hat{c}, N)$ alors le vecteur $\overline{x}$ défini par $\overline{x}_i = \hat{x}_i + d_i$ pour tout i, est une imputation du jeu (c, N). De plus, si $\hat{x}$ est une imputation du coeur de $(\hat{c}, N)$ alors $\overline{x}$ est dans le coeur de (c, N). On a :

$$\forall S \subset N : \sum_{i \in S} \hat{x}_i \leq \hat{c}(S)$$

d'où :

$$\sum_{i \in S} \bar{x}_i = \sum_{i \in S} (\hat{x}_i + d_i) \leq \hat{c}(S) + \sum_{i \in S} d_i = c(S)$$

Décomposition en éléments de coûts Considérons un jeu (c, N) qui admet une décomposition en éléments de coûts $(m, \tilde{c})$, où pour $g = 1, \ldots, m$, $\tilde{N}(g)$ est le sous-ensemble d'agents qui ont besoin d'utiliser l'équipement g de coût $\tilde{c}^g$. Notons $\tilde{n}(g) = \left|\tilde{N}(g)\right|$ le nombre de ces agents. Il semble équitable de répartir cette partie $\tilde{c}^g$ du coût $c(N)$,[7] de façon égale entre tous les projets qui utilisent l'équipement g en question. Appelons *partie équitable du coût* $\tilde{c}^g$ imputée à tout $i \in \tilde{N}(g)$, le montant :

$$y^g = \tilde{c}^g / \tilde{n}(g)$$

L'imputation équitable par décomposition est l'imputation qui demande à chaque joueur une contribution égale à la somme des parties équitables des équipements qu'utilise son projet. En d'autres termes, si $\overline{x}$ est une imputation équitable par décomposition, alors :

$$\forall i \in N : \overline{x}_i = \sum_{g: i \in \tilde{N}(g)} y^g$$

Il s'agit bien d'une imputation puisque :

$$\sum_{i \in S} \overline{x}_i = \sum_{i \in N} \sum_{g: i \in \tilde{N}(g)} y^g = \sum_{g=1}^{m} \tilde{n}(g)\, y^g = \sum_{g=1}^{m} \tilde{c}^g = c(N)$$

L'imputation équitable par décomposition appartient au coeur. C'est une conséquence quasi-immédiate du fait que, dans ce genre de jeu :

$$\forall S \subseteq N \backslash \phi : c(S) = \sum_{g: S \cap \tilde{N}(g) \neq \phi} \tilde{c}^g$$

Si les membres de la coalition S veulent réaliser leurs projets indépendamment des autres joueurs, ils devraient payer, pour chaque équipement g utilisé, la totalité du coût $\tilde{c}^g$ de l'équipement en question. Pour tout équipement g, on a évidemment $\tilde{c}^g \geq [\tilde{n}(g, S) / \tilde{n}(g)]\, \tilde{c}^g$, où $\tilde{n}(g, S)$ est le nombre des membres de la coalition S qui appartiennent à $\tilde{N}(g)$. Or $[\tilde{n}(g, S) / \tilde{n}(g)]\, \tilde{c}^g$ est ce qu'on demande à l'ensemble des membres de la coalition S au titre de l'équipement g. On a donc :

$$\sum_{i \in N} \overline{x}_i = \sum_{g=1}^{m} [\tilde{n}(g, S) / \tilde{n}(g)]\, \tilde{c}^g \leq \sum_{g: S \cap \tilde{N}(g) \neq \phi} \tilde{c}^g = c(S)$$

Le coeur des jeux qui admettent une décomposition en éléments de coûts n'est donc pas vide, et, connaissant la structure de cette décomposition, le calcul d'une imputation du coeur est aisé.

[7] Rappelons que dans ces jeux $c(N) = \sum_{g=1}^{m} \tilde{c}^g$.

5.3 Le coeur - Propriétés

Examinons maintenant les propriétés que possède ou ne possède pas le coeur lorsqu'il n'est pas vide.

5.3.1 Traitement identique et symétrique des projets équivalents

Le traitement identique de projets équivalents requiert que, dans toute imputation du coeur x, les projets d'un même ensemble maximal E de projets équivalents se voient imposer les mêmes charges :

$$x_i = x_j, \forall i, j \in E$$

Bien que ce ne soit pas exclu, on va en donner un exemple, ce n'est généralement pas le cas.

Un exemple de jeu pour lequel la propriété est vérifiée est le jeu suivant.

Exemple 5.2 Soit le jeu symétrique à quatre joueurs dont la fonction de coût est :

$$\bar{c}(1) = 1, \bar{c}(2) = 1.5,\ \bar{c}(3) = 2.5 \text{ et } \bar{c}(4) = 3$$

Montrons que la seule répartition du coût global $\bar{c}(4) = 3$ qui appartienne au coeur est l'imputation qui impose à chaque joueur la même charge $x_i = 0.75$. On vérifie aisément que cette imputation n'est bloquée par aucune coalition. Considérons maintenant une imputation x inégalitaire et la coalition, que l'on note $\hat{S}$, des deux joueurs à qui sont demandées les contributions les plus élevées. Par hypothèse, pour cette coalition $\hat{S}$, on a :

$$\sum_{i \in \hat{S}} x_i > \tfrac{1}{2}\bar{c}(4) = 1.5 = c\left(\hat{S}\right)$$

La coalition $\hat{S}$ bloque donc la pré-imputation en question.

En général cependant les projets équivalents ne sont pas traités de façon identique dans le coeur. C'est le cas en particulier des jeux strictement[8] concaves. Pour un tel jeu on a :

$$\bar{c}(1) > \bar{c}(2)/2 > \cdots > \bar{c}(m)/m > \cdots > \bar{c}(n)/n$$

Considérons un arrangement a quelconque des joueurs. On a vu à la section précédente que l'imputation par les coûts incrémentaux sous cet arrangement, $\tilde{x}(a)$, appartient au coeur. On a donc pour les joueurs $i(1,a),\ i(2,a), \ldots,\ i(h,a), \ldots,\ i(n,a)$:

$$\tilde{x}_{i(1,a)} = \bar{c}(1) > \bar{c}(2) - \bar{c}(1) = \tilde{x}_{i(2,a)} > \cdots > \tilde{x}_{i(h,a)} > \cdots > \tilde{x}_{i(n,a)}$$

[8] c'est-à-dire les jeux concaves pour lesquels les inégalités qui figurent dans les conditions équivalentes de définition, (a) ou (b) ; voir le chapitre 4.

Puisque dans tout jeu symétrique la seule classe maximale de projets équivalents est l'ensemble N de tous les projets, la propriété de traitement identique des projets équivalents n'est pas vérifiée dans le coeur. C'est aussi le cas pour les jeux strictement concaves mains non-symétriques, pour des raisons analogues.

On remarque en revanche que, tous les arrangements étant admissibles et le coeur étant l'ensemble des combinaisons linéaires convexes des imputations par les coûts incrémentaux, les imputations du coeur d'un jeu concave vérifient la propriété de traitement symétrique des projets équivalents. Montrons que c'est le cas pour tout jeu de coûts, qu'il soit concave ou non.

Proposition 5.5 *Le coeur est une solution qui vérifie la propriété de traitement symétrique des projets équivalents.*

Démonstration. Soit $\overline{x}$ une imputation telle que pour deux joueurs j et k d'un même ensemble maximal E de joueurs équivalents, on ait $\overline{x}_j \neq \overline{x}_k$. Alors l'imputation $\tilde{x}$, $\tilde{x}_j = \overline{x}_k$, $\tilde{x}_k = \overline{x}_j$ et $\tilde{x}_i = \overline{x}_i$ si $i \notin \{j,k\}$, est aussi une imputation du coeur. Si ce n'était pas le cas, il existerait une coalition $S \subset N \backslash \phi$ pour laquelle :

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}_i > c\left(S\right)$$

Cette coalition S ne peut ni ne comprendre que des joueurs $i \notin \{j,k\}$, ni comprendre les deux joueurs j et k, car dans ces deux cas on a $\sum_{i \in S} \tilde{x}_i = \sum_{i \in S} \overline{x}_i$. Supposons que S ne comprenne que le joueur j et considérons la coalition $S' = \{S \cup \{k\}\} \setminus \{j\}$. Puisque $\overline{x}$ est dans le coeur :

$$\sum_{i \in S'} \overline{x}_i \leq c\left(S'\right)$$

Or par construction $\tilde{x}_j = \bar{x}_k$, et par ailleurs $\tilde{x}_i = \overline{x}_i$ pour tout $i \in S \backslash \{j\}$, de sorte que :

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}_i = \sum_{i \in S'} \overline{x}_i$$

Enfin, j et k appartennant à une même classe de projets équivalents, on a :

$$c\left(S\right) = c\left(S'\right)$$

On devrait donc avoir :

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}_i \leq c\left(S\right)$$

d'où une contradiction. ■

5.3.2 Anonymat

Une solution anonyme est une solution insensible au changement de dénomination des joueurs. Il est évident que le coeur possède cette propriété.

Proposition 5.6 *Le coeur est une solution anonyme.*

5.3.3 Insensibilité à l'élimination des joueurs négligeables

Un joueur négligeable est un joueur i pour lequel : $c\left(S \cup \{i\}\right) - c\left(S\right) = c\left(\{i\}\right)$, pour tout $S \subseteq N\backslash \{i\}$. Il est clair que si une pré-imputation x exige du joueur i une contribution $x_i < c\left(\{i\}\right)$, alors la coalition $N\backslash \{i\}$ des autres joueurs peut menacer de se retirer. On a en effet, puisque x est une pré-imputation :

$$\sum_{j \in N\backslash\{i\}} x_j = c\left(N\right) - x_i = c\left(N\backslash \{i\}\right) + c\left(\{i\}\right) - x_i > c\left(N\backslash \{i\}\right)$$

Par ailleurs, la contrainte de rationalité individuelle impose que $x_i \leq c\left(\{i\}\right)$. On doit donc avoir pour toute imputation du coeur, x, et tout joueur i négligeable : $x_i = c\left(\{i\}\right)$.

Proposition 5.7 *Le coeur est une solution qui néglige les joueurs négligeables.*

5.3.4 Additivité et super-additivité

Il devrait être clair que le coeur est une solution additive et donc à fortiori super-additive. Soit deux jeux (c', N) et (c'', N), et le jeu somme (c, N) : $c\left(S\right) = c'\left(S\right) + c''\left(S\right)$ pour tout $S \subseteq N$. Considérons deux imputations $x' \in \mathcal{C}\left(c', N\right)$ et $x'' \in \mathcal{C}\left(c'', N\right)$, pour lesquelles $\sum_{i \in S} x'_i \leq c'\left(S\right)$ et $\sum_{i \in S} x''_i \leq c''\left(S\right)$, pour tout $S \subseteq N$. Alors l'imputation $x = x' + x''$, du jeu (c, N), vérifie les relations suivantes :

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} x'_i + \sum_{i \in S} x''_i \leq c'\left(S\right) + c''\left(S\right) = c\left(S\right)$$

Réciproquement, si $x \in \mathcal{C}\left(c, N\right)$, alors il existe $x' \in \mathcal{C}\left(c', N\right)$ et $x'' \in \mathcal{C}\left(c'', N\right)$ tels que $x' + x'' = x$.

Proposition 5.8 *Le coeur est une solution additive.*

5.3.5 Traitement équivalent des jeux équivalents

Il est évident que le coeur vérifie la propriété. Pour tout $\alpha > 0$:

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \Leftrightarrow \sum_{i \in S} (\alpha x_i + \beta_i) \leq \alpha c(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$$

Proposition 5.9 *Le coeur est une solution qui traite de façons équivalentes les jeux équivalents.*

5.3.6 Égal partage du gain de la coopération

En général, le coeur, lorsqu'il n'est pas vide, comprend plusieurs imputations. Elles ne peuvent donc pas évidemment toutes, correspondre à un partage égal des gains de la coopération. Rien ne garantit non plus que l'imputation par égal partage du gain de la coopération appartienne au coeur puisque ce mode de répartition ne tient compte que des coûts des coalitions d'un seul joueur et de la grande coalition.

Considérons l'exemple du jeu de coûts suivant :

$$c(\{1\}) = 500,\ c(\{2\}) = 1000,\ c(\{3\}) = 5000, \text{ et, } c(\{1,2,3\}) = 5000$$

Ce mode d'imputation implique les financements individuels suivants :

$$x_1 = -100,\ x_2 = 900 \text{ et } x_3 = 4400$$

Puisque $x_1 = -100$, les joueurs 2 et 3 doivent payer ensemble :

$$c(\{1,2,3\}) + 100$$

c'est-à-dire plus que le coût de réalisation des trois projets. Puisque le jeu vérifie la condition de monotonicité, on a $c(\{1,2,3\}) \geq c(\{2,3\})$ et cette imputation n'est pas robuste à la menace de retrait de ces deux joueurs.

On a vu que, pour les jeux qui admettent une décomposition en éléments de coût, l'imputation équitable par décomposition appartient au coeur. Il faut souligner que, dans ces jeux, cette imputation est généralement différente de l'imputation par égal partage des gains de la coopération. Soit un jeu (c, N) qui admet la décomposition $(m, \tilde{c})$, où pour $g = 1, \ldots, m$, $\tilde{N}(g)$ est le sous-ensemble des $\tilde{n}(g)$ joueurs qui ont besoin de l'équipement g pour réaliser leur projet :

$$\forall i \in N : c(\{i\}) = \sum_{g : i \in \tilde{N}(g)} \tilde{c}^g \text{ et } c(N) = \sum_{g=1}^{m} \tilde{c}^g$$

L'imputation $\tilde{x}$ par égal partage des gains de la coopération exige du joueur i qu'il prenne en charge la partie suivante du coût global :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= \sum_{g:i\in\tilde{N}(g)} \tilde{c}^g - \frac{1}{n}\left(\sum_{j\in N}\sum_{g:j\in\tilde{N}(g)} \tilde{c}^g - \sum_{g=1}^{m}\tilde{c}^g\right) \\ &= \sum_{g:i\in\tilde{N}(g)} \tilde{c}^g - \frac{1}{n}\left(\sum_{g=1}^{m}\tilde{n}\left(g\right)\tilde{c}^g - \sum_{g=1}^{m}\tilde{c}^g\right)\end{aligned}$$

L'imputation équitable par décomposition $\overline{x}$ met à la charge du joueur i, la partie du coût global :

$$\overline{x}_i = \sum_{g:i\in\tilde{N}(g)} \tilde{c}^g/\tilde{n}\left(g\right)$$

Sauf exception ces deux imputation ne coïncident pas, comme le montre l'exemple 5.3.

Exemple 5.3 Soit le jeu à trois joueurs, décomposable en éléments de coût, présenté au Tableau 5.2, dans lequel une croix dans une case signifie que le projet correspondant à la ligne a besoin de l'équipement correspondant à la colonne. Dans ce jeu $c\left(\{1,2,3\}\right) = 600$ et :

$$\frac{1}{3}\left[\sum_{i\in N} c\left(\{i\}\right) - c\left(\{1,2,3\}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[1200 - 600\right] = 200$$

de sorte que l'imputation par égal partage des gains de la coopération, $\tilde{x}$, prend la valeur suivante :

$$\tilde{x}_1 = 400 - 200 = 200,\ \tilde{x}_2 = 500 - 200 = 300, \text{ et } \tilde{x}_3 = 300 - 200 = 100$$

tandis que l'imputation équitable par décomposition $\bar{x}$ a pour valeur :

$$\bar{x}_1 = 50 + 150 = 200,\ \ \bar{x}_2 = 100 + 150 = 250, \text{ et } \bar{x}_3 = 50 + 100 = 150$$

Les deux imputations sont donc différentes. On remarque cependant que l'imputation $\tilde{x}$ est aussi une imputation du coeur. On a en effet, $\forall i,\ j \in N,\ i \neq j,\ c\left(\{i,j\}\right) = 600$ et $\max\left\{\tilde{x}_i + \tilde{x}_j \mid i,j \in N, i \neq j\right\} = 500$, de sorte que $\tilde{x}$ est robuste aux menaces de sécession des coalitions de deux joueurs. Comme elle est par construction robuste aux menaces de sécession des coalitions d'un seul joueur, elle est dans le coeur. Ce n'est cependant pas une propriété des jeux décomposables en éléments de coût comme le montre l'exemple suivant.

		$g =$			
		1	2	3	$c(\{i\})$
$\tilde{c}^g$		100	200	300	
$i =$	1	x		x	400
	2		x	x	500
	3	x	x		300
$\tilde{c}^g / \tilde{n}(g)$		50	100	150	

Tableau 5.2 – Décomposition en éléments de coût du jeu de l'exemple 5.3

Exemple 5.4 Soit le jeu à trois joueurs dont la décomposition en éléments de coûts est présentée au Tableau 5.3. On a $\sum\limits_{i \in N} c(\{i\}) - c(N) = 1300 - 1200 = 100$ et donc l'imputation par égal partage de la réduction de coûts, $\tilde{x}$, est :

$$\tilde{x} = 100 - \frac{1}{3}100 = \frac{2}{3}100,\ \tilde{x}_2 = 200 - \frac{1}{3}100 = \frac{5}{3}100,\ \tilde{x}_3 = 1000 - \frac{1}{3}100 = \frac{29}{3}100$$

Or $c(\{1,2\}) = 200 < \frac{7}{3}100 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$. C'est une conséquence immédiate du fait qu'avec cette méthode d'imputation le joueur 3 qui est un joueur négligeable se voit demander une contribution inférieure à 1000, le coût de réalisation isolée de son projet, alors qu'on sait (cf. sous-section 5.3.3 supra) que dans toute imputation du coeur il devrait se voir imposer une contribution exatement égale à 1000.

	$g =$ 1	2	3	$c(\{i\})$
$\tilde{c}^g$	100	100	1000	
$i =$ 1	x			100
2	x	x		200
3			x	1000

Tableau 5.3 – Décomposition en éléments de coût du jeu de l'exemple 5.4

5.3.7 Monotonicité

Le coeur est une solution qui n'est pas nécessairement monotone par rapport aux coûts des coalitions, comme le montre l'exemple suivant, emprunté à Young (1994).

Exemple 5.5 Soit le jeu à cinq joueurs dont la fonction de coût est définie par :

$$c\left(S^h\right) = Y^h, \quad h = 1, 2, 3, 4, 5$$

où :

$$S^1 = \{3,5\}, S^2 = \{2,4,5\}, S^3 = \{1,3,4\}, S^4 = \{1,2,4\}, S^5 = \{1,2,4,5\}$$

$$c(N) = \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{5} c\left(S^h\right) \quad \text{et} \quad c(S) = \min_h \left\{c\left(S^h\right) \mid S \subseteq S^h\right\} \; \forall S \neq S^h, \; h = 1, \ldots, 5$$

Pour que c soit monotone, il faut que $Y^2 \leq Y^5$ puisque $S^2 \subseteq S^5$; $Y^4 \leq Y^5$ puisque $S^4 \subseteq S^5$; et $Y^h \leq \frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{5} Y^k$, puisque $S^h \subseteq N$, pour $h = 1, \ldots, 5$. On verra plus loin que d'autres conditions sur les Y^h doivent être satisfaites.

Pour qu'une imputation x soit dans le coeur de ce jeu, il faut que :

$$\forall h = 1, \ldots, 5 : \sum_{i \in S^h} x_i \leq c\left(S^h\right) = Y^h$$

où les coalitions S^h sont choisies de telle sorte que chaque joueur i apparait exactement trois fois dans l'une ou l'autre d'entre elles. On doit donc avoir :

$$3\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{h=1}^{5}\sum_{i\in S^h} x_i \leq \sum_{h=1}^{5} c\left(S^h\right) = \sum_{h=1}^{5} Y^h$$

Mais puisque x est une imputation, $\sum_{i=1}^{n} x_i = c(N) = \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{5} Y^h$, de sorte que chacune des inégalités faibles qui doivent vérifier les différentes coalitions h doivent être satisfaites avec l'égalité. En d'autres termes x doit être solution des cinq équations linéaires en x_i, $i = 1, \ldots, 5$:

$$\sum_{i\in S^h} x_i = Y^h, \quad h = 1, \ldots, 5$$

Le déterminant de ce système est égal à 3 et des calculs simples montrent que :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3}\left(0Y^1 - 3Y^2 + 0Y^3 + 0Y^4 + 3Y^5\right)\\
x_2 &= \frac{1}{3}\left(-1Y^1 + 2Y^2 - 1Y^3 + 2Y^4 - 1Y^5\right)\\
x_3 &= \frac{1}{3}\left(1Y^1 + 1Y^2 + 1Y^3 + 1Y^4 - 2Y^5\right)\\
x_4 &= \frac{1}{3}\left(-1Y^1 + 2Y^2 + 2Y^3 - 1Y^4 - 1Y^5\right)\\
x_5 &= \frac{1}{3}\left(2Y^1 - 1Y^2 - 1Y^3 - 1Y^4 + 2Y^5\right)\\
\sum_{i=1}^{5} x_i &= \frac{1}{3}\left(Y^1 + Y^2 + Y^3 + Y^4 + Y^5\right) = c(N)
\end{aligned}$$

Pour que le coeur ne soit pas vide il faut de plus que $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 5$, sinon la coalition des joueurs j pour lesquels $x_j < 0$ ferait sécession. Par hypothèse, $Y^5 \geq Y^2$, de sorte que $x_1 \geq 0$. Le respect de cette condition pour les autres x_i impose des restrictions supplémentaires sur les valeurs admissibles des Y^h. Montrons qu'il existe des valeurs des Y^h pour lesquelles ces conditions de non-négativité sont satisfaites d'une part, et la condition de monotonicité est violée, d'autre part.

Supposons d'abord que les Y^h prennent les valeurs $\overline{Y}^h$ suivantes :

$$\overline{Y}^1 = 3, \overline{Y}^2 = 9, \overline{Y}^3 = 9, \overline{Y}^4 = 3 \text{ et } \overline{Y}^5 = 9, \text{ d'où } c(N) = 11$$

L'imputation du coeur correspondant à ces valeurs est l'imputation $\overline{x}$:

$$\overline{x}_1 = 0, \overline{x}_2 = 1, \overline{x}_3 = 2, \overline{x}_4 = 7, \text{ et } \overline{x}_5 = 1, \text{ d'où } \sum_{i=1}^{5} \overline{x}_i = 11$$

Supposons maintenant que les Y^h prennent les valeurs $\hat{Y}^h$ suivantes :

$$\hat{Y}^1 = 3, \hat{Y}^2 = 9, \hat{Y}^3 = 9, \hat{Y}^4 = 3 \text{ et } \hat{Y}^5 = 12, \text{ d'où } c(N) = 12$$

L'imputation du coeur correspondant à ces valeurs est l'imputation $\hat{x}$:

$$\hat{x}_1 = 3, \hat{x}_2 = 0, \hat{x}_3 = 0, \hat{x}_4 = 6 \text{ et } \hat{x}_5 = 3, \text{ d'où } \sum_{i=1}^{5} \hat{x}_i = 12$$

Or pour tout joueur, le passage du jeu défini par les $\overline{Y}^h$ au jeu défini par les $\hat{Y}^h$, implique que le coût de réalisation coordonnée des projets d'une au moins des coalitions à laquelle ce joueur appartient, augmente (noter que $c(N)$ passe de 11 à 12) ; tandis qu'aucune des coalitions auxquelles il appartient, ne voit son coût baisser. La condition de monotonicité par rapport aux coûts des coalitions impliquerait donc que pour tout joueur i, on ait : $\hat{x}_i \geq \overline{x}_i$. Or pour les joueurs 2 et 4, on a : $\hat{x}_2 = 0 < 1 = \overline{x}_2$ et $\hat{x}_3 = 0 < 2 = \overline{x}_3$.

Il existe une classe de jeux qui vérifient la propriété de monotonicité stricte par rapport aux coûts des coalitions, la classe des jeux concaves. On a remarqué[9] que pour cette classe de jeux, on a, si le concept de solution envisagé est le coeur : $\overline{\sigma}_i(c, N) = c(\{i\})$ et $\underline{\sigma}_i(c, N) = c(N) - c(N \backslash \{i\})$. Le coeur est donc un concept de solution faiblement monotone pour ces jeux. Il est aussi strictement monotone pour la raison suivante. Supposons deux jeux concaves (c, N) et (c', N) qui diffèrent l'un de l'autre parce que, pour une coalition S, $c'(S) > c(S)$. On sait que dans ces jeux l'ensemble des allocations du coeur est la fermeture convexe de toutes les allocations par les coûts incrémentaux sous tous les arrangements possibles des joueurs. Donc le point extrême du coeur correspondant à l'imputation par les coûts incrémentaux, sous l'arrangement dans lequel $i \in S$ figure au rang $|S|$ et les autres joueurs $j \neq i,\ j \in S$, occupent les $|S| - 1$ premiers rangs, s'obtient dans le jeu (c, N) en ajoutant $c'(S) - c(S)$ à la composante i de la même imputation dans le jeu (c', N).[10]

Pour tous les arrangements dans lesquels les $|S|$ premiers joueurs ne sont pas les joueurs de la coalition S, la composante, d'une imputation par les coûts incrémentaux sous l'arrangement en question, correspondant à un joueur $i \in S$ ne change pas. [11] La condition de monotonicité stricte est donc vérifiée, c'est-à-dire si x est une imputation

[9] cf sous-section 5.2.3 supra

[10] On remarquera que, pour un joueur de rang $|S| + 1$, donc un $j \notin S$, la composante j dans le jeu (c', N) se déduit de la composante correspondante dans le jeu (c, N) en lui retranchant $c'(S) - c(S)$. Pour les joueurs de rangs supérieurs à $|S| + 1$ rien ne change.

[11] Il en est de même pour les joueurs $j \notin S$.

du coeur de (c, N) il existe une imputation x' du coeur de (c', N) telle que $x'_i \geq x_i$ pour tout $i \in S$. Il suffit de considérer l'imputation $x' = \sum\limits_{x \in A(n)} \lambda_a \tilde{x}(a)$, où les $\tilde{x}(a)$, $a \in A(N)$, sont les imputations par les coûts incrémentaux dans le jeu (c', N) et les $\lambda_a \geq 0$ pour tout $a \in A(N)$, sont les poids qui définissent dans le jeu (c, N), l'imputation $x \in \mathcal{C}(c, N)$, à partir des imputations par les coûts incrémentaux dans ces jeux : $x = \sum\limits_{a \in A(N)} \lambda_a \tilde{x}(a)$.

5.3.8 Cohérence

Le coeur est une solution cohérente. Soit un jeu (c, N) et x une imputation du coeur. Considérons le jeu réduit via la coalition T et x, dont la fonction de coût est,[12] pour tout $S \subset T, S \neq \phi$:

$$c_{T_x}(S) = \min \left\{ c(S \cup U) - \sum_{i \in U} x_i \mid U \subseteq N \backslash T \right\}$$

Soit $\overset{*}{U}(S)$, $\overset{*}{U}(S) \subseteq N \backslash T$, une coalition solution du problème de minimisation définissant $c_{T_x}(S)$. Puisque $x \in \mathcal{C}(c, N)$ on a pour tout $S \subset T$:

$$\sum_{i \in S \cup \overset{*}{U}(S)} x_i \leq c\left(S \cup \overset{*}{U}(S)\right)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i \in S} x_i \leq c\left(S \cup \overset{*}{U}(S)\right) - \sum_{i \in \overset{*}{U}(S)} x_i$$

et donc $\{x_i, i \in T\}$ est une imputation qui est robuste à toute menace de sécession dans le jeu (c_{T_x}, T).

Puisque $\{x_i, i \in T\}$ est dans le coeur de (c_{T_x}, T) pour tout $x \in \mathcal{C}(c, N)$ et tout $T \subset N$, le coeur est une solution cohérente. Un raisonnement similaire montre que c'est aussi une solution cohérente au sens de Hart et Mas-Collel. Enfin il devrait être clair que c'est une solution qui satisfait la condition de cohérence inverse.

En fait le coeur est la seule solution qui soit cohérente et super-additive, comme l'a montré Peleg (1986).[13]

[12] Il en est de même pour les joueurs $j \notin S$.

[13] La démonstration de ce théorème sort du cadre de ce chapitre. Le lecteur intéressé la trouvera dans Peleg (1986).

Théorème 5.10 (Peleg (1986)) *Considérons la classe des jeux de coûts équilibrés. Alors la seule solution effective sur cette classe de jeux qui est cohérente au sens faible et super-additive, est le coeur.*

5.4 Le semi-coeur

Le semi-coeur est une solution obtenue en affaiblissant les conditions de robustesse aux menaces de sécession. L'affaiblissement procède ici par réduction du nombre des coalitions considérées comme susceptibles de menacer de se séparer de la grande coalition. Plus précisément ne sont admises que les coalitions d'un seul joueur et symétriquement de tous les joueurs sauf un. Une imputation est dans le semi-coeur si aucun joueur n'a intérêt à se séparer de la grande coalition (rationalité individuelle) et si les autres joueurs n'ont pas non plus intérêt à se séparer de lui. Formellement une pré-imputation x est dans le semi-coeur du jeu (c, N) si :

$$\forall i \in N : x_i \leq c\left(\{i\}\right) \text{ et } \sum_{j \neq i} x_j \leq c\left(N \backslash \{i\}\right)$$

Il est clair que dans les jeux à trois joueurs ou moins, coeur et semi-coeur sont confondus.

Certaines méthodes de partage des coûts définissent des imputations extérieures au coeur, mais qui sont dans le semi-coeur. C'est le cas de la méthode des bénéfices résiduels. Rappelons que cette méthode impose à tout projet i une participation x_i qui s'élève à :[14]

$$x_i = \delta\left(\{i\}\right) + \frac{c\left(\{i\}\right) - \delta\left(\{i\}\right)}{\sum_{j \in N}\left[c\left(\{j\}\right) - \delta\left(\{j\}\right)\right]}\left(c\left(N\right) - \sum_{j \in N} \delta\left(\{j\}\right)\right)$$

La formule implique qu'on impose d'abord à chaque projet i de payer son coût incrémental $\delta\left(\{i\}\right)$ et qu'ensuite :

- si ce financement s'avère insuffisant, c'est-à-dire si $\sum_{j \in N} \delta\{j\} < c\left(N\right)$,[15] on demande un complément à chaque projet i pour couvrir le déficit constaté, complément proportionnel à l'économie de coût (par rapport au coût de réalisation isolée $c\left(\{i\}\right)$) permise par le seul payement du coût incrémental ;

[14] On note $\delta\left(S\right)$ le coût incrémental de la coalition S, $c\left(N\right) - c\left(N \backslash S\right)$.

[15] Sous les hypothèses posées sur c la différence $c\left(N\right) - \sum_{j \in N} \delta\left(\{j\}\right)$ peut être de n'importe quel signe. Dans les jeux concaves elle est nécessairement positive.

- si ce financement génère des bénéfices, c'est-à-dire si $\sum_{j\in N}\delta(\{j\}) > c(N)$, on ristourne les bénéfices ainsi obtenus, $c(N) - \sum_{j\in N}\delta\{j\}$, aux différents projets selon la même règle de proportionnalité.

On remarquera que, sous l'hypothèse de sous-additivité de la fonction de coût c, on a $c(\{i\}) \geq c(N) - c(N\backslash\{i\}) = \delta(\{i\})$, de sorte que :

- s'il s'avère que la somme des coûts incrémentaux $\sum_{j\in N}\delta\{j\}$ est inférieure au coût global $c(N)$, tous les projets strictement bénéficiaires sous ce seul mode de financement, c'est-à-dire les projets $j : c(\{j\}) - \delta(\{j\}) > 0$ et eux-seuls, sont appelés à concourir au comblement du déficit ;
- s'il s'avère que la somme des coûts incrémentaux est supérieure au coût global $c(N)$, tous les projets qui pâtiraient de ce seul mode de financement, c'est-à-dire les projets $j : c(\{j\}) - \delta(\{j\}) < 0$, bénéficient de la répartition du surplus ainsi généré.

Il est clair que l'imputation ainsi obtenue n'appartient pas nécessairement au coeur puisque n'apparaissent, dans la formule qui la définit, que les seules coalitions d'un seul joueur et de tous les joueurs sauf un. Si donc cette imputation est robuste à certaines menaces de sécession il ne peut s'agir que des menaces des coalitions d'un seul joueur ou de tous les joueurs sauf un.[16] On peut montrer que cette imputation est dans le semi-coeur.[17]

5.5 L'ensemble d'imputations stables au sens de von Neuman et Morgenstern

Cette solution proposée par les pères fondateurs de la théorie des jeux est définie en termes de domination.[18] On dit qu'un ensemble de pré-imputations est un ensemble stable si d'une part les pré-imputations de l'ensemble ne se dominent pas l'une l'autre et si, d'autre part, toute pré-imputation extérieure à l'ensemble est dominée par une pré-imputation de l'ensemble.

[16] Sauf hypothèses additionnelles sur la structure de la fonction de coût. Par exemple dans les jeux concaves la condition de robustesse aux menaces des seules coalitions de $n-1$ joueurs est une condition très forte.

[17] cf Young (1994).

[18] Pour la définition de la domination d'une pré-imputation par une autre pré-imputation, voir la sous-section 4.4.9.

Formellement, étant donné un jeu (c, N), on appelle ensemble stable tout ensemble de pré-imputations $VNM\,(c, N) \subseteq PX\,(c, N)$, tel que :

$$\forall x, x' \in VNM\,(c, N) : x \not{d} x' \tag{a}$$

$$\forall x' \in PX\,(c, N) \backslash VNM\,(c, N)\,, \exists x \in VNM\,(c, N) : x d x' \tag{b}$$

où la notation $x \not{d} x'$ signifie que la pré-imputation x ne domine pas la pré-imputation x'.

Cette définition est différente de celle du coeur. En termes de domination le coeur se définit comme l'ensemble $\mathcal{C}\,(c, N)$ des pré-imputations telles que :

$$\forall x \in \mathcal{C}\,(c, N) \quad , \ \forall x' \in PX\,(c, N) : x \not{d} x'$$

La condition (a) de la définition d'un ensemble stable est donc satisfaite par l'ensemble des imputations du coeur. Mais une imputation x' d'un ensemble stable pourrait être exclue du coeur parce qu'elle est dominée par une imputation x extérieure à l'ensemble stable, alors qu'elle n'est dominée par aucune imputation de l'ensemble stable lui-même. Les relations entre les deux concepts de solutions sont résumées dans la proposition suivante.

Proposition 5.11 *Pour tout jeu de coûts* (c, N)*, on a pour tout ensemble stable* $VNM\,(c, N)$:

- *(1)* $\mathcal{C}\,(c, N) \subseteq VNM\,(c, N)$.
- *(2) Si* $\mathcal{C}\,(c, N)$ *est lui-même un ensemble stable, alors* $\mathcal{C}\,(c, N) = VNM\,(c, N)$.

Démonstration. Supposons que *(1)* soit fausse. Alors il existerait une pré-imputation x' telle que :

$$x' \in \mathcal{C}\,(c, N) \text{ et } x' \notin VNM\,(c, N)$$

Puisque $x' \notin VNM\,(c, N)$, il existe une pré-imputation $x \in VNM\,(c, M)$ qui domine x'. Il s'agit d'une contradiction car $x' \in \mathcal{C}\,(c, N)$ implique que x' n'est dominée par aucune pré-imputation.

Considérons maintenant un ensemble stable $VNM\,(c, N)$. On vient de démontrer qu'on devait avoir $\mathcal{C}\,(c, N) \subseteq VNM\,(c, N)$. Supposons que *(2)* soit fausse, c'est-à-dire que $\mathcal{C}\,(c, N) \neq VNM\,(c, N)$. Il existerait alors une pré-imputation x' telle que :

$$x' \in VNM\,(c, N) \text{ et } x' \notin \mathcal{C}\,(c, N)$$

Si $\mathcal{C}(c, N)$ est lui-même un ensemble stable, il existe une pré-imputation $x \in \mathcal{C}(c, N)$ qui domine $x' \notin \mathcal{C}(c, N)$. Puisque $\mathcal{C}(c, N) \subseteq VNM(c, N)$, x appartient à $VNM(c, N)$. On a donc trouvé deux pré-imputations x et x' dans $VNM(c, N)$ dont l'une domine l'autre, d'où une contradiction. ■

Dans les jeux de coûts concaves l'ensemble stable de von Neumann et Morgenstern est unique et confondu avec le coeur. Mais c'est plutôt pour les jeux dont le coeur est vide que l'on serait intéressé par une solution du type ensemble stable. Si on pense en effet que les relations de domination, ou les menaces de sécession, devraient être des éléments de structuration forts dans la recherche de solutions, l'ensemble stable est un concept de solution qui pourrait être retenu lorsque le coeur du jeu est vide. Puisqu'un tel ensemble est plus vaste que le coeur, il est non-vide pour certains jeux dont le coeur est vide.

Malheureusement l'ensemble stable présente plusieurs défauts, suffisamment rédhibitoires pour qu'il soit rarement employé. D'abord un jeu de coûts peut posséder plusieurs ensembles stables et on connaît assez mal la structure de leurs intersections et la structure de leurs unions. Ensuite on ne sait pas caractériser la classe des jeux qui possèdent un ensemble stable au moins. Enfin les propriétés vérifiées par cette solution, hormis celles utilisées dans la définition même de l'ensemble, sont assez mal connues, sauf pour certains jeux très spécifiques qui n'ont pas d'interprétation naturelle en termes de coûts.

5.6 Le pré-nucléole et le nucléole

Le pré-nucléole et le nucléole sont des solutions qui sélectionnent une seule pré-imputation. Pour toute pré-imputation x et toute coalition S, on appelle économie réalisée par S dans x, cette partie du coût de réalisation coordonnée de ses projets qu'elle n'a pas à supporter dans la pré-imputation x. Formellement, en notant $e(x, S)$ cette économie :

$$e(x, S) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

On appelle aussi parfois cette économie, l'excès de la coalition S dans la pré-imputation x en question.

Pour tout x, soit $e(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{2^n-2}$ dont les composantes sont les valeurs de $e(x, S)$ lorsque S décrit l'ensemble $\mathcal{N} \setminus \{\phi, N\}$, composantes arrangées par valeurs croissantes. On dit que le vecteur :

$$e(x) = (e_1(x), \ldots, e_h(x), \ldots, e_{2^n-2}(x))$$

est lexicographiquement strictement supérieur au vecteur :

$$e\left(x'\right) = \left(e_1\left(x'\right), \ldots, e_h\left(x'\right), \ldots, e_{2^n-2}\left(x'\right)\right)$$

ce que l'on note $e(x) >_l e(x')$, s'il existe $h, 1 \leq h \leq 2^2 - 2$ tel que :

$$e_j(x) = e_j\left(x'\right) \text{ pour tout } j < h, \text{ et, } e_h(x) > e_h\left(x'\right)$$

La définition implique que si aucun des vecteurs $e(x)$ et $e(x')$ n'est supérieur à l'autre alors, pour $h = 1, \ldots, 2^2 - 2$, $e_h(x) = e_h(x')$, c'est-à-dire les vecteurs sont égaux. On dit que $e(x)$ est lexicographiquement supérieur à $e(x')$, $e(x) \geq_l e(x')$ si, ou bien $e(x) = e(x')$ ou bien $e(x) >_l e(x')$.

On appelle *pré-nucléole* du jeu de coûts (c, N) le sous-ensemble de pré-imputations, que l'on note $PNU(c, N)$ tel que :

$$\forall x \in PNU(c, N), \forall x' \in PX(c, N) : e(x) \geq_l e\left(x'\right)$$

et on appelle *nucléole* de ce même jeu, le sous-ensemble d'imputations, que l'on note $NU(c, N)$, tel que :

$$\forall x \in NU(c, N), \forall x' \in X(c, N) : e(x) \geq_l e\left(x'\right)$$

Le pré-nucléole est donc le sous-ensemble des pré-imputations qui maximisent la plus petite économie réalisée par une coalition quelconque ; le nucléole est le sous-ensemble des imputations qui présentent la même propriété.

On peut montrer que pour tout jeu de coûts le pré-nucléole et le nucléole non seulement existent mais, de plus, ne comprennent qu'une seule pré-imputation pour le premier et une seule imputation pour le second, évidemment confondues si la pré-imputation du nucléole est individuellement rationnelle. Or sous l'hypothèse de sous-additivité des coûts que nous avons posée, la pré-imputation du pré-nucléole est individuellement rationnelle. Pré-nucléole et nucléole sont donc confondus dans les jeux de coûts. Enfin, lorsque le coeur n'est pas vide, le pré-nucléole en fait partie.

Outre cet aspect maximisation de la plus petite économie, le nucléole admet une caractérisation remarquable en termes de certaines des propriétés passées en revue à la section 5.4 du chapitre *Définitions et propriétés souhaitables des solutions.*

Théorème 5.12 (Sobolev (1975)) *Le pré-nucléole est la seule solution qui, sur l'ensemble des jeux de coûts :*

1. *sélectionne une pré-imputation unique,*

2. *traite de façons équivalentes les jeux équivalents,*
3. *est anonyme,*
4. *est cohérent.*[19]

En revanche, le pré-nucléole a d'assez mauvaises propriétés de monotonicité. Pour le voir il suffit de considérer le jeu de l'exemple 5 examiné à la sous-section 5.3.7 supra. Dans ce jeu l'unique imputation du coeur est donc aussi l'imputation du nucléole. On a vu qu'elle ne vérifiait pas la condition de monotonicité par rapport aux coûts des coalitions. En fait, comme l'a montré Meggido (1974), le pré-nucléole ne vérifie même pas une propriété de monotonicité très faible dite *monotonicité globale* qui pose que, pour une solution σ sélectionnant une imputation unique, pour toute paire de jeux (c, N) et (c', N) qui ne diffèrent que par le coût global de réalisation de l'ensemble des projets, $c(N) > c'(N)$ et $c(S) = c'(S)$ pour tout $S \subset N$, on devrait avoir $\sigma_i(c, N) \geq \sigma_i(c', N)$ pour tout $i \in N$.

La maximisation de la plus petite économie réalisée par une coalition quelconque revient implicitement à donner autant de poids à la coalition d'un seul agent i qu'à la coalition complémentaire $N \backslash \{i\}$ de tous les autres projets. Certains auteurs ont proposé de prendre en considération l'économie moyenne par projet, c'est-à-dire de travailler avec une fonction $\bar{e}(x, S) = e(x, S) / |S|$, plutôt que $e(x, S)$. Le pré-nucléole par tête est l'ensemble des pré-imputations qui maximisent la plus petite économie par tête réalisée par une coalition quelconque. Cette pré-imputation est dans le coeur lorsque celui-ci n'est pas vide, et dans ce cas le nucléole par tête est globalement monotone.

5.7 La valeur de Shapley

L'idée sous-jacente à la valeur de Shapley[20] est que la grande coalition N peut se former par adjonction des joueurs un à un dans un ordre quelconque et qu'il n'y a aucune raison de privilégier l'un de ces ordres. On demande donc à chaque joueur la moyenne des contributions qu'on exigerait de lui dans toutes les imputations par les coûts incrémentaux. Formellement la valeur de Shapley est l'imputation x telle que :

$$\forall i \in N : x_i = \frac{1}{|A(N)|} \sum_{a \in A(N)} \delta c(i, a) = \frac{1}{|A(n)|} \sum_{a \in A(N)} \tilde{x}_i(a)$$

[19] Remplacer la cohérence par la cohérence faible dans cet énoncé, caractérise un autre concept de solution, le pré-noyau (pré-kernel). Nous ne présentons ce concept, qui n'a jamais été employé dans les problèmes de répartition des coûts.

[20] Shapley (1953).

Cette solution est évidemment définie pour tout jeu de coûts. Elle est de plus individuellement rationnelle sous l'hypothèse de sous-additivité de la fonction de coût puisque c'est la moyenne de pré-imputations qui sont, chacune, sous cette hypothèse, individuellement rationnelles. Mais l'imputation par la valeur de Shapley n'est pas nécessairement dans le coeur lorsque celui-ci n'est pas vide. Pour les jeux concaves dont on a vu que le coeur est la fermeture convexe de toutes les imputations par les coûts incrémentaux pour tous les arrangements possibles, l'imputation par la valeur de Shapley est l'imputation située au centre du coeur.

La valeur de Shapley admet plusieurs caractérisations en termes des propriétés recensées à la section 4.4. La plus commune est la caractérisation donnée par Shapley lui-même.

Théorème 5.13 (Shapley (1953)) *La valeur de Shapley est la seule solution qui, sur l'ensemble des jeux de coûts :*[21]

1. *sélectionne une imputation unique,*
2. *est insensible à l'élimination des joueurs négligeables,*
3. *est additive,*
4. *est anonyme.*

La valeur de Shapley possède d'autres propriétés. Il est facile de vérifier que c'est une solution qui traite de façon équivalente les projets équivalents. Pour un jeu (c, N) qui admet une décomposition $(d, \hat{c})$ en coûts directs et coûts joints la valeur de Shapley du jeu s'obtient en ajoutant, pour chaque joueur i, le coût direct d_i dont il est responsable, à l'imputation par la valeur de Shapley qui serait mise à sa charge dans le jeu réduit $(\hat{c}, N)$. Pour les jeux qui admettent une décomposition en éléments de coûts l'imputation équitable par décomposition et l'imputation par la valeur de Shapley coïncident.

[21] Cette caractérisation vaut pour une classe de jeux plus large que la seule classe des jeux de coûts. Voir, par exemple Owen (1995), chapitre XII.

5.A Annexes

5.A.1 Vacuïté du coeur des jeux de coûts essentiels à somme constante

On a vu au chapitre 4 qu'il existe des jeux de coûts essentiels dits à somme constante, c'est-à-dire pour lesquels, $\forall S \subset N : c(S) + c(N \backslash S) = c(N)$ bien que, puisqu'ils sont essentiels, $\sum_{i \in S} c(\{i\}) > c(N)$. La condition de constance est en réalité une condition qui implicitement pose que les coalitions de tailles intermédiaires sont suffisamment fortes pour que le coeur soit vide. Il découle de la définition de tels jeux que la seule partition des joueurs dont la somme des coûts des parties est supérieure au coût de réalisation coordonnée de tous les projets est la partition $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{i\}, \ldots, \{n\}\}$. On doit donc s'attendre à ce que ce soit la trop grande force des coalitions $S = N \backslash \{i\}$, $i \in N$ quelconque qui est cause de la vacuïté du coeur. Montrons que c'est bien le cas.

Soit (c, N) un jeu de coût essentiel à somme constante et supposons qu'il existe une pré-imputation $\overline{x}$ robuste à toute menace de sécession. Elle est donc robuste aux menaces de retrait des coalitions de la forme $S = N \backslash \{i\}$, $i = 1, \ldots, n$, d'où :

$$\sum_{j \in N \backslash \{i\}} \overline{x}_j \leq c(N \backslash \{i\}), \quad i = 1, \ldots, n$$

Puisque (c, N) est un jeu à somme constante :

$$c(N \backslash \{i\}) = c(N) - c(\{i\}), \quad i = 1, \ldots, n$$

inégalité qui, avec l'égalité précédente, implique que :

$$\sum_{j \in N \backslash \{i\}} \overline{x}_j \leq c(N) - c(\{i\}), \quad i = 1, \ldots, n$$

d'où :

$$\sum_{j \in N \backslash \{i\}} \overline{x}_j + c(\{i\}) \leq c(N) \qquad , i = 1, \ldots, n$$

Sommons ces inégalités sur l'ensemble des $i \in N$. Il vient :

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N \backslash \{i\}} \overline{x}_i + \sum_{i \in N} c(\{i\}) \leq n\, c(N)$$

inégalité qu'on peut encore écrire sous la forme suivante, en remarquant que, dans le premier terme du membre gauche, chaque joueur i figure exactement $n-1$ fois :

$$(n-1) \sum_{i \in N} \overline{x}_i + \sum_{i \in N} c(\{i\}) \leq n\ c(N) \tag{5.1}$$

Or d'une part $\overline{x}$ est une pré-imputation et donc $\sum_{i\in N}\overline{x}_i = c(N)$, et d'autre part le jeu est essentiel et donc $\sum_{i\in N} c(\{i\}) > c(N)$, de sorte que :

$$(n-1)\sum_{i\in N}\overline{x}_i + \sum_{i\in N} c(\{i\}) > n\ c(N) \tag{5.2}$$

Les inégalités (5.1) et (5.2) sont contradictoires.

5.A.2 Le coeur de tout jeu équilibré est non-vide

Montrons que le coeur de tout jeu équilibré est non-vide.

Démontrer que le coeur n'est pas vide revient à démontrer que le système d'équation et d'inéquations en x suivant possède une solution :

$$\sum_{i\in N} x_i = c(N)$$

$$\sum_{i\in S} x_i \leq c(S), \quad S \in \mathcal{N}\backslash\phi$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in N$$

Ce système possède une solution si et seulement si le programme linéaire PL.1 ci-dessous :

$$\max \sum_{i\in N} x_i$$

$$\sum_{i\in S} x_i \leq c(S), \quad S \in \mathcal{N}\backslash\phi \tag{5.3}$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in N \tag{5.4}$$

possède une solution $\overline{x}$ telle que :

$$\sum_{i\in N}\overline{x}_i = c(N)$$

Soit $\lambda_S,\ S \in \mathcal{N}\backslash\phi$, les variables duables du problème PL.1. Le programme dual de PL.1 est le programme PL.2 suivant :[22]

$$\min \sum_{S\in\mathcal{N}\backslash\phi} \lambda_S c(S)$$

[22] On trouvera à l'annexe 5.A.4 le rappel des principaux résultats de la théorie de la programmation linéaire sur lesquels cette démonstration s'appuie.

$$\sum_{S:i\in S} \lambda_S = 1, \quad i \in N \tag{5.5}$$

$$\lambda_S \geq 0, \quad S \in \mathcal{N} \backslash \phi \tag{5.6}$$

Les contraintes du programme PL.2 définissent un sous-ensemble compact, convexe, non-vide de R^{2^n-1}. Ce programme possède donc une solution finie. En vertu du théorème fondamental de la programmation linéaire, le programme PL.1 admet aussi une solution finie et les valeurs des deux programmes sont les mêmes. En d'autres termes il existe des $\overline{\lambda}_S$, $S \in \mathcal{N} \backslash \phi$ vérifiant les contraintes (5.5)-(5.6) et des $\overline{x}_i,\ i \in N$, vérifiant les contraintes (5.3)-(5.4) tels que :

$$\sum_{i\in N} \overline{x}_i = \sum_{S\in \mathcal{N}\backslash\phi} \overline{\lambda}_S c\left(S\right)$$

Soit $\overline{\mathcal{S}}$ l'ensemble des coalitions pour lesquelles $\overline{\lambda}_S > 0$. En vertu du théorème des écarts complémentaires, les contraintes correspondantes du programme PL.1 sont vérifiées avec l'égalité :

$$\forall S \in \overline{\mathcal{S}} : \sum_{i\in S} \overline{x}_i = c\left(S\right)$$

d'où, en multipliant chacune de ces égalités par le $\overline{\lambda}_S$ correspondant et en sommant :

$$\sum_{S\in\overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S \left(\sum_{i\in S} \overline{x}_i \right) = \sum_{S\in\overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S\, c\left(S\right)$$

et en permuttant l'ordre de sommation dans le membre gauche :

$$\sum_{i\in N} \left(\sum_{S:i\in S} \overline{\lambda}_S \right) \overline{x}_i = \sum_{S\in\overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S\, c\left(S\right) \tag{5.7}$$

Remarquons maintenant que $\overline{\mathcal{S}}$ est une famille équilibrée de coalitions. Les contraintes (5.5) du programme PL.2 sont satisfaites et, dans ces contraintes, seuls les $\overline{\lambda}_S > 0$ jouent un rôle.[23] On a donc :

$$\sum_{S\in\overline{\mathcal{S}}:i\in S} \overline{\lambda}_S = 1$$

de sorte que (5.7) peut s'écrire :

$$\sum_{i\in N} \overline{x}_i = \sum_{S\in\overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S\, c\left(S\right) \tag{5.8}$$

[23] cf théorème 5.15 de l'annexe 5.A.4.

Puisque $\overline{\mathcal{S}}$ est une famille équilibrée et que le jeu est supposé équilibré :

$$\sum_{S\in\overline{\mathcal{S}}} \overline{\lambda}_S \; c(S) \geq c(N)$$

d'où, combiné à (5.8) :

$$\sum_{i\in N} \overline{x}_i \geq c(N) \tag{5.9}$$

Puisque les $\overline{x}_i$, $i \in N$, vérifient les contraintes du programme PL.1 et en particulier la contrainte (5.3) pour $S = N$, on a aussi :

$$\sum_{i\in N} \overline{x}_i \leq c(N) \tag{5.10}$$

On conclut de (5.9) et (5.10) que $\overline{x}_i$, $i \in N$, est une solution du programme PL.1 pour laquelle :

$$\sum_{i\in N} \overline{x}_i = c(N)$$

et donc $\overline{x}_i$, $i \in N$, est une imputation du coeur.

5.A.3 Appartenance au coeur des imputations par les coûts incrémentaux dans les jeux concaves

On montre dans cette annexe que pour tout arrangement $a \in A(N)$, l'imputation par les coûts incrémentaux sous l'arrangement en question, est une imputation du coeur si le jeu est concave.

Soit $a \in A(N)$ un arrangement quelconque des joueurs. L'imputation $\tilde{x}(a)$ n'est évidemment pas sensible à la menace de retrait de la grande coalition. Considérons donc un sous-ensemble stricte S de s joueurs, $s < n$. Notons $h = 1, \ldots, n$ les rangs de l'arrangement et $h_1, \ldots, h_k, ., h_s$ les rangs des joueurs de la coalition S considérée dans l'arrangement a. Pour simplifier on identifiera les joueurs de l'arrangement à leur rang, c'est-à-dire qu'on écrira, par exemple, $\bigcup\limits_{h=1}^{k} \{h\}$ plutôt que $\bigcup\limits_{h=1}^{k} \{a_h\}$. Rappelons qu'on était aussi convenu de noter $i(h,a)$, $i(h,a) \in N$, le joueur qui figure au rang h dans l'arrangement a. Puisque dans tout ce qui suit l'arrangement a est fixé, on notera plus simplement ce joueur $i(h)$.

Enfin rappelons qu'un jeu concave est un jeu pour lequel :[24]

$\forall i \in N$, $\forall Q, R \subseteq N \backslash \{i\}$:

$$Q \subseteq R \Rightarrow c(Q \cup \{i\}) - c(Q) \geq c(R \cup \{i\}) - c(R) \tag{5.11}$$

[24] Définition correspondant à la condition (a) de la sous-section 4.2.2.

Identifions, dans cette définition, successivement i aux joueurs de la coalition S pris dans l'ordre inverse de leur apparition dans l'arrangement :

$$h_s, h_{s-1}, \ldots, h_k, \ldots, h_2, h_1$$

R aux sous-ensembles de joueurs de rangs au plus égal à $h_s-1, h_{s-1}-1, \ldots, h_k-1, \ldots, h_2-1, h_1-1$:

$$\bigcup_{h=1}^{h_s-1}\{h\}, \bigcup_{h=1}^{h_{s-1}-1}\{h\}, \ldots, \bigcup_{h=1}^{h_s-1}\{h\}, \ldots, \bigcup_{h=1}^{h_2-1}\{h\}, \bigcup_{h=1}^{h_1-1}\{h\}$$

Q aux sous-ensembles de joueurs de la coalition S et de rangs au plus égal à $h_{s-1}, h_{s-2}, \ldots, h_{k-1}, \ldots, h_2, h_1$:

$$\bigcup_{g=1}^{s-1}\{h_g\}, \bigcup_{g=2}^{s-2}\{h_g\}, \ldots, \bigcup_{g=1}^{k-1}\{h_g\}, \ldots, \bigcup_{g=1}^{2}\{h_g\}, \{h_1\}$$

De (5.11) appliqué successivement, on obtient :

$$\begin{aligned} & c\left(\left\{\bigcup_{g=1}^{s-1}\{h_g\}\right\}\cup\{h_s\}\right) - c\left(\bigcup_{g=1}^{s-1}\{h_g\}\right) \\ \geq\ & c\left(\left\{\bigcup_{h=1}^{h_s-1}\{h\}\right\}\cup\{h_s\}\right) - c\left(\bigcup_{h=1}^{h_s-1}\{h\}\right) = \delta c\left(i\left(h_s\right), a\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c\left(\left\{\bigcup_{g=1}^{s-2}\{h_g\}\right\}\cup\{h_{s-1}\}\right) - c\left(\bigcup_{g=1}^{s-2}\{h_g\}\right) \\ \geq\ & c\left(\left\{\bigcup_{h=1}^{h_{s-1}-1}\{h\}\right\}\cup\{h_{s-1}\}\right) - c\left(\bigcup_{h=1}^{h_{s-1}-1}\{h\}\right) = \delta c\left(i\left(h_{s-1}\right), a\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c\left(\{h_1\}\cup\{h_2\}\right) - c\left(\{h_1\}\right) \\ & \geq c\left(\left\{\bigcup_{h=1}^{h_2-1}\{h\}\right\}\cup\{h_2\}\right) - c\left(\bigcup_{h=1}^{h_2-1}\{h\}\right) = \delta\ c\left(i\left(h_2\right), a\right) \\ & c\left(\{\phi\}\cup\{h_1\}\right) - c\left(\phi\right) \\ & \geq c\left(\left\{\bigcup_{h=1}^{h_1-1}\{h\}\right\}\cup\{h_1\}\right) - c\left(\bigcup_{h=1}^{h_1-1}\{h\}\right) = \delta\ c\left(i\left(h_1\right), a\right) \end{aligned}$$

où, si $h_1 = 1$, alors $\bigcup_{h=1}^{h_1-1}\{h\}$ désigne l'ensemble vide. Sommons ces inégalités. On obtient :

$$c\left(\bigcup_{g=1}^{s}\{h_g\}\right) - c\left(\phi\right) \geq \sum_{g=1}^{s}\delta\ c\left(i\left(h_g\right), a\right)$$

soit encore :

$$c(S) \geq \sum_{i \in S} \hat{x}_i(a)$$

En d'autres termes $\hat{x}(a)$ est robuste à la menace de sécession de S.

5.A.4 Les théorèmes fondamentaux de la programmation linéaire

Considérons le programme linéaire suivant (P.1) :

$$\max_{x_I, x_J} \; f^I x_I + f^J x_J$$

$$\left[A_H^I, A_H^J\right] \begin{bmatrix} x_I \\ x_J \end{bmatrix} \leqq a_H$$

$$\left[A_K^I, A_K^J\right] \begin{bmatrix} x_I \\ x_J \end{bmatrix} = a_K$$

$$x_I \geqq 0,\ x_J \text{ quelconque}$$

où pour $U \in \{I, J\}$ et $V \in \{H, K\}$:

- f^U est un vecteur ligne à n_U composantes,
- x_U est un vecteur colonne à n_U composantes,
- a_V est un vecteur colonne à n_V composantes,
- A_V^U est une matrice à n_U colonnes et n_V lignes.

On appelle programme dual du programme (P.1), le programme (P.2) suivant :

$$\min_{y^H, y^K} \; y^H a_H + y^K a_K$$

$$\left[y^H, y^K\right] \begin{bmatrix} A_H^I \\ A_K^I \end{bmatrix} \geqq f^I$$

$$\left[y^H, y^K\right] \begin{bmatrix} A_H^J \\ A_K^J \end{bmatrix} = f^J$$

$$y^H \geqq 0,\ y^K \text{ quelconque}$$

où, pour $U \in \{I, J\}$, y^U est un vecteur ligne à n_u composantes.

Les théorèmes suivants caractérisent les relations qui existent entre les solutions des deux programmes.

Théorème 5.14 *Étant donné un couple de programmes duaux (P.1) et (P.2), une condition nécessaire et suffisante pour que l'un des programmes admette une solution finie est que l'autre programme admette une solution finie. Dans ce cas les valeurs optimisées des fonctions d'objectif sont les mêmes, c'est-à-dire si* $\left(\overset{*}{x}_I, \overset{*}{x}_J\right)$ *est une solution de (P.1) et* $\left(\overset{*}{y}^H, \overset{*}{y}^K\right)$ *une solution de (P.2) alors :*

$$f^I \overset{*}{x}_I + f^J \overset{*}{x}_J = \overset{*}{y}^H a_H + \overset{*}{y}^K a_k$$

Théorème 5.15 *Étant donné un couple de programmes duaux (P.1) et (P.2), une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de vecteurs* $(\overline{x}_I, \overline{x}_J)$ *et* $\left(\bar{y}^H, \bar{y}^K\right)$ *vérifiant les contraintes de (P.1) et (P.2) respectivement, soit solution du couple des programmes duaux est que :*

$$\overline{y}^H \left[\left[A_H^I, A_H^J\right] \begin{bmatrix} \overline{x}_I \\ \overline{x}_J \end{bmatrix} - a_H \right] = 0$$

$$\left[f^I - \left[\overline{y}^H, \overline{y}^K\right] \begin{bmatrix} A_H^I \\ A_K^I \end{bmatrix} \right] \overline{x}_I = 0$$

Références

Meggido, N., 1974. “On the Nonmonotonicity of the Bargaining Set, the Kernel and the Nucleolus of a Game”, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 27, 355-398.

Owen, G., 1995. “Game Theory”, Third Edition, San Diego : Academic Press.

Peleg, B., 1986. “On the Reduced Game Property and its Converse” *International Journal of Game Theory*, 15 187-206.

Shapley, L.S., 1953. “A Value for n-Person Games,” in Kuhn, H., et A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton : Princeton University Press, 307-317.

Shapley, L. S., 1967. “On Balanced Sets and Cores,” *Naval Research Logistics Quaterly*, 14, 453,460.

Shapley, L.S., 1953. “Cores of Convex Games,” *International Journal of Game Theory,* 1, 11-26.

Sobolev, A.I., 1975. “Characterization of the Principle of Optimality for Cooperative Games through Functional Equations,” in N.N. Voroby’ev, ed. *Mathematical Methods in Social Sciences*, Vipusk 6, Academy of Sciences of the Lithuanian SSR, Vilnius, 92-151.

Young, H.P., 1994. “Cost Allocation,” in R.J. Aumann et S. Hart, eds, *Handbook of Game Theory*, Vol. II, Amsterdam : North-Holland, Chap. 34, 1191-1235.

Chapitre 6

Partage du coût des réseaux municipaux souterrains

6.1 Introduction

Dans les municipalités d'une certaine taille, les réseaux d'aqueduc, de collecte des eaux usées, de distribution de gaz naturel, de distribution électrique, de télécommunications, etc. passent dans des canalisations regroupées sous terre. La construction de ces ouvrages implique des coûts fixes très importants, qu'il faut partager entre les différents utilisateurs. Par exemple, lorsque la voie publique est ouverte pour les besoins de développement ou de réfection de l'un de ces réseaux, les autres partenaires en profitent pour développer ou inspecter leurs propres installations et procéder aux entretiens et réparations nécessaires. Il peut s'avérer efficace d'ouvrir la voie sur une largeur ou longueur plus grande que strictement nécessaire, pour permettre aux autres partenaires de développer, entretenir ou vérifier leurs ouvrages. Quel montant ou quel pourcentage du coût d'ouvrir la chaussée et de procéder au développement des massifs communs devrait être supporté par chacun des partenaires, actuels et futurs ?

La réponse à cette question soulève généralement de multiples discussions et négociations entre les partenaires, qu'il s'agisse de partir de zéro ou de faire des modifications et des opérations d'entretien dans un réseau existant. Les règles de partage de coûts qui sont présentées dans le chapitre 2 et dont les propriétés sont étudiées dans le chapitre 3, peuvent venir à la rescousse et servir de mécanisme de facilitation dans la recherche d'une règle de partage efficace et équitable. Trois grandes classes de méthodes sont présentées dans ces chapitres : les méthodes de répartition proportionnelle, les règles inspirées par la théorie des jeux coopératifs et les méthodes de répartition séquentielle.

Le problème de la répartition des coûts d'un réseau de conduits souterrain présente des caractéristiques particulières et, de ce fait, mérite un traitement spécifique. C'est la raison d'être du présent chapitre. À cette fin, on introduit d'abord un exemple pour illustrer les spécificités du problème et on le définit ensuite de façon très générale. En deuxième lieu, on reprend un certain nombre des propriétés qu'on retrouve dans la littérature économique et qui sont présentées dans le chapitre 3. Suit une brève discussion des méthodes de répartition proportionnelle, dont celle qui consiste à répartir les coûts proportionnellement à la longueur des conduits attribués aux usagers.[1] On présente ensuite, de façon assez détaillée, deux méthodes qui semblent les plus intéressantes dans ce contexte, soit la méthode Shapley-Shubik et la méthode de répartition séquentielle. On illustre les méthodes à l'aide de l'exemple. On énumère également les

[1] C'est la méthode actuellement en usage à la Commision des services électriques de Montréal (CSEM).

propriétés satisfaites par ces méthodes. Un tableau synoptique indique quelles propriétés sont satisfaites par quelles méthodes. Finalement, on discute des données nécessaires à l'application des méthodes retenues. En conclusion, on recommande le choix de la méthode de répartition séquentielle, qui semble à la fois la plus facile à appliquer et la plus susceptible de répondre à la problématique des conduits souterrains.

6.2 Le problème de la répartition des coûts communs

Pour illustrer la problématique et les méthodes de répartition qui vont suivre, on commence par présenter un exemple.

6.2.1 Un exemple

Imaginons un réseau souterrain composé de cinq sections ayant chacune un contenu homogène.[2] Il y a trois usagers qui occupent ce réseau, un gros (G), un moyen (M) et un petit (P). Le petit peut être vu comme un regroupement de petits usagers. G ne peut utiliser que des conduits de 4 pouces alors que M et P souhaitent utiliser respectivement des conduits de 3 et 1 pouces. Le Tableau 6.1 présente la longueur des sections (en mètres) et le nombre de conduits requis par les usagers dans chacune des sections.

Section	Longueur	G	M	P
1	100	16	0	0
2	200	12	3	0
3	300	0	2	2
4	400	8	4	1
5	200	6	0	1

Tableau 6.1 – Demandes des usagers

La présence de G dans une section entraîne l'installation de conduits de 4 pouces pour tous les usagers. On peut cependant insérer jusqu'à trois conduits de 1 pouce dans un de 4 pouces. De façon similaire, si G n'est pas présent dans une section alors que M y est, on n'installe que des conduits de 3 pouces. On peut cependant insérer deux conduits de 1 pouce dans les conduits de 3 pouces.[3]

[2] Avec une subdivision assez fine du réseau, on peut toujours faire en sorte que le contenu des sections soit homogène.

[3] Cette convention reflète assez bien la pratique actuelle à la CSEM.

La composition de chacune des sections du réseau peut être décrite par un sextuplet $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ dont les composantes sont ainsi définies :

α_1 : le nombre de conduits de 4 pouces non partagés,

α_2 : le nombre de conduits de 3 pouces non partagés,

α_3 : le nombre de conduits de 1 pouce installés librement,

α_4 : le nombre de conduits de 4 pouces dans lesquels on a inséré 3 conduits de 1 pouce,

α_5 : le nombre de conduits de 4 pouces dans lesquels on a inséré 2 conduits de 1 pouce,

α_6 : le nombre de conduits de 3 pouces dans lesquels on a inséré 2 conduits de 1 pouce.

On suppose qu'il en coûte 150$ le mètre linéaire pour construire un massif plus un coût pour chacun des conduits installés dans ce massif. Un conduit de 4 pouces coûte 10$ le mètre. Son coût passe à 11$ si on y insère deux conduits de 1 pouce et à 12$ si on y insère trois conduits de 1 pouce. Un conduit de 3 pouces coûte 7$ le mètre et son coût passe à 8$ si on y insère deux conduits de 1 pouce. Finalement, un conduit de 1 pouce installé librement coûte 3$ le mètre. De façon précise, le coût de chaque mètre d'une section de composition α est donné par la fonction :

$$c(\alpha) = 150 + 10\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 + 12\alpha_4 + 11\alpha_5 + 8\alpha_6$$

On applique la même fonction à chacune des sections du réseau. On pourrait utiliser des fonctions différentes pour chaque section.

La configuration de chaque section est conçue de façon à minimiser le coût de satisfaire à la demande ou aux besoins exprimés. On choisit donc la taille la plus petite possible pour les conduits, tout en respectant les contraintes énoncées plus haut. On cherche aussi à insérer le nombre maximal de conduits de 1 pouce dans des conduits de 3 ou 4 pouces. Ce principe, appliqué à la demande du Tableau 6.1, donne la configuration du Tableau 6.2, c'est-à-dire le nombre de conduits de chaque type, pour chaque section du réseau. Le tableau est complété par le coût au mètre de chaque section et par le coût total.

Ce tableau indique, entre autres, que la section 3 doit comprendre trois conduits de 3 pouces, dont un dans lequel on insère deux conduits de 1 pouce. Ces derniers permettent de répondre aux besoins du petit usager. Les deux autres conduits de 3 pouces sont destinés à l'usager moyen. Selon la fonction de coût définie plus haut, cette section coûte $150 + (2 \times 7) + (1 \times 8) = 172$\$ le mètre. Comme sa longueur est de 300 mètre, son coût total s'élève à 51 600$.

Section	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	Coût unitaire	Longueur	Coût total
1	16	0	0	0	0	0	310	100	31 000
2	15	0	0	0	0	0	300	200	60 000
3	0	2	0	0	0	1	172	300	51 600
4	13	0	0	0	0	0	280	400	112 000
5	7	0	0	0	0	0	220	200	44 000
Réseau									298 600

Tableau 6.2 – Configuration et coûts du réseau

On suppose finalement un **coût fixe** de 50 000$ lié à l'administration de l'ensemble du réseau, ce qui donne un coût total à répartir de **348 600$**. Encore une fois, il s'agit d'un exemple dont le seul but est d'illustrer les idées et méthodes présentées dans ce chapitre. Il faut donc éviter de comparer les résultats présentés plus loin à des situations concrètes.

Cet exemple illustre le problème de partage de coûts d'une manière assez générale. Les usagers, clients, agents ou entités ont des demandes qui peuvent prendre plusieurs dimensions et qui peuvent être fort différentes les unes des autres. De plus, ces différentes demandes commandent un projet commun dont les caractéristiques ne sont pas nécessairement obtenues par la simple sommation des demandes individuelles. Le lien entre ces dernières et les coûts peut donc être assez complexe. Qui plus est, un coût fixe s'ajoute aux coûts variables.

6.2.2 La formulation générale

De manière générale, le problème de partage de coûts dans un réseau souterrain se présente comme suit. Il y a n usagers formant un ensemble $N = \{1, \ldots, n\}$, s sections et k paramètres permettant de décrire la demande de chaque usager dans une section. Ces paramètres correspondent aux différents types de conduit, aux autres équipements, comme les puits d'accès, ou aux caractéristiques de ces équipements (dimension, isolation, etc.). Il faut donc $m = s \times k$ nombres pour représenter la demande d'un usager sur l'ensemble du réseau. Les usagers sont repérés par un indice i (parfois j lorsqu'il faut distinguer entre deux usagers). La demande de l'usager i est un vecteur ou liste q_i de dimension m. La suite ou le vecteur des demandes des différents usagers est notée $Q = (q_1, \ldots, q_n)$. Il s'agit d'une suite de $n \times m$ nombres. Elle peut être mise sous la forme d'un tableau, les mathématiciens diraient une matrice :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nm} \end{bmatrix}$$

On peut parfois simplifier cette représentation dans la mesure où la demande d'un usager peut porter sur un sous-ensemble des caractéristiques. Ainsi, dans le cas de l'exemple de réseau introduit plus haut, P, M et G ne demandent respectivement que des conduits de 1, 3 et 4 pouces. On peut donc représenter les demandes de l'ensemble des usagers par le tableau qui suit, où les colonnes correspondent aux différentes sections du réseau et les rangées à la fois aux usagers et aux conduits de 1, 3 et 4 pouces. En fait, on pourrait simplifier encore davantage cette représentation en éliminant les 0.

$$Q = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si les n usagers décident de coopérer, la quantité à produire ou l'ampleur du projet à réaliser est donnée par une règle d'agrégation qui associe à chaque valeur possible de la liste Q un projet commun, capable de répondre à tous les besoins au moindre coût. Supposons que ce projet commun puisse être décrit à l'aide de h paramètres, les capacités d'un réseau par exemple ou le nombre de types de conduit dans un réseau souterrain. Il se peut que les paramètres qui servent à définir les demandes individuelles conviennent également à définir le projet commun, auquel cas $h = k$, mais cela n'est pas nécessairement le cas. Ce n'est pas le cas dans l'exemple de réseau présenté plus haut, où il faut six paramètres pour décrire la composition de chacune des cinq sections du réseau alors que trois suffisent pour décrire les demandes. Cet exemple montre également que la règle d'agrégation peut être très complexe, ce qui nous amène à la définition de la fonction de coût.

6.2.3 Les fonctions de coût

La formulation du problème est complétée par l'introduction d'une fonction, c'est-à-dire d'une règle, qui attribue des coûts aux valeurs possibles des demandes. Cette fonction est notée C. De façon précise, $C(Q)$ est le coût de satisfaire à une demande Q. On a vu plus haut qu'une demande Q se traduit en une certaine configuration du réseau dont les caractéristiques peuvent plus ou moins correspondre à celles qui servent à exprimer les demandes. Le nombre $C(Q)$ est donc le coût de cette configuration.

En fait, il peut y avoir plusieurs façons de satisfaire à une demande, c'est-à-dire de traduire une demande en un projet commun. Ainsi, dans l'exemple de réseau, on peut satisfaire aux besoins de P avec des conduits de 4, 3 ou 1 pouces ou encore en insérant des conduits de 1 pouce dans des conduits de 3 ou 4 pouces. Différents projets peuvent avoir des coûts différents. Le nombre $C(Q)$ doit s'entendre comme le coût du projet qui permet de répondre aux besoins exprimés de la manière la moins coûteuse possible. Ce meilleur projet peut changer avec la demande elle-même et les conditions du marché, comme les prix. Il faut cependant se rappeler qu'on suppose Q donné.

On a désigné plus haut une certaine configuration du réseau par α. Cette configuration est en fait une fonction de Q et on devrait la noter $\alpha(Q)$. On vient donc de dire qu'il peut y avoir plusieurs fonctions $\alpha(Q)$. Désignons par $A(Q)$ l'ensemble de tous les projets, c'est-à-dire toutes les fonctions $\alpha(Q)$, capables de répondre à la demande Q. Soit $c(\alpha(Q))$ le coût d'un projet $\alpha(Q)$. La fonction de coût C est alors définie par :

$$C(Q) = \min_{\alpha(Q)\in A(Q)} c(\alpha(Q))$$

On a aussi parfois besoin des coûts des demandes de sous-ensembles d'usagers S. Comme C est défini sur l'ensemble des suites Q, il faut mettre les demandes individuelles et celles de tout sous-ensemble d'usagers sous cette forme pour pouvoir leur appliquer C. On représente la demande d'un sous-ensemble S d'usagers par Q^S, qui est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes, autres que celle des usagers de S, sont ramenées à 0. Le coût de satisfaire uniquement aux demandes des usagers de S est donc $C\left(Q^S\right)$. Comme cas particulier, on a $C\left(Q^{\{i\}}\right)$, qui est le *coût de faire cavalier seul* (CS). En fait, on a parfois besoin du coût de faire cavalier seul pour différentes demandes Q. Aussi, on définit les fonctions de coût de faire cavalier seul pour les différents usagers. Elles sont notées c_i et définies par :

$$c_i(q_i) = C\left(Q^{\{i\}}\right),\ i = 1, \ldots, n$$

où q_i est, rappelons-le, la composante de Q qui concerne l'usager i. On suppose C non décroissante. Une augmentation de la demande de la part d'un ou plusieurs usagers ne peut entraîner une diminution de coût. Elle peut cependant laisser les coûts inchangés. C'est le cas s'il est possible de répondre à une plus grande demande de la part d'un usager sans changer la production. Par contre, on suppose que la fonction C induit des fonctions c_i croissantes.

6.2.4 La règle de répartition

Une règle de répartition est une fonction x qui, pour toute demande Q et toute fonction de coût C, spécifie la part du coût $C(Q)$ supportée par les différents usagers. On note $x_i(Q, C)$ la charge imputée à l'usager i et $x(Q, C)$ la liste de ces dernières :

$$x(Q, C) = (x_1(Q, C), \ldots, x_n(Q, C))$$

Une règle de répartition satisfait normalement : $\sum_{i=1}^{n} x_i(Q, C) = C(Q)$. Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on écrit x_i pour $x_i(Q, C)$.

6.3 Principes généraux et propriétés des méthodes

Il est généralement facile de s'entendre sur des principes généraux quant au choix d'une méthode de répartition de coûts. Par exemple, à la Commission des services électriques de Montréal, un comité a déjà suggéré la liste suivante :

- Équité : permettre une répartition juste et raisonnable pour les usagers du réseau.
- Responsabilité : faire prendre conscience, aux intervenants du réseau, des impacts de leurs besoins reliés aux règles établies.
- Transparence : permettre de valider facilement les règles établies.
- Faisabilité : facilité d'application des règles en termes de temps et d'efforts.
- Légalité : répondre aux lois existantes (en considérant la possibilité de changement).

Le problème est évidemment de donner une formulation précise à de tels principes et de les rendre opérationnels. L'équité, entre autres, peut prendre différentes formes. Dans le chapitre 3, on énonce justement un certain nombre de propriétés de façon formelle. Une définition formelle permet d'établir en toute rigueur si une méthode de partage donnée satisfait à une propriété en toutes circonstances ou si, au contraire, il existe des circonstances ou ce n'est pas le cas. Dans le présent chapitre, on se contente de rappeler brièvement ces propriétés de façon informelle.

Plusieurs d'entre elles s'adressent à un des trois premiers critères ci-dessus, à savoir l'équité, la responsabilité et la transparence. Les questions de légalité sont laissées de côté. La faisabilité s'adresse en partie aux données requises et aux méthodes de calcul. Ces considérations ne font pas partie des propriétés. Elles sont cependant importantes et une sous-section y est consacrée.

Les propriétés sont regroupées en deux catégories. Les premières sont dites normatives. Elles peuvent être associées à des considérations d'équité : comment traite-t-on les demandes comparables, y a-t-il protection des petits contre l'ampleur de la demande des plus gros, comment les parts des coûts évoluent-elles avec les demandes et les coûts, dans quels intervalles les contributions se situent-elles ? Les autres propriétés concernent la cohérence des règles de répartition : les contributions sont-elles indépendantes du choix des unités de mesure, sont-elles proportionnelles aux demandes lorsque les coûts le sont, sont-elles les mêmes, qu'on applique la règle au coût total ou séparément à différents éléments de coûts, etc. ? Ces deux catégories ne sont cependant pas parfaitement étanches. Certaines propriétés normatives incorporent des éléments de cohérence et réciproquement.

Pour faire suite à la description des propriétés, on présente un tableau, tiré du chapitre 3, qui indique quelles sont les propriétés qui sont satisfaites par les différentes méthodes présentées dans le chapitre 2. Un deuxième tableau indique, pour quelques méthodes, quelles sont les propriétés que chaque méthode est la seule à satisfaire. On termine le chapitre avec quelques considérations sur le choix d'une méthode.

6.3.1 Propriétés normatives

Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE) Si deux usagers ont des demandes équivalentes, en termes des coûts de faire cavalier seul (CS), elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux. A plus forte raison, deux usagers qui ont des demandes identiques devraient se voir imputer la même part des coûts totaux.

Préservation des rangs (RG) Les contributions des différentes usagers devraient être ordonnées selon l'importance de leurs demandes, telle que mesurée par le CS. Celles qui demandent plus devraient payer davantage que celles qui demandent moins.

Principe séquentiel (PS) La contribution d'un usager ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes plus grandes que la sienne.

Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN) Si un usager a une demande nulle, il ne devrait rien payer. De plus, les contributions des autres ne devraient pas dépendre de la présence ou non de cet usager dans le problème de partage.

Insensibilité des contributions aux usagers négligeables (IEN) Si le coût additionnel de répondre à la demande d'un usager, en plus de celles de n'importe quel sous-groupe d'usagers, est toujours égal à son CS, la contribution exigée de cet usager devrait être son CS. De plus, les contributions des autres ne devraient pas dépendre de la présence ou non de cet usager dans le problème de partage.

Insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents (INP) Le classement des contributions de deux usagers ne doit pas dépendre de la demande des autres usagers.

Monotonie par rapport aux coûts (MCT) Si les coûts devaient s'avérer plus élevés que prévu, quelle que soit l'ampleur du projet ou les niveaux de production à réaliser, alors les parts des coûts imputées aux différents usagers ne devraient pas diminuer.

Monotonie par rapport à la demande (MD) La contribution exigée d'un usager ne doit pas diminuer si les besoins exprimés par cet usager augmentent.

Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN) Dans un contexte d'économies d'échelle, l'augmentation de la demande d'un usager fait diminuer le coût moyen. Les autres usagers devraient profiter de cette diminution du coût moyen.

Monotonie croisée positive par rapport à la demande (MCP) Dans un contexte de déséconomies d'échelle, l'augmentation de la demande d'un usager fait augmenter le coût moyen. Les autres usagers devraient absorber une partie de cette augmentation du coût moyen.

Participation volontaire (PA) Une règle favorise la participation volontaire si elle n'exige jamais plus d'un usager que son coût de faire cavalier seul (CS).

Test du coeur ou absence d'interfinancement (CO) Une répartition passe le test du coeur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'usagers ne dépasse pas le coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété.[4] On peut aussi voir (CO) comme une condition spécifiant l'absence d'interfinancement ou encore la robustesse à la sécession. Le test du coeur implique évidemment la participation volontaire dans la mesure où on admet les coalitions d'un seul usager dans le test du coeur.

Anti-participation (APA) La participation volontaire et le test du coeur ne sont pas possibles en présence de déséconomies d'échelle. Dans ces cas, au moins un usager

[4] Voir l'annexe 6.A.1 et le chapitre 5 pour la définition du concept de coeur.

doit payer plus que son CS. Pour des raisons d'équité, on peut alors exiger que tous les usagers paient au moins leur CS. C'est ce que prescrit l'anti-participation.

Test de l'anti-coeur (ACO) Une répartition passe le test de l'anti-coeur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'usagers n'est pas inférieure au coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété. Tout comme (APA), c'est une propriété qu'on peut exiger ou du moins souhaiter en présence de déséconomies d'échelle.

6.3.2 Propriétés de cohérence

Insensibilité aux unités de mesure (IU) Une règle de partage de coûts est insensible aux unités de mesure si une transformation proportionnelle des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts.

Ordinalité (O) Une règle de partage de coûts satisfait l'ordinalité si une transformation croissante (mais pas nécessairement proportionnelle) des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts.

Séparation entre usagers (SE) La séparation entre usagers exige que, si le coût total est la somme des CS des usagers, alors chaque usager devrait payer exactement son CS.

Proportionnalité (PR) Si les coûts sont proportionnels aux quantités demandées, il devrait en être de même des contributions.

Additivité (AD) Si on peut séparer les coûts d'un projet en plusieurs composantes, répartir les composantes séparément devrait mener au même résultat que la répartition des coûts totaux.

Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC) Il s'agit d'un cas particulier de l'additivité. Si on peut décomposer les coûts totaux en coûts spécifiques ou directs et coûts communs, on devrait obtenir la même répartition des coûts totaux, qu'on applique la règle de partage à ces derniers ou qu'on l'applique aux coûts communs et qu'on impute les coûts spécifiques aux usagers concernés par ces derniers.

Cohérence (CH) Bien que les autres propriétés de cette sous-section soient aussi des propriétés de cohérence, la présente, qui prend plusieurs formes dans la littérature, dit essentiellement que, si un ou plusieurs usagers devaient se retirer du problème de partage des coûts, après avoir payé leurs contributions selon la règle de partage en vigueur, et que les membres restants devaient satisfaire à toute la demande, la contribution de ces derniers aux coûts résiduels, selon la même règle, ne devrait pas être différente de ce qu'elle aurait été dans le problème de partage original.

Cohérence faible (CHF) Si un certain nombre d'usagers ayant les plus petites demandes, en termes des coûts de faire cavalier seul, devaient quitter le problème après avoir payé leur dû selon la règle de partage en vigueur et qu'on appliquait la même règle pour répartir entre les autres le coût résiduel de la demande totale, leurs contributions seraient les mêmes que dans le problème original.

6.4 Choix d'une méthode pour les réseaux souterrains

Quelle ou quelles méthodes pourraient s'avérer intéressantes dans le présent contexte, eu égard aux propriétés qui viennent d'être énumérées ? Dans le chapitre 3, trois méthodes sont identifiées comme étant performantes à cet égard. Il s'agit de la règle des coûts moyens, de la règle Shapley-Shubik et de la méthode de répartition séquentielle. La première s'applique cependant uniquement dans le contexte unidimensionnel, c'est-à-dire celui où les demandes individuelles s'expriment par un seul nombre et où ces dernières peuvent être sommées pour obtenir la demande globale. Cela exclut les réseaux souterrains. Dans la présente section, on va néanmoins dire quelques mots des méthodes de répartition proportionnelle, dont celle qui consiste à répartir les coûts proportionnellement à la longueur des conduits attribués aux usagers. On verra que cette façon de faire ne peut pas être assimilée à la règle des coûts moyens et qu'elle n'en possède pas les propriétés. On présente ensuite, de façon succincte, la règle Shapley-Shubik et celle de répartition séquentielle. Finalement, on revient sur les propriétés de ces méthodes.

6.4.1 Les méthodes de répartition proportionnelle

De manière assez générale, ces méthodes consistent à exiger une contribution de base xb_i de l'usager i et à répartir le résidu du coût total du projet, une fois soustraites les contributions de base, entre tous les usagers, proportionnellement aux valeurs d'une certaine variable t_i. La formule générale prend donc la forme :

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j \right) \tag{6.1}$$

Il est à noter que le résidu $C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j$ peut être positif ou négatif.

Par le choix des xb_i et des t_i, on peut obtenir autant de règles que l'on veut. En posant $xb_i = 0$ et $t_i = 1$ pour tout i, ce sont les coûts totaux qui sont répartis de façon égalitaire entre les usagers :

$$x_i = \frac{1}{n} C(Q)$$

La règle des coûts moyens

Il s'agit sans doute de la méthode la plus répandue et la plus simple. Elle s'applique à la classe générale de problèmes où les demandes sont homogènes et unidimensionnelles. Dans ces problèmes, les demandes individuelles sont représentées par des nombres non-négatifs q_i et la demande globale est la somme des demandes individuelles. Autrement dit, la fonction de coût est de la forme $C(Q) = c\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right)$. La règle des coûts moyens consiste à répartir les coûts totaux proportionnellement aux quantités demandées. De façon équivalente, elle consiste à faire payer à chaque usager un montant qui est le produit de sa demande et du coût moyen, d'où son nom. Cette méthode est définie formellement par :

$$x_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^{n} q_j} C(Q) = q_i \frac{c\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right)}{\sum_{j=1}^{n} q_j} \tag{6.2}$$

Il s'agit clairement d'un cas particulier de la formule (6.1).

Répartition selon la longueur des conduits

Il s'agit de définir t_i dans la formule (6.1) comme étant la longueur totale des conduits exigés par les différents usagers. Dans le cadre de l'exemple, ces nombres sont facilement calculés à partir du Tableau 6.1. Cette méthode donne la répartition suivante :

	G	M	P	Total
x	236 148.39	78 716.13	33 735.48	348 600.00
%	68	23	10	100

Les propriétés des méthodes de répartition proportionnelle

La **règle des coûts moyens** a des propriétés intéressantes. Elle satisfait nommément aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents (INP)
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
- Proportionnalité (PR)
- Séparation entre usagers (SE)
- Cohérence (CH)

On sait également qu'elle est la seule à satisfaire à la fois aux propriétés d'additivité, de cohérence, de proportionnalité et de traitement égalitaire des équivalents (les égaux dans ce cas-ci). En prime, on obtient la monotonie par rapport aux coûts. En fait, on sait qu'elle est la seule à satisfaire à la fois à la proportionnalité et à la monotonie par rapport aux coûts.

Malheureusement, cette règle est définie uniquement dans le cas où les demandes sont unidimensionnelles, c'est-à-dire s'expriment par un seul nombre. Ce n'est évidemment pas le cas dans le problème traité ici. Dans ce contexte plus général, les méthodes de répartition proportionnelle ont généralement peu de propriétés intéressantes. C'est le cas de la méthode qui consiste à partager les coûts selon la **longueur des conduits** attribués. Elle ne satisfait qu'aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents (INP)
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Cohérence (CH)

Elle ne satisfait pas à (RG) et à (TE) parce qu'un usager peut avoir un CS plus élevé qu'un autre même si la longueur totale des conduits qu'il demande peut être moindre. La longueur des conduits n'est en effet pas la seule variable qui détermine les coûts. Elle ne satisfait pas à (MCN) parce qu'une augmentation de la demande de la part d'un usager qui fait augmenter le coût total va entraîner un accroissement de la contribution exigée de chacun, même s'il y a économies d'échelle. Elle ne satisfait pas à (PA) et à (CO) parce qu'on peut exiger plus d'un usager que son CS. En effet, la présence d'usagers avec de fortes exigences peut faire en sorte que la contribution exigée des petits est plus élevée que leurs CS.[5] Elle ne satisfait pas à (PR) parce que la répartition est proportionnelle à la longueur totale des conduits alors que les coûts pourraient être proportionnels à d'autres éléments de la demande. (SE) impliquant (PR), elle ne satisfait donc pas à (SE). Plus directement, dans le cas où le coût total est la somme des CS, les contributions ne sont pas nécessairement égales aux CS dans la mesure où les rapports entre les CS ne sont pas nécessairement égaux aux rapports entre les longueurs des conduits demandés.

6.4.2 La règle Shapley-Shubik

On peut résumer brièvement cette règle de la manière suivante. Supposons qu'on ordonne les usagers d'une certaine façon et qu'on fasse payer au premier le coût entier de ses besoins, en supposant qu'il est seul, et ensuite au deuxième le coût additionnel (incrémental) imposé par ses besoins, en supposant que lui et le premier usager sont seuls, et ainsi de suite. On répartirait alors le coût total de tous les besoins. Une telle répartition est dite *répartition selon les coûts incrémentaux.* Elle correspond à un arrangement donné des usagers, c'est-à-dire à l'ordre dans lequel on les choisit.

Certains usagers pourraient évidemment se plaindre de l'ordre choisi. Entre autres, le premier usager devrait encourir des coûts importants liés à l'excavation, la réfection, etc., alors que le dernier se verrait imputer des coûts minimes, par exemple le simple coût de ses conduits. Shapley (1953) a apporté une réponse élégante à ce problème. Elle consiste à considérer tous les ordres possibles entre les usagers et à prendre comme répartition finale la moyenne des répartitions selon les coûts incrémentaux, la moyenne étant calculée par rapport aux ordres d'entrée. Les usagers se voient ainsi tous traités de façon symétrique.

[5] Cela peut expliquer en partie les contestations dont cette méthode est l'objet.

La formule précise

Restons, pour le moment, dans le contexte où il n'y a que trois usagers, repérés pas les indices 1, 2 et 3. Définissons $\hat{c}(\{1\})$ comme le coût de satisfaire la demande de l'usager 1, c'est-à-dire de construire uniquement pour lui. Définissons ensuite $\hat{c}(\{1,2\})$ comme le coût de satisfaire conjointement à la demande des usagers 1 et 2, en excluant 3. Le coût de desservir les trois usagers ensemble est donné par $\hat{c}(\{1,2,3\})$. Si l'ordre d'entrée est $1,2,3$, la répartition selon les coûts incrémentaux donne les contributions suivantes pour les trois usagers : $\hat{c}(\{1\})$ pour le premier, $\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{1\})$ pour le deuxième et $\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{1,2\})$ pour le troisième. Si l'ordre d'entrée est $2,3,1$, ces contributions sont plutôt : $\hat{c}(\{2\})$ pour l'usager 2, $\hat{c}(\{2,3\}) - \hat{c}(\{2\})$ pour l'usager 3 et $\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{2,3\})$ pour l'usager 1.

Avec trois usagers, il y a six ordres possibles entre les usagers, représentés par autant de listes, soit :

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,1,2),\ (2,3,1),\ (3,2,1)$$

Dans ces six ordres, l'usager 1 arrive en premier une fois sur 3, en deuxième (après l'usager 2) une fois sur six, encore en deuxième mais après l'usager 3 une fois sur six et en troisième une fois sur trois, l'ordre entre les deux autres usagers n'ayant alors aucune importance. On peut en dire autant des usagers 2 et 3. La règle Shapley-Shubik, consistant à faire la moyenne des répartitions selon les coûts incrémentaux, donne donc la répartition :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{1\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{2\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,3\}) - \hat{c}(\{3\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{2,3\})\right] \\
x_2 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{2\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{1\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{2,3\}) - \hat{c}(\{3\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{1,3\})\right] \\
x_3 &= \tfrac{1}{3}\hat{c}(\{3\}) + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,3\}) - \hat{c}(\{1\})\right] + \tfrac{1}{6}\left[\hat{c}(\{2,3\}) - \hat{c}(\{2\})\right] + \tfrac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{1,2\})\right]
\end{aligned}$$

Cette méthode peut-être généralisée à un nombre quelconque d'usagers. Comme variante, on peut considérer que certains usagers ont une stature telle que les ordres d'entrée dans le consortium ne sont pas tous considérés. Certains usagers devraient en faire partie avant même que d'autres puissent joindre le consortium, ce qui peut permettre de représenter leur pouvoir de négociation respectif. On peut alors modifier la méthode Shapley-Shubik en conséquence. On peut aussi appliquer cette méthode à la répartition des bénéfices tirés de la coopération plutôt qu'aux coûts. Les résultats ne seraient pas nécessairement les mêmes.

Finalement, s'il y a un coût fixe, on peut le traiter de deux façons. La première consiste à l'inclure dans chacun des $\hat{c}(\cdot)$, ce qui revient à le répartir de façon égalitaire entre tous les usagers. C'est le traitement adopté dans l'exemple qui suit. La deuxième consiste à appliquer la méthode Shapley-Shubik aux coûts variables uniquement et à répartir le coût fixe selon une règle quelconque, par exemple proportionnellement à la répartition des coûts variables.

Exemple 6.1 Les valeurs de la fonction $\widehat{c}$ incluant le coût fixe, pour l'exemple de réseau sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} \hat{c}\left(\{G\}\right) = 269\,000, & \hat{c}\left(\{M\}\right) = 204\,600, & \hat{c}\left(\{P\}\right) = 188\,600, \\ \hat{c}\left(\{G, M\}\right) = 340\,200, & \hat{c}\left(\{G, P\}\right) = 321\,800, & \hat{c}\left(\{M, P\}\right) = 240\,400, \\ & \hat{c}\left(\{G, M, P\}\right) = 348\,600 & \end{array}$$

La première rangée donne les coûts de faire cavalier seul et la deuxième ceux de se mettre deux à deux. Le coût d'un réseau capable de satisfaire à toutes les demandes est celui de la dernière rangée. À noter que, quand P est seul, on installe uniquement des conduits de 1 pouce. Si P et M se mettent ensemble, on installe des conduits de 3 pouces, etc. Appliquée à ces données, la méthode Shapley-Shubik donne la répartition qui suit :

	G	M	P	Total
x	170 533.33	97 633.33	80 433.33	348 600.00
%	49	28	23	100

Les propriétés de la règle Shapley-Shubik

On sait que la règle Shapley-Shubik satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux usagers négligeables (IEN)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre usagers (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

On sait aussi que la méthode Shapley-Shubik est la seule à satisfaire à (AD), (IEN), (S)[6] et (O) ou encore qu'elle est la seule à satisfaire à (AD), (IEN), (S), (IU) et (MD). Par contre, la méthode Shapley-Shubik viole la préservation des rangs, le traitement égalitaire des équivalents et l'invariance par rapport aux plus grandes demandes. Si on tient à ces propriétés, c'est du côté de la répartition séquentielle qu'il faut se tourner.

6.4.3 La répartition séquentielle

Avec la répartition séquentielle, les usagers sont ordonnés selon l'ampleur de leur demande. Tous les usagers se voient ensuite imputer une part égale du coût d'un projet ou d'une capacité tout juste suffisante pour répondre à des besoins identiques au plus petit des besoins exprimés. Le plus petit des usagers n'a rien d'autre à payer. Les autres usagers se voient imputer, en plus, une part égale de l'accroissement de coût qu'entraînerait un accroissement de capacité suffisant pour répondre à des demandes de leur part qui seraient toutes égales à celle du deuxième plus petit usager. Ce dernier n'a rien d'autre à payer par la suite. On continue ainsi à imputer, de façon itérative, les coûts incrémentaux associés aux accroissements de capacité nécessités par des demandes de plus en plus grandes.

Par construction, les plus petits usagers sont à l'abri de l'ampleur de la demande des gros, pour le meilleur et le pire. Ils ne vont pas payer pour des demandes dont ils ne sont pas responsables mais, dans un contexte d'économies d'échelle, ils ne vont pas profiter non plus des externalités amenées par ceux qui ont des demandes plus grandes.

Cas des demandes unidimensionnelles et homogènes

On présente d'abord cette méthode pour les demandes unidimensionnelles et homogènes. Supposons qu'il y a n usagers et que leurs demandes soient données par des nombres $q_1, \ldots, q_n$. La demande de l'ensemble des usagers est donc donnée par la liste $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ et la demande totale par $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$. Supposons $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n$.

La méthode de répartition séquentielle fait intervenir des demandes intermédiaires définies par les listes $Q^1 = (q_1, \ldots, q_1)$, $Q^2 = (q_1, q_2, \ldots, q_2)$, $Q^3 = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_3)$, $\ldots$, $Q^{n-1} = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}, q_{n-1})$. Dans la première de ces listes, les demandes des usagers 2 à n sont ramenées au niveau de celle de l'usager 1. Dans la deuxième, les demandes des usagers 3 à n sont ramenées au niveau de celle de l'usager 2 et ainsi

[6] La symmétrie (S) est une propriété plus forte que le traitement égalitaire des demandes identiques mais plus faible que le traitement égalitaire des demandes équivalentes. Voir le chapitre 3.

de suite. La répartition séquentielle consiste à répartir $C\left(Q^1\right)$ de façon égalitaire entre tous les usagers. Les usagers 2 à n doivent ensuite se partager le coût supplémentaire $C\left(Q^2\right) - C\left(Q^1\right)$. De façon similaire, les usagers 3 à n doivent se partager le coût supplémentaire $C\left(Q^3\right) - C\left(Q^2\right)$ et ainsi de suite jusqu'au dernier usager, qui doit payer en plus le coût supplémentaire $C(Q) - C\left(Q^{n-1}\right)$.

En résumé, la répartition séquentielle est définie par :

$$\left.\begin{aligned}
x_1(Q,C) &= \frac{C\left(Q^1\right)}{n} \\
x_2(Q,C) &= x_1(Q,C) + \frac{C\left(Q^2\right) - C\left(Q^1\right)}{n-1} \\
x_3(Q,C) &= x_2(Q,C) + \frac{C\left(Q^3\right) - C\left(Q^2\right)}{n-2} \\
&\vdots \\
x_n(Q,C) &= x_{n-1}(Q,C) + C(Q) - C\left(Q^{n-1}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

On peut vérifier que : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C(Q)$. De plus $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. À noter que, s'il y a un coût fixe, cette méthode le répartit de façon égalitaire entre tous les usagers puisqu'il est compris dans $C\left(Q^1\right)$.

Cas des demandes multidimensionnelles ou hétérogènes

La répartition séquentielle des coûts exige la construction de demandes intermédiaires. Pour ce faire, les plus grandes demandes sont initialement réduites à un niveau équivalent aux plus petites. Avec des demandes unidimensionnelles et homogènes, cela ne pose pas de problème. Il en va différemment avec des demandes multidimensionnelles ou hétérogènes. Avec la règle séquentielle radiale décrite dans le chapitre 2, on construit ces demandes intermédiaires en réduisant les quantités demandées de façon proportionnelle, c'est-à-dire le long d'un rayon, d'où le nom «radiale» donné à la règle. Appliquer cette règle telle quelle dans le présent contexte pourrait mener à des demandes intermédiaires comportant des fractions de conduits, ce qui n'aurait pas beaucoup de sens.

Une autre façon de faire, qui semble toute naturelle ici, est de ramener les demandes des plus gros usagers au niveau de celle des plus petits, tant en dimension qu'en nombre.[7] Considérons le problème qui consiste à répartir le coût de la section 4 du réseau, en négligeant le coût fixe. La demande sur cette section est exprimée par la liste $Q = (8,4,1)$. Les usagers doivent donc être considérés dans l'ordre P, M, G. La première étape de la répartition séquentielle requiert la construction des demandes intermédiaires. Ici, la demande de chaque usager est décrite par un seul nombre mais ces demandes portent sur des conduits de tailles différentes, ce dont il faut tenir compte dans la construction des demandes intermédiaires.[8]

Dans l'esprit de la méthode séquentielle, on construit la première demande intermédiaire en ramenant les demandes des usagers M et G au niveau de celle de P, en dimension autant qu'en nombre. Autrement dit, on suppose que tous les usagers demandent un conduit de 1 pouce. La première demande intermédiaire est donc donnée par $Q^1 = (0,0,3)$. Pour la deuxième demande intermédiaire, on suppose que G a une demande identique à celle de M, ce qui donne deux demandes de 4 conduits de 3 pouces, en plus de la demande pour un conduit de 1 pouce de la part de P. La deuxième demande intermédiaire est donc $Q^2 = (0,8,1)$. Les coûts de ces deux demandes intermédiaires et de la demande globale sont : $C(0,0,3) = 63\,600$, $C(0,8,1) = 85\,200$ et $C(8,4,1) = 112\,000$.

Il s'agit ensuite d'appliquer la formule (6.3) à ces coûts, en se souvenant que 1 est P, 2 est M et 3 est G. Chaque usager se voit d'abord imputer le tiers de 63 600. Pour P, il s'agit de sa contribution totale. G et M doivent ensuite se partager, en parts égales, la différence entre 85 200 et 63 600. Finalement, G doit payer à lui seul l'écart entre 112 000 et 85 200. On obtient ainsi la répartition :

	G	M	P	Total
x	58 800	32 000,	21 200	112 000
%	52	28	19	100

Par comparaison, la règle des coûts moyens, c'est-à-dire la répartition de ces mêmes coûts proportionnellement aux demandes, exprimées en nombre ou en longueur totale de conduits, donne :

[7] Formellement, on réduit les demandes le long d'un sentier plutôt que d'un rayon, pour obtenir les demandes intermédiaires. Cette approche a en fait un fondement théorique. Elle s'inspire des travaux de Téjédo et Truchon (2002). On la décrit brièvement dans l'annexe 6.A.2.

[8] On peut appliquer le principe qui va suivre à des demandes individuelles portant sur plusieurs types de conduits.

	G	M	P	Total
x	68 923.10	34 461.50	8 615.38	112 000
%	61	31	8	100

La répartition séquentielle augmente la part de P de façon significative par rapport à la règle des coûts moyens. La raison est la suivante. Il y a un coût important dans la construction d'un massif de conduits qui est indépendant du nombre de conduits, soit 150$ le mètre. Avec la règle séquentielle, ce coût est réparti en parts égales entre les trois usagers, ce qui peut très bien se défendre en termes d'équité. Avec la répartition proportionnelle aux demandes, P s'en tire évidemment mieux dans la mesure où il n'a qu'un conduit sur 13 dans cette section.

On peut ensuite répliquer la méthode qui vient d'être décrite à chacune des sections du réseau et à répartir le coût fixe en parts égales entre les usagers, conformément à l'esprit de la répartition séquentielle. À noter que l'ordre entre les usagers peut varier selon les sections et que les usagers ne vont pas participer au financement des sections où ils ne sont pas présents. Donc, G va devoir assumer seul le coût de la section 1, G et M vont se partager le coût de la section 2, M et P celui de la section 3, G et P celui de la section 5. Le Tableau 6.3 donne le détail de cette répartition.

Section	G	M	P	Total
1	31 000	0	0	31 000
2	40 800	19 200	0	60 000
3	0	27 300	24 300	51 600
4	58 800	32 000	21 200	112 000
5	28 400	0	15 600	44 000
Coût fixe	16 666.67	16 666.67	16 666.67	50 000
Total (x)	175 666.67	95 166.67	77 766.67	348 600
%	50	27	22	100

Tableau 6.3 – Répartition séquentielle des coûts du réseau

Les propriétés de la répartition séquentielle

La méthode de répartition séquentielle ainsi définie satisfait aux propriétés suivantes :

– Préservation des rangs (RG)

- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Principe séquentiel radial (PSR)[9]
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents (INP)
- Monotonie par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MDR)
- Monotonie croisée négative par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MCNR), s'il y a économies d'échelle[10]
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre usagers (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Cohérence faible (CHF)

On peut également garantir un majorant aux contributions des usagers. Cette méthode est aussi la seule à satisfaire au traitement égalitaire des demandes équivalentes et au principe séquentiel le long des sentiers définis dans l'annexe 6.A.2. Il faut par contre oublier l'additivité dans le cas des demandes multidimensionnelles ou hétérogènes.

6.4.4 Une vue synoptique des propriétés

Dans le Tableau 6.4, on indique quelles méthodes de répartition traitées dans ce chapitre, y compris la répartition selon la longueur des conduits, satisfont aux différentes propriétés énoncées dans la section 6.3. Un «O» indique que la méthode de la rangée correspondante satisfait à la propriété en question, un «S» qu'elle satisfait à la propriété le long des sentiers définis dans l'annexe 6.A.2, un «Q» qu'elle satisfait à la propriété en présence d'économies d'échelle, et un «N» que la propriété n'est pas satisfaite, c'est-à-dire qu'il existe des contextes ou problèmes dans lesquels elle est violée. Dans certains cas, on indique le nom d'une propriété plus faible ou apparentée qui est vérifiée en lieu de la condition proprement dite.

[9] En plus de satisfaire au principe séquentiel radial, la forme particulière de la règle séquentielle utilisée ici satisfait au principe séquentiel le long des sentiers définis dans l'annexe 6.A.2. Ainsi, partant de la demande intermédiaire $(0, 0, 3)$, si M accroît sa demande de un conduit de 1 pouce pour deux de 1 pouce ou pour un de 3 pouces, cela ne va pas affecter la contribution de P.

[10] Comme pour le principe séquentiel, elle satisfait également à la monotonie et à la montonie croisée négative le long des sentiers définis dans l'annexe 6.A.2.

La propriété (IDN) n'apparaît pas dans ce tableau parce qu'elle est satisfaite par toutes les méthodes, sauf la répartition égalitaire. D'autres propriétés n'y apparaissent pas non plus parce qu'elles sont apparentées à d'autres qui s'y trouvent.

Le tableau est séparé horizontalement en deux parties. La partie supérieure concerne deux règles qui ne peuvent être utilisées qu'avec des demandes portant sur un bien privé homogène alors que les règles de la partie inférieure peuvent être appliquées à un contexte très général, comme c'est le cas d'un réseau souterrain.

Le tableau est également séparé verticalement en deux parties. La partie de gauche regroupe les conditions de type normatif et la partie de droite celles de type cohérence. La distinction entre les deux est cependant parfois ténue, comme on a pu le voir.

Rappelons les abréviations des propriétés :

RG : préservation des rangs
TE : traitement égalitaire des équivalents
PS : principe séquentiel
PSR : principe séquentiel radial
IDN : insensibilité des contributions aux demandes nulles
IEN : insensibilité des contributions aux usagers négligeables
GR : gratuité pour des demandes identiques de coût nul
INP : insensibilité du classement des contributions aux usagers non pertinents
MCT : monotonie par rapport aux coûts
MD : monotonie par rapport à la demande
MCN : monotonie croisée négative par rapport à la demande
MCP : monotonie croisée positive par rapport à la demande
PA : participation
APA : anti-participation
CO : test du coeur ou absence d'inter-financement
ACO : test de l'anti-coeur
IU : invariance par rapport aux unités de mesure
O : ordinalité
OR : ordinalité radiale
SE : séparation entre usagers
PR : proportionnalité
AD : additivité
IDC : Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs
CH : cohérence
CHF : cohérence faible

	RG	TE	PS	IEN	INP	MCT	MD	MCN	PA	CO	SE	O	AD	CH
coûts moyens	O	O	N	O	O	O	O	Q	Q	Q	O	N	O	O
séquentielle originale	O	O	O	O	O	N	O	Q	Q	Q	O	O	O	CHF
égalitaire	O	O	N	N	O	O	O	N	N	N	N	O	O	O
longueur	N	N	N	N	O	O	O	N	N	N	N	N	N	O
Shapley-Shubik	N	N	N	O	N	N	O	Q	Q	Q	O	O	O	N
séquentielle radiale	O	O	S	N	O	N	S	SQ	Q	Q	O	R	N	N

Tableau 6.4 – Les propriétés satisfaites par les méthodes

Plusieurs méthodes peuvent satisfaire à une propriété prise isolément. Généralement, on va rechercher des méthodes qui satisfont à plusieurs propriétés à la fois. Idéalement, on aimerait que le plus grand nombre de ces propriétés voire toutes soient satisfaites. Malheureusement, certaines propriétés peuvent être incompatibles entre elles. Un certain nombre de propositions sont démontrées dans la littérature économique à ce sujet. D'autres propositions affirment que telle et telle propriété est satisfaite par telle ou telle méthode. D'autres enfin établissent qu'il y a une seule méthode qui satisfait simultanément à un ensemble donné de propriétés. On a énoncé un certain nombre de ces propositions dans le chapitre 3.

Ainsi, dans le cas des demandes unidimensionnelles et homogènes, il n'y a que la règle des coûts moyens pour satisfaire à la fois aux propriétés d'additivité, de cohérence, de proportionnalité et de traitement égalitaire des équivalents (les égaux dans ce cas-ci). En prime, on obtient la monotonie par rapport aux coûts. En fait, on sait qu'elle est la seule à satisfaire à la fois à la proportionnalité et à la monotonie par rapport aux coûts.

Toujours dans un contexte unidimensionnel, la méthode de répartition séquentielle est la seule à satisfaire à la fois à la préservation des rangs, à la gratuité pour des demandes identiques de coût nul, à la proportionnalité et à l'additivité. Cette dernière méthode satisfait également à la préservation des rangs, à la monotonie par rapport à la demande et au principe séquentiel. Elle est en fait caractérisée par ce dernier principe et le traitement égalitaire des égaux.

Dans le cas des demandes multidimensionnelles, la règle séquentielle définie dans l'annexe 6.A.2 est la seule à satisfaire à la fois au principe séquentiel le long des sentiers de modification de la demande et au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Par contre, il faut oublier l'insensibilité des contributions aux usagers négligeables, l'additivité et même l'insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs.

Si on veut avoir l'additivité, l'insensibilité des contributions aux usagers négligeables, la symétrie, l'invariance par rapport aux unités de mesure et la monotonie par rapport à la demande, c'est vers la règle Shapley-Shubik qu'il faut se tourner. Cette méthode est la seule à satisfaire à toutes ces propriétés à la fois. On peut même retrancher la monotonie par rapport à la demande de cette liste et remplacer l'invariance par rapport aux unités de mesure par l'ordinalité pour obtenir une autre caractérisation de la méthode Shapley-Shubik.

Ces propositions sont résumées dans le Tableau 6.5. Chaque rangée indique un ensemble de propriétés, marquées d'un «X», que la méthode est la seule à satisfaire simultanément.

	RG	TE	S	PS	IEN	GR	MCT	MD	PR	IU	O	AD	CH
coûts moyens							X		X				
coûts moyens		X							X			X	X
séquentielle originale		X		X									
séquentielle originale	X					X			X			X	
Shapley-Shubik			X		X						X	X	
Shapley-Shubik			X		X			X		X		X	
séquentielle radiale		X		S									

Tableau 6.5 – Caractérisations des méthodes

6.4.5 Propriétés et choix d'une méthode

La règle des coûts moyens est d'un usage très répandu dans les contextes unidimensionnels, c'est-à-dire lorsque les demandes des entités s'expriment par un seul nombre et que ces demandes peuvent être sommées pour donner la demande globale. Cette popularité s'explique sans doute pas la simplicité de cette règle. Elle peut se justifier également par ses nombreuses propriétés. Elle satisfait en effet à la plupart de celles qui sont recensées dans cet ouvrage. Une exception notable est le principe séquentiel, qui rend les contributions des plus petites entités indépendantes de l'ampleur des demandes des plus grosses.

Pour les situations où l'impact des plus grosses demandes sur les contributions des plus petites entités est une préoccupation importante, la règle de répartition séquentielle est toute indiquée puisqu'elle satisfait au principe séquentiel. En fait, c'est la seule à satisfaire à ce principe en même temps qu'au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Elle satisfait également à toutes les autres propriétés de la règle des coûts moyens, à l'exception de la monotonie par rapport aux coûts. De plus, elle peut être étendue à des contextes où les demandes sont hétérogènes ou multidimensionnelles. Elle conserve la plupart de ses propriétés dans ces contextes, bien que parfois sous une forme plus faible. La seule perte notable est l'additivité (AD) et l'insensibilité des contributions à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC). Ces dernières sont intéressantes parce qu'il arrive souvent qu'on souhaite faire la répartition des coûts composante par composante. Par exemple, on peut vouloir répartir les coûts de capital séparément des frais d'exploitation. L'additivité garantit que, peu importe qu'il y ait décomposition des coûts ou non et peu importe la façon de les décomposer, la répartition totale est la même. Si on sait que la méthode utilisée satisfait à cette propriété, on conviendra facilement qu'il est inutile de consacrer beaucoup d'énergie à la décomposition des coûts.

Dans le même ordre d'idée, on peut souhaiter imputer directement aux entités les coûts qui leur sont spécifiques et réserver l'utilisation d'une règle de répartition aux coûts qui sont véritablement communs. La distinction entre les deux n'étant pas toujours claire, on peut consacrer beaucoup d'efforts pour arriver à établir une telle décomposition des coûts, à la satisfaction de toutes les entités. L'intérêt d'une règle qui satisfait à (IDC) est précisément qu'elle dispense de cet effort parce que, en fin de compte, les résultats seront les mêmes, peu importe la décomposition adoptée.

Si les propriétés (AD) et (IDC) s'avèrent importantes, il faut oublier la règle séquentielle et se tourner plutôt vers les règles issues de la théorie des jeux coopératifs. Parmi ces dernières, celle de Shapley-Shubik est certainement la plus facile à justifier et à utiliser. Avec cette dernière, on retrouve (AD) et (IDC). On gagne également l'insensibilité des contributions aux entités négligeables mais on doit sacrifier la préservation des rangs, le traitement égalitaire des demandes équivalentes, le principe séquentiel et l'insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes.

Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, on ne peut donc tout avoir. Il y a des choix à faire et ces choix impliquent des coûts en termes des propriétés sacrifiées et de données requises. Les Tableaux 6.4 et 6.5, dont on trouve des versions plus complètes dans le chapitre 3, se veulent des outils pour aider les gestionnaires à faire un choix éclairé.

6.4.6 Les données requises

La méthode Shapley-Shubik et la méthode de répartition séquentielle exigent non seulement les coûts de satisfaire à la demande exprimée mais également les coûts de demandes partielles ou hypothétiques, comme celles de sous-groupes d'usagers ou celles d'usagers ayant des demandes identiques à celles du plus petit, du deuxième plus petit, etc.

La méthode de répartition séquentielle est sans doute moins onéreuse à appliquer. Avec n usagers, elle nécessite la construction de n demandes intermédiaires ou globale et l'estimation du coût théorique de ces demandes. En comparaison, la méthode Shapley-Shubik exige l'estimation du coût des demandes de $2^n - 1$ sous-ensembles d'usagers. Ce dernier nombre croit assez rapidement. Il est égal à successivement $3, 7, 15, 31, 63, 127, 255$ lorsque n croit de 2 à 8. Si on dispose d'une formule mathématique pour l'estimation du coût de n'importe quelle demande, comme pour l'exemple de ce chapitre, ces nombres ne posent cependant pas de problème en soi.

Il faut dire aussi que, dans la mesure où plusieurs usagers sont pratiquement identiques ou du moins assez semblables, il n'est peut-être pas nécessaire de tous les distinguer. On peut très bien fonctionner avec des catégories d'usagers. La méthode retenue servirait à répartir les coûts entre ces catégories. Une méthode plus simple ou la même méthode peut ensuite être utilisée pour répartir le coût imputé à une catégorie entre ses membres. Pour la même raison, il ne serait pas nécessaire de refaire tous les calculs à chaque fois qu'arrive un nouvel usager ou une nouvelle demande. Il ou elle peut tout simplement être traité à l'intérieur d'une catégorie.

6.5 Conclusion et recommandation

Cette étude de la problématique de la répartition des coûts d'un réseau de conduits souterrain nous amène à retenir deux méthodes comme étant particulièrement intéressantes : la règle Shapley-Shubik et la méthode de répartition séquentielle. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces méthodes serait de nature à atténuer les conflits entre les usagers des réseaux souterrains.

La règle Shapley-Shubik possède plusieurs propriétés d'intérêt dans ce contexte. De plus, on peut voir le mode de répartition qu'elle donne comme celui qui pourrait résulter de la négociation entre les usagers. Biddle et Steinberg (1985, p. 42) en parle comme d'un « costless surrogate for the allocation that would be obtained through bargaining ». En effet, il arrive souvent que de nouveaux venus dans un réseau prétendent qu'ils ne devraient pas payer plus que le coût incrémental qu'ils imposent à l'ensemble des usagers, sous prétexte que ceux qui sont déjà présents dans le réseau ne devraient pas profiter de leur arrivée. À l'inverse, les usagers déjà en place ne voient pas pourquoi les nouveaux venus profiteraient ainsi des investissements qu'eux ont dû assumer pour la construction du réseau. Au fond, dans ce genre de problème, chacun aimerait bien être celui qui arrive en dernier. C'est précisément à la résolution de ce genre de conflit que s'adresse la règle Shapley-Shubik.

D'un esprit différent, la méthode de répartition séquentielle nous apparaît encore plus intéressante dans le présent contexte. Parmi ses propriétés, on note l'invariance des contributions par rapport à l'ampleur des plus grosses demandes (le principe séquentiel). Elle est donc à l'abri des plaintes des petits usagers quant aux coûts que leur imposent les plus gros par leur exigences particulières. À l'inverse, ces petits usagers ne bénéficieraient pas des économies d'échelle qu'entraîne la présence de ces gros usagers de par le nombre de conduits en parallèle ou des autres équipements qu'ils requièrent. Cette méthode est donc peut-être la plus susceptible de solutionner les litiges potentiels entre les usagers d'un réseau souterrain.

6.A Annexes

6.A.1 Le coeur (noyau)

Le coeur est un concept issu de la théorie des jeux coopératifs. C'est un ensemble de répartitions des coûts qu'aucune coalition ou sous-ensemble d'usagers ne va contester sous prétexte qu'elles imputent à ses membres des sommes plus élevées, au total, que le coût auquel elle serait capable de fonctionner seule. Plus précisément, c'est l'ensemble des répartitions $(x_1, \ldots, x_n)$ qui satisfont :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\leq \hat{c}(S), \text{ pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N \\ \sum_{i \in N} x_i &= \hat{c}(N) \end{aligned}$$

La première condition qui précède dit : quelle que soit la coalition S de N, la somme des coûts attribués aux membres de cette coalition ne peut dépasser le coût total $\hat{c}(S)$ auquel cette coalition est capable de fonctionner, sans les autres. La fonction $\hat{c}$ a été définie de façon précise à la sous-section 6.4.2. La deuxième condition stipule que la somme des coûts attribués à tous les membres, ceux de la grande coalition N, doit couvrir exactement le coût total de desservir l'ensemble de la demande. Cela laisse supposer que c'est la grande coalition qui va se former.

On peut le définir, de façon équivalente, comme l'ensemble des répartitions $(x_1, \ldots, x_n)$ qui satisfont :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\geq \hat{c}(N) - \hat{c}(N \backslash S), \text{ pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N \\ \sum_{i \in N} x_i &= \hat{c}(N) \end{aligned}$$

Sous cette forme, chaque coalition se voit imputer un montant au moins aussi élevé que le coût supplémentaire qu'elle impose à la coalition complémentaire $N \backslash S$ lorsqu'elle la rejoint pour former la grande coalition N. Si ce n'était pas le cas, cette dernière se trouverait à verser un subside aux membres de la coalition S, d'où une possible objection de sa part.

Dans ce chapitre, on voit l'*appartenance au coeur* comme une propriété désirable des règles de répartition de coûts. On l'a aussi appelée *robustesse à la sécession* ou *absence d'inter-financement*. Une répartition peut être ou non dans le coeur. Le fait d'appartenir au coeur confère à une répartition donnée un caractère de crédibilité non négligeable.

Il se peut que les conditions qui définissent le coeur soient mutuellement incompatibles. Le coeur est alors vide. Il existe des conditions sur les fonctions de coût qui garantissent l'existence du coeur. Lorsqu'il existe, il peut par contre être très grand. La règle Shapley-Shubik donne des répartitions dans le coeur pour les problèmes concaves, c'est-à-dire ceux où les coûts incrémentaux de joindre un sous-ensemble d'usagers décroît à mesure que ce sous-ensemble augmente en taille. Autrement, l'appartenance au coeur n'est pas garantie par cette règle.

Exemple 6.2 Pour l'exemple de réseau, le coeur est défini par les contraintes suivantes :

$$\begin{array}{lll} x_G \leq 269\,000 & x_M \leq 204\,600 & x_P \leq 188\,600 \\ x_G + x_M \leq 340\,200 & x_G + x_P \leq 321\,800 & x_M + x_P \leq 240\,400 \\ & x_G + x_M + x_P = 348\,600 & \end{array}$$

Ainsi, avec une répartition qui appartient au coeur, les usagers G et P ne peuvent se voir imputer des montants supérieurs à respectivement 269 000 et 204 600 parce qu'elles peuvent fonctionner seules à ces coûts respectifs. De plus, elles ne peuvent se voir imputer des montants dont le total dépasserait 340 200 puisque, ensemble, elles pourraient répondre à leurs besoins pour un coût total de 340 200.

6.A.2 Sur la répartition séquentielle le long de sentiers

La répartition séquentielle des coûts exige que les plus grandes demandes soient initialement réduites à un niveau équivalent aux plus petites. Avec la règle séquentielle radiale, on réduit les quantités demandées de façon proportionnelle, c'est-à-dire le long d'un rayon, d'où le nom «radiale» donné à la règle. Téjédo et Truchon (2002), s'inspirant d'une suggestion de Koster et al. (1998), proposent une approche plus générale dans laquelle les demandes sont réduites le long d'un sentier quelconque plutôt que d'un rayon. Cela donne lieu à la répartition séquentielle le long de sentiers (Path Serial Rule). Avec cette règle, les sentiers à utiliser pour réduire la demande font partie de la définition du problème. Ces sentiers sont définis comme suit.

Pour chaque $i \in N$, Téjédo et Truchon considèrent une fonction $h_i : \mathbb{R}_+^{m_i+1} \to \mathbb{R}_+^{m_i}$ qui associe un $h_i(y,\tau) \in \mathbb{R}_+^{m_i}$ à chaque $y \in \mathbb{R}_+^{m_i}$ et $\tau \in \mathbb{R}_+$.[11] Ils supposent que $h_i(y,\cdot)$ n'est pas décroissante, qu'elle est croissante sans borne par rapport à une composante et que, pour chaque $y \in \mathbb{R}_+^{m_i}$, il existe un $\tau' \in \mathbb{R}_+$ (unique) tel que

[11] m_i est le nombre de paramètres servant à décrire la demande de i.

$h_i(y, \tau') = y$.Alors, $h_i(y, \mathbb{R}_+)$ est le sentier défini par $h_i(y, \cdot)$. Ce sentier passe par y. La classe des fonctions h_i ayant ces propriétés est dénotée $\mathcal{H}_i$.

Ils n'imposent pas que $h_i(y, 0) = 0$ et que $h_i(y, \cdot)$ soit continue et croissante dans toutes ses composantes. Par contre, étant donnée une fonction $C \in \mathbb{C}(m)$, ils se restreignent à la classe de fonctions $\mathcal{H}_i(c_i) \subset \mathcal{H}_i$ pour laquelle $c_i(h_i(y, \cdot))$ est continue et croissante, avec $c_i(h_i(y, 0)) = 0$. En fait, ils auraient pu laisser tomber l'hypothèse que $h_i(y, \cdot)$ n'est pas décroissante et ne conserver que $c_i(h_i(y, \cdot))$ est continue et croissante, avec $c_i(h_i(y, 0)) = 0$. Comme $c_i(0) = 0$ et que c_i est croissante, cette hypothèse implique que le coût de la demande au début du sentier est nul et croissant pas la suite. Cette définition de $\mathcal{H}_i(c_i)$ assure l'existence d'un τ_α unique tel que $c_i(h_i(y, \tau_\alpha)) = \alpha$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Soit $\mathcal{H}(C) = \mathcal{H}_1(c_1) \times \cdots \times \mathcal{H}_n(c_n)$, $H(Y, \tau) = (h_1(y_1, \tau_1), \ldots, h_n(y_n, \tau_n))$, $\mathbb{C}(m) \times \mathcal{H} = \{(C, H) : C \in \mathbb{C}(m) \text{ et } H \in \mathcal{H}(C)\}$. Dans ce contexte, un problème de partage de coûts est défini comme un triplet $(Q, C, H) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{C}(m) \times \mathcal{H}(C)$ et une règle de partage comme une fonction $\xi : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{C}(m) \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+^n$.

La répartition séquentielle le long des sentiers définis par les fonctions h_i se fait en «réduisant» les demandes le long des sentiers définis par les fonctions h_i. Plus précisément, on construit la première demande intermédiaire en prenant pour les entités ou usagers $i = 2, \ldots, n$, les demandes $h_i(y, \tau_i)$ telles que $c_i(h_i(y, \tau_i)) = c_1(q_1)$. On procède de façon similaire pour les autres demandes intermédiaires.

La règle de partage séquentiel définie dans ce chapitre tombe dans ce cadre. Pour le voir, convenons d'abord d'exprimer chaque demande q_i comme un élément de $\mathbb{R}_+^{m_i}$. Dans le cadre de l'exemple, il s'agit d'un triplet dont les composantes correspondent respectivement aux conduits de 4, 3 et 1 pouces. Étant donnée une demande $Q = (q_1, q_2, q_3)$ telle que $c_1(q_1) \leq c_2(q_2) \leq c_3(q_3)$, définissons, pour chaque $i \in N$ et pour $y \in \{q_1, q_2, q_3\}$, la fonction $h_i : \mathbb{R}_+^{3+1} \to \mathbb{R}_+^3$ par :

$$h_i(y, \tau) = \begin{cases} \tau q_1 & \text{si } 0 \leq \tau \leq 1 \\ (2 - \tau) q_1 + (\tau - 1) q_2 & \text{si } 1 < \tau \leq 2 \\ (3 - \tau) q_2 + (\tau - 2) q_3 & \text{si } 2 < \tau \leq 3 \\ (\tau - 3) q_3 & \text{si } 3 < \tau \end{cases}$$

Le sentier défini par cette fonction passe par les points $0, q_1, q_2, q_3$. Il s'agirait de compléter la définition de cette fonction pour $y \notin \{q_1, q_2, q_3\}$, c'est-à-dire de définir d'autres sentiers passant par les $y \notin \{q_1, q_2, q_3\}$, pour compléter la classe $\mathcal{H}(C)$ mais ces autres sentiers ne seraient pas utiles dans le présent contexte. On peut aussi généraliser la définition qui précède à un nombre quelconque d'usagers.

Avec cette définition des h_i, la fonction $c_i(h_i(y\cdot))$ est continue et strictement croissante. De plus, $h_i(y,0) = 0$, $h_i(y,1) = q_1$, $h_i(y,2) = q_2$ et $h_i(y,3) = q_3$. On a donc $c_2(h_2(q_2,1)) = c_2(q_1) = c_1(q_1)$, $c_3(h_3(q_3,1)) = c_1(q_1)$ et $c_3(h_3(q_3,2)) = c_2(q_2)$. En conséquence, la première demande intermédiaire est donnée par $Q^1 = (q_1,\ h_2(q_2,1),\ h_3(q_3,1)) = (q_1,q_1,q_1)$ et la deuxième par $Q^2 = (q_1,\ q_2,\ h_3(q_3,2)) = (q_1,q_2,q_2)$. Toutes leurs composantes sont entières dans la mesure où les demandes le sont. S'agissant du nombre de conduits, le contraire n'aurait pas de sens.

La règle définie dans ce chapitre est donc en fait celle de Téjédo et Truchon (2002) appliquée au problème (Q,C,H) où $H = (h_1,h_2,h_3)$, avec la fonction $h_i, i = 1,2,3$, définie plus haut. D'autres fonctions H donneraient le même résultat, nommément la fonction $H' = (h'_1,h'_2,h'_3)$ avec : $h'_1(q_1,\tau) = \tau q_1$:

$$h'_2(q_2,\tau) = \begin{cases} \tau q_1 & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \\ (2-\tau)\,q_1 + (\tau-1)\,q_2 & \text{si} \quad 1 < \tau \leq 2 \\ (\tau-2)\,q_2 & \text{si} \quad 2 < \tau \end{cases}$$

$$h'_3(q_3,\tau) = \begin{cases} \tau q_1 & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \\ (2-\tau)\,q_1 + (\tau-1)\,q_2 & \text{si} \quad 1 < \tau \leq 2 \\ (3-\tau)\,q_2 + (\tau-2)\,q_3 & \text{si} \quad 2 < \tau \leq 3 \\ (\tau-3)\,q_3 & \text{si} \quad 3 < \tau \end{cases}$$

Une autre possibilité consisterait à prendre des sentiers en escalier. Par exemple, pour $q_2 = (0,4,0)$, on peut envisager le sentier fait de segments joignant les points $(0,0,0), (0,0,1), (0,0,2), (0,2,0), (0,3,0), (0,4,0)$ ou tout autre sentier du genre passant par $q_1 = (0,0,1)$ pour rejoindre $(0,4,0)$. On peut de même définir un sentier passant par q_1 et q_2 pour rejoindre $q_3 = (8,0,0)$.

À noter que H et H', de même que ces autres sentiers en escalier, ont une justification naturelle dans le présent contexte. Respecter le principe séquentiel dans son esprit, c'est mettre les petits à l'abri de l'ampleur de la demande des plus gros. Or, cette ampleur, elle vient autant de la taille des conduits que de leur nombre. En réduisant les plus grosses demandes le long des sentiers qui viennent d'être définis, on met véritablement les petits à l'abri des plus gros. La répartition séquentielle le long de ces sentiers respectent le *principe séquentiel le long des sentiers*. C'est ce que montrent Téjédo et Truchon. Autrement dit, si un usager augmente sa demande le long des sentiers décrits par H ou H', cela n'affecte pas la contribution des usagers qui avaient initialement une demande inférieure, en termes de coûts, à celle de cet usager.

6.A.3 Sommaire des exemples

Répartition selon la longueur des conduits :

	G	M	P	Total
x	236 148.39	78 716.13	33 735.48	348 600.00
%	68	23	10	100

Répartition selon la règle Shapley-Shubik :

	G	M	P	Total
x	170 533.33	97 633.33	80 433.33	348 600.00
%	49	28	23	100

Répartition séquentielle :

	G	M	P	Total
x	175 666.67	95 166.67	77 766.67	348 600.00
%	50	27	22	100

Références

Biddle, G.C. et Steinberg, R., 1985. “Common Cost Allocation in the Firm,” in H.P. Young, ed., *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, North-Holland, 31-54.

Koster, M., Tijs, S., et Borm, P, 1998. “Serial Cost Sharing Methods for Multicommodity Situations,” *Mathematical Social Science*, 36, 229-242.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2002. “Serial Cost Sharing in Multidimensional Contexts,” *Mathematical Social Science*, 44, 277-299.

Chapitre 7

Partage des coûts dans l'entreprise et incitations

7.1 Introduction

De manière générale, la répartition des coûts communs et la tarification des infrastructures peuvent avoir des effets incitatifs sur les agents concernés. Ainsi, le simple fait d'expliciter les coûts et de demander aux agents ou partenaires de contribuer à leur couverture exige de la transparence et est susceptible de responsabiliser les agents ou partenaires. C'est là un premier impact du partage des coûts et de la tarification sur les incitations et, dans plusieurs cas, c'est peut-être l'impact le plus important.

Nous considérons dans ce chapitre trois contextes spécifiques particulièrement importants. Dans le premier, une entreprise avec plusieurs divisions peut vouloir mettre en place une méthodologie de répartition des coûts communs qui incite les chefs de division à contribuer à la minimisation ou du moins à la réduction des coûts communs. De la même manière, une alliance d'organismes (individus, entreprises, villes) peut vouloir faire en sorte que la méthode de répartition des coûts (périodiques ou non) d'activités communes ou d'un ouvrage ou projet commun incite chaque partenaire à réduire, par ses efforts et initiatives, sa contribution aux coûts en question. Pour ce faire, la méthode de répartition doit satisfaire à une condition de monotonie forte qu'on va définir plus loin. Comme on le verra, cette condition est cependant incompatible avec le test du coeur, qui garantit qu'aucune division ou coalition de divisions ne voudra faire sécession. Au sein d'une entreprise, cela n'est cependant pas un problème majeur dans la mesure où une telle menace ne serait pas crédible.

Le deuxième cas considéré dans ce chapitre est celui d'entreprise qui cherche à contrôler ou limiter les demandes formulées par les différentes divisions auprès de la direction générale (le centre) à celles qui vont contribuer le mieux à la réalisation des profits globaux de l'entreprise. Or, il arrive souvent que les responsables des divisions sont les seuls à connaître certains paramètres importants dans la détermination du programme de production optimal. La question est alors de savoir si on peut amener ces responsables à révéler correctement leur information privée, tout en réalisant l'objectif global de l'entreprise et en répartissant exactement le coût total des ressources demandées par les divisions entre ces dernières. On verra qu'il est parfois possible de faire révéler correctement l'information et de réaliser l'objectif global en sacrifiant souvent l'équilibre budgétaire.

Le troisième cas nous ramène au partage des coûts proprement dit, bien qu'il ne soit pas foncièrement différent du deuxième. Dans le chapitre 1, on insisté sur le fait que la définition même du concept de coût commun pouvait impliquer un processus d'optimisation. Or, il peut arriver que la solution de ce problème implique à nouveau un problème de révélation d'information, en l'occurrence les demandes des différentes divisions. On étudiera un problème où le coût minimal de satisfaire à une configuration de demandes des divisions implique une production centralisée d'une partie de cette demande et la délégation aux divisions de l'autre partie. Dans la mesure où le coût de la production centralisée doit être réparti entre les divisions, ces dernières peuvent avoir intérêt à tricher puisqu'elles peuvent combler elles-mêmes leurs besoins qui ne l'auront pas été par le centre. Si on prend le problème dans toute sa généralité, les possibilités de faire révéler correctement l'information privée, tout en réalisant l'objectif global de l'entreprise et en répartissant exactement le coût total de la production centralisée entre les divisions, sont également limitées. Cependant, on verra qu'il est possible d'y arriver dans certains contextes particuliers.

7.2 Partage des coûts et incitations à la performance

Comme l'a montré Shubik (1962), la répartition des coûts communs dans l'entreprise peut être vue comme un jeu coopératif entre les divisions de l'entreprise, Or, dans le chapitre 2, les problèmes d'incitation à la performance ou de toute autre nature n'ont été abordés qu'indirectement. Ainsi, les propriétés de participation (PA) et du coeur (CO) sont en fait des propriétés ou conditions d'incitation à la participation de la part des entités individuelles ou de sous-groupes d'entres elles. Les propriétés de monotonie des contributions par rapport aux coûts (MCT) ou à la demande (MD) peuvent être vues comme des conditions d'incitation à la performance. L'utilisation d'une méthode de répartition de coûts à l'intérieur de l'entreprise qui satisfait à (MCT) va inciter les divisions à être le plus efficace possible en leur garantissant que leurs efforts en ce sens ne vont pas les pénaliser. Une méthode qui satisfait à (MD) va les inciter à limiter leurs demandes au nécessaire.

Malheureusement, comme on l'a montré dans le chapitre 3, il n'y a pratiquement que la règle des coûts moyens qui satisfait à (MCT). Cette dernière n'est utilisable que dans les contextes unidimensionnels, ceux où la demande s'exprime par un seul nombre et où la demande totale est la somme des demandes individuelles. Cependant, s'agissant d'inciter les divisions d'une entreprise à l'efficacité, (MCT) est peut-être trop forte. Elle exige qu'aucune division ne soit pénalisée par une baisse de coût, peu importe qui est responsable de cette baisse. Il y a peut-être lieu de limiter les gains qui peuvent être retirés d'une baisse de coût à celles dont la division est elle-même responsable. Ainsi, Young (1985b, 1994) définit une condition, qu'il appelle *monotonie forte* mais qui est quand même plus faible que (MCT), et qui dit que si une division réussit à abaisser le coût incrémental de se joindre à d'autres, elle ne devrait pas en être pénalisée.[1] La règle Shapley-Shubik satisfait à cette condition. En fait, comme le montre Young, elle est la seule à satisfaire à cette condition tout en traitant les entités de façon anonyme. Ce résultat renforce l'intérêt de la règle Shapley-Shubik comme méthode de répartition des coûts communs dans de tels contextes. Young (1985a) formule une condition semblable pour la règle Aumann-Shapley.

Young (1994) a considéré une condition de monotonie encore plus faible qu'il appelle *monotonie en coalition*. Elle requiert qu'aucune division ne soit pénalisée par une baisse de coût des sous-groupes de divisions auxquels elle appartiendrait si le coût des divisions auxquelles elle n'appartient pas ne changeait pas.[2] La *monotonie forte* implique la *monotonie en coalition* mais l'inverse n'est pas vrai.

Malheureusement, comme le montre Young lui-même, le choix d'une formule de répartition *monotone en coalition* peut ne pas être suffisant pour vraiment inciter les divisions à réduire leur contribution aux coûts communs. En effet, si les efforts de réduction d'une division sont annulés par une augmentation des besoins exprimés par les autres divisions, la règle de partage peut quand même imputer à la division plus efficace un montant de coûts communs plus élevé que précédemment. Considérons l'exemple suivant avec deux divisions.[3] La ressource commune est un entrepôt utilisé par les deux divisions et la fonction de coût est donnée par :

$$c(\varnothing) = 0,\ c(\{1\}) = 40,\ c(\{2\}) = 60,\ c(\{1,2\}) = 75,$$

En mots, l'entreprise a besoin d'un entrepôt dont le coût est 75$ par mois. La division 1, si elle faisait cavalier seul, aurait besoin d'un entrepôt dont le coût est 40$ et la division 2, si elle faisait cavalier seul, aurait besoin d'un entrepôt de 60$. Supposons que le partage des coûts communs de l'entrepôt soit proportionnel au coût pour chaque division de faire cavalier seul[4], ce qui donne $x_1 = 30$ et $x_2 = 45$. Supposons maintenant que la division 1 réduise ses besoins autonomes d'entreposage de 40$ à 39$ alors que la

[1] Formellement, étant donnée une paire de fonctions de coût c et c' et un $i \in N$ tels que $c\,(S \cup \{i\}) - c\,(S) \leq c'\,(S \cup \{i\}) - c'\,(S)$ pour tout $S \subset N \backslash \{i\}$, alors $x_i\,(c) \leq x_i\,(c')$.

[2] Formellement, étant donnée une paire de fonctions de coût c et c' et un $i \in N$ tels que $c'(S) \leq c(S)$ pour toute coalition S comprenant l'entité i et $c'(S) = c(S)$ pour toute coalition S ne comprenant pas l'entité i, alors $x_i(c') \leq x_i(c)$.

[3] La répartition des coûts communs dans l'entreprise peut être vue comme un jeu coopératif entre les divisions de l'entreprise, comme que l'a montré Shubik (1962). En s'inspirant de Young (1994), $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ représente l'ensemble des divisions d'une entreprise, S est un regroupement de certaines d'entre elles et $c(S)$ est le coût communs que devrait encourir ce regroupement de divisions si l'entreprise ne comprenait que ces dernières.

[4] Il s'agit de la règle de Moriarity (1975), décrite dans le chapitre 2.

division 2 augmente les siens de 60$ à 71$, faisant de ce fait passer le coût de l'entrepôt commun à 85$. Formellement la fonction de coût c est changée pour c' :

$$c'(\varnothing) = 0,\ c'(\{1\}) = 39,\ c'(\{2\}) = 71,\ c'(\{1,2\}) = 85$$

La répartition des coûts communs par la règle de Moriarity donne maintenant $x_1 = 30.1$ et $x_2 = 54.9$. La division 1 se trouve ainsi pénalisée, malgré ses gains d'efficacité, à cause de la perte d'efficacité de la division 2. Pourtant, la règle de Moriarity satisfait à la *monotonie en coalition* mais cette propriété est sans effet ici parce que le coût d'une coalition à laquelle la division 1 n'appartient pas, nommément le coût de faire cavalier seul de la division 2, a changé également. Ce même exemple montre que la règle de Moriarity viole la *monotonie forte*. On a en effet $c(\{1,2\}) - c(\{2\}) = 15 > 14 = c'(\{1,2\}) - c'(\{2\})$. Autrement dit, le coût incrémental de la division 1 diminue au passage de c à c'. D'après la *monotonie forte*, elle devrait en profiter et non être pénalisée comme c'est le cas avec la règle de Moriarity. Elle en profiterait si on utilisait plutôt la règle Shapley-Shubik qui, comme on l'a vu plus haut, satisfait à la *monotonie forte*. Cette règle donne en effet $x_1(c) = 27.5,\ x_2(c) = 47.5$ et $x_1(c') = 26.5,\ x_2(c') = 58.5$. De plus, les deux divisions y trouvent leur compte, dans la mesure où leurs parts des coûts sont inférieures à leurs coûts de faire cavalier seul. Autrement dit, la répartition satisfait au test du coeur avec les deux fonctions de coût.

Cependant, bien que la *monotonie en coalition* soit une condition relativement faible comme on vient de le voir, elle est incompatible avec le test du coeur de façon générale. En effet, Young (1994) montre, à l'aide d'un exemple ingénieux, qu'il n'existe pas de règle de partage *monotone en coalition* qui donne toujours une répartition dans le coeur, du moins lorsque le nombre de joueurs dépasse 4.[5]

Le problème n'est pas catastrophique dans plusieurs contextes dont celui d'une entreprise où, comme mentionné plus haut, la menace de sécession, et donc la contrainte d'appartenance au coeur, n'est pas réelle. Il est en général plus important pour une entreprise d'implanter un règle de partage des coûts communs qui incite à la performance que d'implanter une règle qui assure la loyauté des directeurs de division, qui, de toute façon, n'ont pas la liberté de faire sécession. Il en est de même dans plusieurs autres cas où les partenaires, bien que légalement autonomes, n'ont pas vraiment la liberté de faire sécession, dans la mesure où la coopération (coalition) est imposée aux partenaires par une autorité supérieure telle un gouvernement ou qu'elle s'impose pour des raisons stratégiques plus globales.

[5] La preuve de Young est présentée en annexe.

7.3 Partage des coûts et révélation des fonctions de revenu

Nous abordons maintenant une question différente, à savoir celle des prix de transfert lorsque la direction générale (le centre) ne connaît pas très bien la productivité des différentes divisions dans leur utilisation respective des ressources communes. De manière précise, supposons que chaque division $i = 1, \ldots, n$ d'une entreprise demande au centre une quantité q_i d'un intrant qu'elle va transformer, avec une technologie inconnue du centre, en produits spécifiques qu'elle va ensuite vendre sur les marchés. Soit $r_i(q_i)$ le revenu maximal net que la division i peut obtenir de la quantité q_i d'intrant. Le centre ne connaît pas la fonction r_i. Par contre, il connaît le coût $C(Q)$ de produire le vecteur d'intrants $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ demandés par les divisions. L'entreprise (le centre) veut maximiser ses profits nets. Elle cherche à résoudre le problème :

$$\max_Q \sum_{i=1}^{n} r_i(q_i) - C(Q) \tag{7.1}$$

Vu que la fonction de revenu net $r_i(q_i)$ n'est bien connue que de la division i, le centre doit définir un mécanisme pour inciter les directeurs de division à révéler leurs fonctions r_i, dans l'intérêt général de l'entreprise.

La procédure recherchée peut être envisagée comme suit. Le centre demande à chaque division i de lui communiquer r_i. Il faut cependant admettre que la division i puisse tricher et transmettre une fonction $m_i \neq r_i$. Sur la base des messages $m = (m_1, \ldots, m_n)$, le centre détermine ensuite un programme de production $\hat{q}(m) = (\hat{q}_1(m), \ldots, \hat{q}_n(m))$ et impose à chaque division i une charge $g_i(m)$. Le couple $(\hat{q}, g)$, où $g(m) = (g_1(m), \ldots, g_n(m))$, est un *mécanisme*.

Ce mécanisme doit faire en sorte que le programme de production choisi par le centre maximise les profits nets de l'entreprise sous l'hypothèse que les messages des divisions sont véridiques. On définit donc :

$$\hat{q}(m) = \arg\max \sum m_i(q_i) - C(q) \tag{7.2}$$

Idéalement, la fonction g devrait être une règle de répartition des coûts, c'est-à-dire permettre de couvrir exactement les coûts :

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(m) = C(\hat{q}(m))$$

Afin que les divisions aient intérêt à transmettre la bonne information au centre et que la solution de (7.2) soit celle de (7.1), le mécanisme choisi par le centre doit satisfaire à une *contrainte incitative* :

$$\forall i,\ \forall m : r_i(q_i(r_i, m_{-i})) - g_i((r_i, m_{-i})) \geq r_i(q_i(m)) - g_i(m)$$

où l'expression de gauche représente le profit net de la division lorsqu'elle dit la vérité ($r_i(q_i)$) et celle de droite le profit net de la division pour un autre message m_i. Autrement dit, la vérité doit toujours donner un meilleur profit que n'importe quelle falsification.

Un premier résultat important, dû à Green et Laffont (1977), veut qu'il n'existe pas de mécanisme, comme celui envisagé plus haut, qui permette, pour toute fonction de coût C et toutes fonctions de revenu r_i, à la fois de couvrir exactement les coûts communs du centre, de maximiser les profits nets et de satisfaire aux contraintes incitatives de toutes les divisions. Par contre, dans le présent contexte, il est possible d'obtenir des mécanismes qui satisfont à deux des trois exigences, plus précisément la maximisation des profits nets et le respect des contraintes incitatives, mais qui ne permettent pas de couvrir exactement les coûts communs du centre.[6] Il s'agit des *mécanismes de Groves*, dont il existe une classe importante. Nous présentons deux de ses membres dans les deux prochaines sous-sections.

7.3.1 Un mécanisme de Groves

En plus de la solution $\hat{q}(m)$ du problème (7.2), considérons le programme de production, $\hat{q}(m_{-i})$ qui maximise les profits lorsque le profit et le message de la division i sont ignorés :

$$\hat{q}(m_{-i}) = \arg\max_{Q} \sum_{j \neq i} m_j(q_j) - C(Q)$$

On imagine facilement que $\hat{q}_i(m_{-i}) = 0$ mais cela n'est pas essentiel à notre propos. Soit $P_i(m)$ le profit total obtenu si tous les messages sont pris en compte pour déterminer le programme de production même si le revenu net de la division i est ignoré par le

[6] Dans le cas spécifique d'une entreprise, la condition d'équilibre est sans doute moins importante que l'efficacité.

centre et soit $P_i(m_{-i})$ le profit total obtenu si le message **et** le revenu de la division i sont tous deux ignorés par le centre :

$$\begin{aligned} P_i(m) &= \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m)) - C(\hat{q}(m)) \\ P_i(m_{-i}) &= \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m_{-i})) - C(\hat{q}(m_{-i})) \end{aligned}$$

On définit ensuite g comme suit :

$$g_i(m) = P_i(m_{-i}) - P_i(m)$$

Notons que :

$$P_i(m_{-i}) - P_i(m) = C(\hat{q}(m)) - C(\hat{q}(m_{-i})) + \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m_{-i})) - \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m))$$

Le premier terme de cette expression (le terme en C) est le coût incrémental (ou marginal, d'où le nom CM) de prendre en compte le message de la division i et le deuxième est l'impact, sur le revenu net des autres divisions, de cette prise en compte. La division i doit donc en quelque sorte payer pour l'externalité pécuniaire que sa présence impose aux autres, en plus de son coût incrémental.

Le mécanisme $(\hat{q}, g)$ ainsi défini, qu'on appellera CM, *maximise les profits de l'entreprise et satisfait à la contrainte incitative.* C'est précisément le terme représentant l'externalité qui assure le respect de la contrainte incitative.

Propriété incitative du mécanisme

Dans le choix de son message, un chef divisionnaire rationnel cherchera à résoudre :

$$\max_{m_i} r_i\left(\hat{q}_i(m_i, m_{-i})\right) - \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m_{-i})) + \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m)) - C(\hat{q}(m)) + C(\hat{q}(m_{-i}))$$

Comme les termes $\sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m_{-i}))$ et $C(\hat{q}(m_{-i}))$ ne dépendent pas de son message, son problème est équivalent à :

$$\max_{m_i} r_i\left(\hat{q}_i(m_i, m_{-i})\right) + \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m)) - C(\hat{q}(m))$$

Le meilleur message est donc celui qui va conduire à une valeur de Q qui maximise $r_i\left(q_i\right) + \sum_{j \neq i} m_j(q_j) - C(Q)$. Comme le choix de Q est l'apanage du centre, le meilleur message est manifestement r_i, pour que le maximande du problème (7.2) résolu par le centre soit précisément $r_i(q_i) + \sum_{j \neq i} m_j(q_j) - C(Q)$. Le raisonnement étant le même pour tout i, on est assuré que les divisions vont rapporter leur véritable r_i, ce qui va permettre au centre de trouver le programme de production Q qui maximise le profit de l'entreprise $\sum_{i=1}^{n} r_i(q_i) - C(Q)$.

La contrainte de participation ou de rationalité individuelle

Le profit net de la division i est donné par :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} r_j(\hat{q}_j(r)) - C(\hat{q}(r))\right) - \left(\sum_{j \neq i} r_j(\hat{q}_j(r_{-i})) - C(\hat{q}(r_{-i}))\right)$$

Comme $\hat{q}_j(r_{-i})$ est une solution admissible du problème (7.1), il est clair que :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j(\hat{q}_j(r)) - C(\hat{q}(r)) \geq \sum_{j \neq i} r_j(\hat{q}_j(r_{-i})) - C(\hat{q}(r_{-i}))$$

Autrement dit, le mécanisme MC procure un profit non négatif à chaque division. Dans la mesure où on a postulé $f_i(0) = 0$, cela signifie qu'il satisfait à la contrainte de participation volontaire, qu'on va appeler «rationalité individuelle» dans la prochaine sous-section.

La contrainte budgétaire

La somme des montants collectés par le centre sous ce mécanisme est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(C(\hat{q}(r)) - C(\hat{q}(r_{-i}))\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \neq i} r_j(\hat{q}_j(r_{-i})) - \sum_{j \neq i} r_j(\hat{q}_j(r))\right)$$

La première partie de cette expression est la somme des coûts incrémentaux des divisions (les coûts de les prendre en compte une à une, en plus des autres). En présence d'économies d'échelle, elle est au mieux égale à $C(\hat{q}(r))$.[7] Autrement, ce terme est négatif. Les économies d'échelle entraînent également $\hat{q}_j(r_{-i}) \leq \hat{q}_j(r)$. En effet, la prise en compte du message de la division i ne doit pas entraîner de diminution de la production destinée aux autres divisions, dans la mesure où cette dernière est susceptible de contribuer à abaisser les coûts moyens. Le deuxième terme des recettes totales du centre ne peut donc être positif. En présence d'économies d'échelle, le centre ne peut

[7] L'égalité peut se produire uniquement si C est séparable entre les entités, c'est-à-dire si C est de la forme $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$, auquel cas $C(Q) - C(Q_{-i}) = c_i(q_i)$.

donc pas espérer recouvrer tous ses coûts avec ce mécanisme. C'est ce qu'on vérifie dans l'exemple qui suit.

Exemple 7.1 Il y a trois divisions et, pour chacune d'entre elles, $q_i \in \{0, 1\}$. En mots, ou bien la division est fermée, au moins temporairement, ou bien elle opère à pleine capacité. Cette dernière éventualité est représentée par $q_i = 1$. Les revenus qui peuvent être obtenus en gardant les différentes divisions en opération sont donnés par :

$$r_1(1) = 6, \quad r_2(1) = 8, \quad r_3(1) = 8$$

Ces revenus sont inconnus du centre. Ils sont évidemment nuls si la division est fermée. Les coûts sont donnés par :[8]

$$C(1,0,0) = 3, \quad C(0,1,0) = C(0,0,1) = 5,$$
$$C(1,1,0) = C(1,0,1) = 6, \quad C(0,1,1) = 7, \quad C(1,1,1) = 8$$

Si on utilise le mécanisme CM, on est assuré que les chefs des divisions vont rapporter leurs vrais r_i. On vérifie alors que la solution du problème (7.2) est $\hat{q}(r) = (1, 1, 1)$. En effet, le revenu de chaque division est supérieur à son coût de faire cavalier seul, au coût incrémental de l'ajouter à n'importe quelle autre division et au coût incrémental de l'ajouter aux deux autres divisions. Pour ce qui est de la répartition des coûts, on a :

$$\begin{aligned} P_1(r) &= r_2(1) + r_3(1) - C(1,1,1) = 8 \\ P_1(r_{-1}) &= r_2(1) + r_3(1) - C(0,1,1) = 9 \\ g_1(r) &= P_1(r_{-1}) - P_1(r) = 1 \end{aligned}$$

De même, $g_2(r) = 2$ et $g_3(r) = 2$. Dans ce cas, les divisions ne se voient imputer que leur coût incrémental. Comme on est dans un contexte d'économies d'échelle, les charges $g_i(r)$ ne sont pas suffisantes pour couvrir les coûts totaux, qui sont égaux à 8. On maximise les profits mais, avec ce mécanisme, le centre n'arrive pas à répartir entièrement les coûts totaux. Le prix à payer pour amener les divisions à révéler leurs

[8] On peut voir également le problème comme un jeu coopératif, un jeu d'accès, où il s'agit de déterminer quel sous-ensemble de divisions garder en opération. Les coûts pourraient donc s'exprimer sous la forme d'une fonction c définie sur les sous-ensembles de coalitions possibles :

$$c(\{1\}) = 3, \quad c(\{2\}) = c(\{3\}) = 5, \quad c(\{1,2\}) = c(\{1,3\}) = 6, \quad c(\{2,3\}) = 7, \; c(\{1,2,3\}) = 8$$

véritables r_i, tout en maximisant le profit, est l'absence d'équilibre budgétaire. Cependant, avec un autre mécanisme, le centre pourrait ne pas avoir à subir de déficit. C'est ce qu'on verra dans la prochaine sous-section.

Avec le dernier exemple, on rejoint la proposition 3 de Moulin et Shenker (2001). Ces derniers ont précisément étudié le problème où des agents peuvent être servis ou non ($q_i \in \{0, 1\}$) et où ils doivent révéler l'utilité d'être servi. Selon cette proposition, *le mécanisme CM est le seul, dans ce contexte, à satisfaire à la contrainte de participation volontaire, en plus des contraintes incitatives et de la maximisation du profit.* Dans l'exemple précédent, les divisions ne payaient que leur coût incrémental. Moulin et Shenker affirme que si les agents sont petits par rapport à l'ensemble N, c'est précisément ce qui arrive.[9]

Ceci nous amène à une autre question. Supposons que l'entreprise tienne à l'équilibre budgétaire, quitte à ne pas maximiser le profit global. Toutefois, elle voudrait évidemment réaliser l'équilibre budgétaire, tout en minimisant la perte de profit. Moulin et Shenker ont aussi étudié cette question. Leur réponse est fort intéressante. On a vu dans le chapitre 3 que la règle Shapley-Shubik satisfait à la monotonie croisée négative (MCN) en présence d'économies d'échelle. Cela signifie que la contribution exigée d'un agent n'augmente pas, suite à l'augmentation de la demande de la part d'un autre agent. Dans le présent contexte, cette propriété implique que la contribution exigée d'un agent ne va pas augmenter à mesure que le nombre d'agents servis augmente. Or, Moulin et Shenker montre dans leur proposition 2 que, *parmi toutes les méthodes qui satisfont à cette dernière propriété, celle de Shapley-Shubik donne la plus petite perte de profit.*[10]

7.3.2 Le mécanisme de Clarke

Si l'entreprise tient à la maximisation du profit, elle doit, comme on l'a vu, sacrifier l'équilibre budgétaire mais elle n'a pas pour autant à subir de déficit. Nous présentons maintenant un autre membre de la classe des mécanisme de Groves qui va lui permettre de réaliser ces objectifs. Il s'agit du mécanisme de Clarke (1971) ou mécanisme «pivot». Il est très semblable en esprit au mécanisme CM mais différent en substance. Ce mécanisme ne garantit cependant pas la participation volontaire, ce qui, dans le cadre d'une entreprise, n'est sans doute pas un problème grave.

[9] Ils ont d'ailleurs donné le nom de «marginal cost pricing mechanism» à ce mécanisme pour cette raison, ce qui nous a incité à adopter le nom CM.

[10] Ils parlent plutôt de perte d'efficacité parce que le fait d'être servi apporte une utilité plutôt qu'un revenu. Formellement, cela ne fait pas de différence.

Pour arriver au mécanisme de Clarke, on définit les fonctions $\hat{q}(m_{-i}), P_i(m), P_i(m_{-i})$ et $g_i(m)$ comme suit :

$$\hat{q}(m_{-i}) = \arg\max_{Q} \sum_{j \neq i} m_j(q_j) - \frac{n-1}{n} C(Q) \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
P_i(m) &= \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m)) - \frac{n-1}{n} C(\hat{q}(m)) \\
P_i(m_{-i}) &= \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m_{-i})) - \frac{n-1}{n} C(\hat{q}(m_{-i})) \\
g_i(m) &= \frac{1}{n} C(\hat{q}(m)) + P_i(m_{-i}) - P_i(m)
\end{aligned}$$

La définition de $\hat{q}(m)$ reste la même. Comme, par définition, $\hat{q}_j(m)$ ne peut être une meilleure solution que $\hat{q}_j(m_{-i})$ au problème (7.3), on a $P_i(m_{-i}) \geq P_i(m)$. Avec ce mécanisme, le centre est donc assuré de couvrir tous ses coûts. Au départ, chaque division i doit en effet payer $\frac{1}{n}C(\hat{q}(m))$, auquel s'ajoute la contribution $P_i(m_{-i}) - P_i(m)$ s'il s'avère que la division fait changer le programme de production, c'est-à-dire si $\hat{q}_j(m) \neq \hat{q}_j(m_{-i})$.

On vérifie que la sincérité continue à être une stratégie dominante. Le problème de la division i devient :

$$\begin{aligned}
\max_{m_i} r_i\left(\hat{q}_i(m_i, m_{-i})\right) - \frac{1}{n} C(\hat{q}(m)) - \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m_{-i})) + \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m)) \\
- \frac{n-1}{n} C(\hat{q}(m)) + \frac{n-1}{n} C(\hat{q}(m_{-i}))
\end{aligned}$$

Comme les termes $\sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m_{-i}))$ et $C(\hat{q}(m_{-i}))$ ne dépendent pas de son message, ce problème est équivalent à :

$$\max_{m_i} r_i\left(\hat{q}_i(m_i, m_{-i})\right) + \sum_{j \neq i} m_j(\hat{q}_j(m)) - C(\hat{q}(m))$$

le même qu'avec le mécanisme CM. La stratégie dominante demeure donc $m_i = q_i$ pour toute division.

Exemple 7.2 Reprenons l'exemple de la sous-section 7.3.1. Le mécanisme de Clarke donne maintenant :

$$\begin{aligned} P_1(r) &= r_2(1) + r_3(1) - \frac{2}{3}C(1,1,1) = \frac{32}{3} \\ P_1(r_{-1}) &= r_2(1) + r_3(1) - \frac{2}{3}C(0,1,1) = \frac{34}{3} \\ g_1(r) &= \frac{8}{3} + \frac{34}{3} - \frac{32}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

De même, $g_2(r) = g_3(r) = \frac{8}{3} + 10 - \frac{26}{3} = 4$. La somme de ces contributions donne $\frac{34}{3} > 8$. Le centre fait donc un profit de $\frac{10}{3}$. Les divisions 2 et 3 font également un profit de 4 unités et la division 1 un profit de $\frac{8}{3}$ d'unités.

Il ne faut pas en conclure que la participation sera assurée dans tous les cas. Il est en effet facile d'imaginer des situations où il y aura au moins une division pour laquelle $r_i(\hat{q}_i(r)) < \frac{1}{n}C(Q)$. Cela se produira, entre autres, si $\hat{q}_i(r) = 0$.

7.3.3 La manipulation en coalition

Avec les mécanismes de Groves, toute division fait toujours mieux ou au moins aussi bien en révélant sa véritable fonction r_i. Autrement dit, ces mécanismes sont à l'abri de la manipulation individuelle. Par contre, ils ne sont pas immuns à la manipulation en coalition. Il peut arriver en effet qu'un sous-ensemble de divisions ait intérêt à se concerter pour falsifier leurs messages de façon avantageuse. On peut voir que c'est le cas du mécanisme CM avec l'exemple suivant. On a trois divisions avec une fonction de coût symétrique :

$$\begin{gathered} C(1,0,0) = C(0,1,0) = C(0,0,1) = 3, \\ C(1,1,0) = C(1,0,1) = C(0,1,1) = 5, \quad C(1,1,1) = 6 \end{gathered}$$

Comme précédemment, $q_i \in \{0,1\}$ et :

$$r_1(1) = 4, \quad r_2(1) = r_3(1) = 1.2$$

On vérifie facilement que le programme optimal comporte une production totale provenant uniquement de la division 1 ($\hat{q}(r) = (1,0,0)$). Selon le mécanisme CM, cette division doit défrayer le coût total, soit $g_1 = 3$. Comme les divisions 2 et 3 ne produisent pas, leurs contributions sont évidemment nulles.

Par contre, les divisions 2 et 3 pourraient se concerter et annoncer des revenus $r_2'(1) = r_3'(1) = 4$. Alors le mécanisme CM donnerait $\hat{q}(r_1, r_2', r_3') = (1,1,1)$ comme solution optimale et des allocations de coûts $g_1 = 1,\ g_2 = 1,\ g_3 = 1$. Avec ces paiements, les divisions 2 et 3 se retrouvent gagnantes, car chacune voit ainsi son profit passer de 0 à 0.2.[11] De même, la division 1 voit son profit augmenter de 2 unités. Par contre, le centre doit encourir le coût des trois unités et voit, ex post, le profit total de l'entreprise passer de 1 unité à 0.4 unité.

On voit donc qu'il peut être possible, en faisant coalition avec d'autres, d'améliorer sa position en ne dévoilant pas sa vraie fonction de revenu. La concertation est cependant primordiale. Par exemple, si la division 2 rapporte correctement sa fonction de revenu mais que la division 3 continue à rapporter la fausse information ($r_2'(1) = 1.2$ et $r_3'(1) = 4$), alors le mécanisme CM donne $g_1 = 1.8$, $g_2 = 1$, $g_3 = 1.8$ et ainsi la division 3 fait maintenant un déficit de 0.6 (1.2-1.8=-0.6). Elle n'a donc pas intérêt à mentir seule et à forcer le centre à laisser produire.

Crémer (1996) réagit au problème de manipulation en coalition en proposant un mécanisme de Groves un peu différent et immun aux coalitions de deux joueurs. Par contre, il ne peut contrer les coalitions de trois joueurs ou plus. En fait, il démontre qu'il est impossible de concevoir un mécanisme de Groves qui soit immun à la manipulation quelle que soit la coalition. Par contre, une coalition de trois joueurs ou plus est elle-même soumise au problème de manipulation par une sous-coalition qui pourrait se former au sein même de la coalition. Ainsi les coalitions de trois joueurs ou plus seraient instables. Il en résulte une nouvelle définition, celle des mécanismes *indirectement robustes à la manipulation en coalition*.

Ces mécanismes sont immuns aux coalitions de deux joueurs mais permettent des coalitions de plus de deux joueurs qui, par contre, ne sont pas à l'abri de la manipulation par leurs propres sous-coalitions. Le mécanisme de Groves que Crémer a instauré est *indirectement robuste à la manipulation en coalition*. Par contre, ce mécanisme viole une propriété importante, soit celle de l'anonymat, c'est-à-dire du traitement identique des divisions, sans égard à leur identité. Crémer soutient que la violation de la condition d'anonymat est essentielle pour immuniser le mécanisme aux coalitions de deux joueurs.

S'il est impossible de trouver un mécanisme qui satisfait de façon générale aux trois exigences que sont la couverture des coûts communs, la maximisation des profits et le

[11] En modifiant légèrement la fonction de coût pour $C(1,1,0) = C(1,0,1) = C(0,1,1) = C(1,1,1) = 6$, on peut voir que le mécanisme de Clarke peut également être manipulé par la même coalition. Avec la fonction de coût ainsi modifiée, le mécanisme de Clarke donne $g_1 = 3$ et $g_2 = g_3 = 1$ lorsque tous les responsables de division sont sincères. Par contre, si les divisions 2 et 3 envoient les message $r_2'(1) = r_3'(1) = 4$, on obtient $g_1 = g_2 = g_3 = 2$. Chacune des divisions 2 et 3 fait maintenant un profit de $1.2 - 2 = -0.8 > -1$. Les deux divisions font encore une perte mais moins élevée que si elles disent la vérité.

respect de la contrainte incitative, cela devient possible dans certains cas particuliers, comme ceux qui sont présentés dans la prochaine section.

7.4 Mécanismes incitatifs, équilibrés et efficaces

Comme on l'a vu dans le chapitre 2, le coût $C(q)$ de satisfaire à un vecteur de demandes q doit s'entendre comme le coût du projet qui permet de répondre aux besoins exprimés de la manière la moins coûteuse possible. De façon précise, si on désigne par $\alpha(q)$ un projet capable de répondre à la demande q et par $A(q)$ l'ensemble de tous ces projets, la fonction C est définie par :

$$C(q) = \min_{\alpha(q) \in A(q)} c(\alpha(q))$$

Schmeidler et Tauman (1994) ont étudié un problème de cette nature qui pose celui de la révélation des demandes de la part des divisions d'une entreprise. De façon précise, le problème comporte les éléments suivants.

- $N = \{1, 2, .., i, .., n\}$ est l'ensemble des divisions de l'entreprise.
- Chaque division i peut produire toute quantité $q_i \geq 0$ à un coût $f_i(q_i)$. La fonction f_i est continue et peut comprendre un coût fixe.[12]
- L'entreprise (le centre) peut produire un vecteur $(q_1, ..., q_n)$ à un coût $f_0(q_1, ..., q_n)$, qui peut également comprendre un coût fixe.[13]
- Le centre peut également laisser à chaque division le soin de produire une quantité $\delta_i \leq q_i$ de sa propre demande et se garder le résidu. Le coût total d'un vecteur de demandes $(q_1, ..., q_n)$, si le vecteur $\delta(q) = (\delta_1(q), ..., \delta_n(q))$ est laissé aux divisions respectives, est donc $f_0(q - \delta) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\delta_i)$.

Le problème de l'entreprise est alors de trouver le coût minimal $C(q)$ de produire un vecteur de demandes q, c'est-à-dire de résoudre le problème :

$$C(q) = \min_{0 \leq \delta \leq q} [f_0(q - \delta) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\delta_i)] \tag{7.4}$$

Dénotons par $\hat{\delta}(q)$ la solution de ce problème, de sorte que :

$$C(q) = f_0(q - \hat{\delta}(q)) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\hat{\delta}_i(q)) \tag{7.5}$$

[12] À strictement parler, ils postulent $f_i(0) = 0$ mais ils admettent $\gamma > 0$ où $\gamma = \lim_{q_i \to 0} f_i(q_i)$. Selon la terminologie de Varian (1997), γ est un coût quasi-fixe.

[13] La fonction f_0 peut inclure une composante "transport" pour tenir compte de la réalité géographique du centre par rapport à ses divisions.

À noter que la quantité optimale $\hat{\delta}_i(q)$ que la division i devra produire elle-même dépend cependant du vecteur q au complet, c'est-à-dire des demandes de toutes les divisions.

Ce problème est facile à résoudre en information parfaite, autrement dit si le centre connaît q et les fonctions f_i. Par contre, si les demandes q_i des divisions est une information privée que seules les divisions détiennent, le centre devra recourir à un mécanisme de révélation pour solutionner le problème de minimisation des coûts. Supposons que le problème d'information privée se pose comme suit :

- Chaque division $i \in N$ est la seule à connaître sa demande locale q_i qui doit être entièrement couverte.
- Chaque division i connaît également sa fonction de coût f_i, la fonction du centre f_0 et la sélection éventuelle d'un $\hat{\delta}_i(q)$ par le centre.
- Le centre connaît la fonction de coût f_0 et celles des divisions f_i, pour tout $i \in N$.

Tout comme dans la section précédente, le centre doit définir un mécanisme de révélation qui va inciter les responsables des divisions à révéler leur demande véritable et ainsi permettre au centre de minimiser les coûts totaux de satisfaire à ces demandes. Schmeidler et Tauman ont imaginé un mécanisme dans lequel chaque division i envoie un message m_i au centre afin de le renseigner sur sa demande. En réponse à ces n messages, le centre détermine la partie $\hat{\delta}_i(m)$ que chaque division i produira elle-même, se réservant la différence $m - \hat{\delta}(m)$. La fonction $\hat{\delta}$ est la solution du problème (7.4) dans lequel m remplace q :

$$C(m) = \min_{0 \leq \delta \leq m} [f_0(m-\delta) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\delta_i)]$$

La définition du mécanisme est ensuite complétée par la spécification des fonctions t_i qui donnent les parts des coûts encourus par le centre qui doivent être supportées par les divisions. Formellement, un mécanisme est défini par le couple $(\hat{\delta}, t)$. On veut que le mécanisme de révélation soit *satisfaisant*, en réunissant les propriétés suivantes :

1. Chaque division i doit être incitée à révéler sa véritable demande, c'est-à-dire à choisir $m_i = q_i$ comme message. C'est ce qu'on appelle la *contrainte incitative* (IC). Si une division ne peut espérer un gain supérieur en envoyant un message $m_i \neq q_i$, alors il est réaliste pour le centre de prévoir que les divisions vont envoyer le vecteur de messages $(q_1, ..., q_n)$. Le respect de (IC) repose sur la définition des fonctions t_i.

2. On doit minimiser les coûts. Cet objectif sera réalisé avec la fonction $\hat{\delta}$ définie plus haut, pour autant que la contrainte incitative soit respectée par toutes les divisions.

3. On veut s'assurer de la loyauté de chaque division, en faisant en sorte qu'elle n'a pas intérêt à faire cavalier seul. C'est ce qu'on appelle la contrainte de participation volontaire ou de *rationalité individuelle* (IR).

4. On souhaite que le vecteur de fonctions $t = (t_1, ..., t_n)$ permette de couvrir exactement les charges du centre : $\sum_{i=1}^{n} t_i(m) = f_0(m - \hat{\delta}(m))$. On dit alors que t est une méthode de répartition des coûts.

On peut caractériser les mécanismes satisfaisants comme suit. Soit t une méthode de répartition des coûts et un vecteur de demandes quelconque q. Imaginons qu'une division i envoie un message $m_i \neq q_i$, alors que les autres divisions répondent honnêtement. Appelons $\bar{q}$ le vecteur de messages que reçoit alors le centre, qui va produire $\bar{q} - \hat{\delta}\,(\bar{q})$. En particulier, il va produire $m_i - \hat{\delta}_i(\bar{q})$ pour la division i. Cette dernière devra donc produire la différence entre ses véritables besoins et ce que produit le centre, c'est-à-dire $q_i - m_i + \hat{\delta}_i(\bar{q})$, si cette quantité est positive. Autrement elle n'a rien à produire. Formellement elle doit produire $\bar{z} = \max\{0, q_i - m_i + \hat{\delta}_i(\bar{q})\}$ pour un coût $t_i(\bar{q}) + f_i(\bar{z})$.[14] Avec un message véridique $m_i = q_i$, son coût serait $t_i(q) + f_i(\hat{\delta}_i(q))$. On peut alors affirmer qu'un mécanisme de révélation $(\hat{\delta}, t)$ est satisfaisant si et seulement si, pour toute division i, toute demande q et n'importe quelle déviation $m_i \neq q_i$ de la part de cette division, on a :

$$\begin{array}{lll} i) & t_i(q) + f_i(\hat{\delta}_i(q)) \leq t_i(\bar{q}) + f_i(\bar{z}) & \text{(IC)} \\ ii) & t_i(q) + f_i(\hat{\delta}_i(q)) \leq f_i(q_i) & \text{(IR)} \end{array}$$

En vertu de ce résultat, il est suffisant de vérifier les contraintes incitatives (IC) et de rationalité individuelle (IR) pour qualifier un mécanisme $(\hat{\delta}, t)$ de satisfaisant. Malheureusement, comme le montrent Schmeidler et Tauman (1994), il n'existe pas de mécanisme satisfaisant dans un contexte aussi général que celui qui vient d'être défini. Cependant, ils montrent qu'il existe un tel mécanisme dans trois cas spécifiques de fonctions de coût :

- celui où les fonctions de coût des divisions f_i sont linéaires, peu importe la forme de f_0,
- celui où ces fonctions sont sous-additives ,

[14] On fait l'hypothèse que l'on peut disposer de toute production excédentaire sans coût supplémentaire.

– celui où les divisions ont des capacités de production limités qui se traduisent par un coût très élevé au delà d'un certain niveau de production.

Trois sous-sections sont consacrées à ces trois cas.

7.4.1 Fonctions de coût linéaires

Considérons un vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \geq 0$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et définissons, pour chaque i et tout vecteur de messages $m = (m_1, \ldots, m_n)$, les fonctions t_i^λ par :

$$t_i^\lambda(m) = [f_i(m_i) - f_i(\delta_i(m))] - \lambda_i \left[\sum_{j=1}^n f_k(m_k) - C(m)\right] \tag{7.6}$$

En utilisant la relation (7.5) avec m au lieu de q, on vérifie que :

$$\sum_{i=1}^n t_i^\lambda(m) = C(m) - \sum_{i=1}^n f_i(\delta_i(m)) = f_0(m - \delta(m))$$

La fonction t^λ définit donc une méthode de répartition de coûts. Selon cette fonction, chaque division i paie à l'entreprise l'épargne directe (brute) qu'elle réalise grâce à la coopération mais reçoit en retour une partie λ_i de l'épargne globale réalisée par l'ensemble des divisions.

Supposons maintenant que les fonctions f_i sont linéaires, c'est-à-dire de la forme $f_i(q_i) = a_i q_i$ où a_i est un nombre réel positif. Schmeidler et Tauman (1994, théorème 1) montrent que, *si les fonctions de coût f_i sont linéaires, alors le mécanisme de révélation $(\hat{\delta}, t^\lambda)$ est satisfaisant pour tout vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, et ce peu importe la fonction f_0*. Afin d'illustrer ce résultat, prenons un exemple inspiré de ces auteurs. On a une entreprise avec deux divisions qui doivent satisfaire à une demande donnée $q = (5, 96)$, exogène et inconnue du centre. Les fonctions de coût sont définies comme suit :

$$f_0(y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y_1 = y_2 = 0 \\ 600 + (2y_1 + y_2) & \text{si} \quad 0 < y_1 + y_2 \leq 100 \\ 600 + (8y_1 + 7y_2) & \text{si} \quad 100 < y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$f_1(y_1) = 6.0\ y_1$$
$$f_2(y_2) = 8.1\ y_2$$

On vérifie facilement que la solution $\hat{\delta}(q)$ du problème (7.4) donne $\hat{\delta}(5, 96) = (1, 0)$ et $C(5, 96) = 710$. Malgré le coût quasi-fixe de 600 au niveau central, il est en effet plus économique d'y produire toute la demande de la division 2 et une partie de la demande de la division 1 parce que les coûts marginaux sont moins élevés au niveau central. Par contre, on n'a pas intérêt à produire plus de 100 unités au niveau central parce que le coût marginal du bien 1 devient alors plus élevé que celui de la division 1.

Comme les fonctions de coût des divisions sont linéaires, il est possible de définir une fonction de répartition des coûts incitative et individuellement rationnelle. Prenons un vecteur $(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Alors, la fonction t^λ définie par (7.6) satisfait les contraintes (IC) et (IR). Appliquée à la demande $q = (5, 96)$, elle donne :

$$\begin{aligned} t_1^\lambda(5,96) &= (6 \times 5 - 6 \times 1) - \lambda_1[(6 \times 5 + 8.1 \times 96) - 710] = 24 - \lambda_1[97.60] \\ t_2^\lambda(5,96) &= 777.6 - \lambda_2[97.60] \end{aligned}$$

Ainsi, avec $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ et $\lambda_2 = \frac{5}{6}$,[15] on obtient : $t_1^\lambda(5,96) = 7.73$ et $t_2^\lambda(5,96) = 696.26$. Pour la division 1, on doit ajouter le coût de sa production locale à sa contribution aux coûts fixes, soit une unité produite à un coût de 6. Donc, la division 1 devra payer un montant total de 13.73. Le résultat est individuellement rationnel car la contribution demandée à chacune des divisions est inférieure à son coût de faire cavalier seul, qui est de 30 pour la division 1 et de 777.60 pour la division 2. Cette répartition satisfait aussi à la contrainte incitative.

Supposons maintenant que la division 2 rapporte au centre une fausse demande, par exemple 94 au lieu de 96, la division 1 rapportant sa vraie demande. Le centre va recevoir les messages $m = (5, 94)$ et va minimiser ses coûts selon cette demande. La solution du problème (7.4) ne change pas mais elle donne maintenant $\hat{\delta}(5,94) = (0,0)$, $C(5,94) = 704$. Avec $\lambda = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, elle donne $t_1^\lambda(5,94) = 15.43$ et $t_2^\lambda(5,94) = 688.56$. La division 2 doit cependant produire les deux unités qu'elle n'a pas déclaré, à un coût de 16.20, pour un coût total de 704.46. Ce coût est supérieur à celui qui aurait été le sien si elle avait rapporté sa vraie demande.

Par contre, le problème de déterminer la juste part λ_i de chacune des divisions demeure entier. À première vue, on semble retomber sur le même dilemme qu'avec les règles de proportionnalité développées précédemment. Par contre, il est utile de rappeler que le problème étudié ici est un cas particulier du problème de partage des coûts, lié au problème des incitations dans une une entreprise où l'information est incomplète. Par ailleurs, la méthode t^λ satisfait à la monotonie forte, quel que soit λ. Ainsi, on se retrouve en meilleure posture qu'avec les méthodes proportionnelles.

[15] Il s'agit du λ défini par $\lambda_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j}$

D'ailleurs, Schmeidler et Tauman montrent que, si on utilisait la *répartition proportionnelle aux coûts marginaux*[16] dans l'exemple précédent, il serait alors profitable pour la division 2 de rapporter faussement une demande de 94 unités. Donc, la méthode de répartition proportionnelle au coût marginal ne satisfait pas à la contrainte incitative. On peut sans doute en dire autant des autres méthodes de répartition proportionnelle.

7.4.2 Fonctions de coût sous-additives

On vient de voir que, sous l'hypothèse de rendement d'échelle constant dans les divisions, on peut utiliser la méthode de répartition t^λ de façon incitative. Cependant, la coopération (entre divisions par exemple) se produit souvent lorsque les fonctions de coût sont convexes (rendement d'échelle décroissant). Malheureusement, il est impossible de trouver une méthode de répartition des coûts communs qui soit satisfaisante pour toutes les fonctions f_i convexes même si la technologie du centre est à rendement croissant ou décroissant. Par contre, on peut montrer que la méthode de répartition t_i^λ est satisfaisante lorsque les fonctions de coût locales sont sous-additives[17] (ce qui inclut certaines fonctions convexes et toutes les fonctions concaves), que la fonction de coût total est concave et que la politique optimale consiste à produire toute la demande de chaque division au niveau central ou dans la division elle-même $\left(\hat{\delta}_i(q) \in \{0, q_i\}\right)$.

De façon plus précise, supposons que les demandes (véridiques et annoncées) soient majorées par $a \leq \infty$ et définissons $A = \{q \in \mathbb{R}^n \mid q_i \leq a, \ \forall i \in N\}$. Schmeidler et Tauman (1994, théorème 2) montrent que, *si f_i est sous-additive sur $[0, a]$ pour toute division i et si $\hat{\delta}_i(q) \in \{0, q_i\}$ quel que soit $q \in A$, alors le mécanisme de révélation $(\hat{\delta}, t^\lambda)$ est satisfaisant.*

À titre d'exemple, considérons les fonctions de coût :

$$f_0(y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y_1 = y_2 = 0 \\ 12 + (y_1 + y_2)^{0.3} & \text{si} \quad y_1 + y_2 > 0 \end{cases}$$

$$f_i(y_i) = 2y_i^{0.5}, \ i = 1, 2$$

[16] Cette méthode à été présentée dans le chapitre 2 et on en a étudié les propriétés dans le chapitre 3. Elle a été analysée de façon extensive par Wang (2002). Dans le présent contexte, elle est définie par :

$$t_i(q) = \frac{\partial_i f_0\left(q - \hat{\delta}(q)\right) q_i}{\sum_{j=1}^n \partial_j f_0\left(q - \hat{\delta}(q)\right) q_j} f_0\left(q - \hat{\delta}(q)\right)$$

[17] Une fonction $f : A \to R$ est dite sous-additive sur le domaine A si, pour $x_1, x_2, x_1 + x_2 \in A$, on a $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$. Une telle condition traduit une forme réduite d'économie d'échelle.

Ces fonctions sont concaves. De plus, le coût marginal au niveau central devient rapidement plus faible qu'au niveau local. Étant donné le coût quasi-fixe de 12, il peut être avantageux de laisser les divisions satisfaire à leurs besoins respectifs. Pour une demande globale suffisamment élevée, il sera plus avantageux de concentrer la production au niveau central, pour bénéficier du coût marginal plus faible. Par exemple, si $q_2 = 0$, la production de la demande de la division 1 devrait être laissée à la division ou confiée au centre selon que q_1 est inférieur ou supérieur à 59.3189. Comme le coût marginal de la division 2 est infini pour $q_2 = 0$, il serait avantageux de confier la production de toute demande positive de la division 2 au centre, dès lors que la demande de la division 1 y est traitée. Toute augmentation de la demande de la division 2 abaisserait d'autant le seuil critique de q_1. Sous ces conditions, le mécanisme de révélation $(\hat{\delta}, t^{\lambda})$ est satisfaisant.

7.4.3 Fonctions de coût avec contraintes de capacité locales

Supposons maintenant que les divisions aient des capacités de production limitées qui se manifestent par un saut dans leurs fonctions de coût au point où cette capacité est atteinte. Par exemple, une division i peut produire avec ses équipements existants jusqu'à un point k_i. Au delà, elle doit démarrer ou louer une nouvelle machine à un certain coût (quasi-fixe). La fonction de coût de cette division va donc présenter une discontinuité au point k_i, en plus de celle déjà admise au point 0.

Voici un exemple d'une telle fonction. Soit $a > k > 0$ et une même fonction f_i pour toutes les divisions définie par :

$$f_i\left(y_i\right) = \begin{cases} y_i & \text{si} \quad 0 \leq y_i \leq k \\ k + 2(y_i - k) + c & \text{si} \quad k < y_i \leq a \end{cases} \tag{7.7}$$

Selon cette fonction, pour produire au delà de k, il faut recourir à de nouveaux équipements qui coûtent c, avant même qu'on commence à les utiliser. Selon la fonction f_0, il sera peut-être plus économique de laisser la production en excédent de k au centre. Par exemple, considérons la fonction :

$$f_0\left(y\right) = 2\sum_{i=1}^{n} y_i + \ln\left(1 + \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \tag{7.8}$$

où la composante $2\sum_{i=1}^{n} y_i$ peut être interprétée comme le coût de transport et l'autre le coût de production proprement dit. Si $c > a - k$, on peut montrer que $\hat{\delta}_i$ ne dépend que de y_i et que $\hat{\delta}_i\left(y_i\right) = \min\left\{y_i, k\right\}$. Autrement dit, il est plus économique de produire localement toute quantité jusqu'à k et de confier l'excédent au centre.

Schmeidler et Tauman (1994, théorème 3) montrent que, *dans un tel contexte et, en particulier, quand* $\hat{\delta}_i$ *ne dépend que de* y_i*, il existe un mécanisme satisfaisant.* Ce mécanisme est de la forme $\left(\hat{\delta}, t^{\varphi}\right)$ où t^{φ} est défini comme suit.

Soit $\Re$ un ordre sur N, c'est-à-dire une permutation de éléments de N, et $\Re_i$ l'ensemble des agents qui précédent i dans $\Re$. On a également est une fonction de probabilité φ sur l'ensemble des $n!$ permutations de N. Par exemple, si tous les ordres sont équiprobables, on a $\varphi(\Re) = 1/n!$. Rappelons (chapitre 2) qu'étant donné un sous-ensemble $S \subset N$ et un vecteur de demande q, le terme q^S désigne le vecteur obtenu de q en annulant toutes les composantes q_i telles que $i \notin S$. La fonction de transfert t^{φ} est définie, pour tout i et tout vecteur de message m, par :

$$t_i^{\varphi}(m) = \sum_{\Re} \varphi(\Re)[C(m^{\Re_i \cup \{i\}}) - C(m^{\Re_i})] - f_i(\hat{\delta}_i(m))$$

Le terme $C(m^{\Re_i \cup \{i\}}) - C(m^{\Re_i})$ est le coût incrémental, au niveau de l'entreprise, d'ajouter la division i à la coalition $\Re_i$. Le premier terme de cette fonction est donc l'espérance mathématique ou la moyenne pondérée de ces coûts incrémentaux, en supposant que l'ordre dans lequel la division i se joint à d'autres est tiré au hasard selon la fonction de probabilité φ. En particulier, si $\varphi(\Re) = 1/n!$ pour toute permutation $\Re$, ce premier terme est la valeur de Shapley. Autrement dit, dans ce cas, appliquer ce mécanisme implique la répartition des coûts totaux de l'entreprise selon la règle Shapley-Shubik. Dans la définition de t_i^{φ}, on retranche $f_i(\hat{\delta}_i(m))$ de la contribution de la division i puisqu'elle supportera directement ce coût.

À titre d'exemple, considérons le cas où $n = 3$. La première rangée du tableau qui suit donne les six permutations $\Re$ des éléments de N, la deuxième les sous-ensembles $\Re_1$ et la troisième les sous-ensembles $\Re_1 \cup \{1\}$:

$\Re$	$\{1,2,3\}$	$\{1,3,2\}$	$\{2,1,3\}$	$\{2,3,1\}$	$\{3,1,2\}$	$\{3,2,1\}$
$\Re_1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{3\}$	$\{3,2\}$
$\Re_1 \cup \{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$

Supposons $\varphi(\Re) = 1/n!$ pour toute permutation $\Re$. Alors, en écrivant $c(S)$ pour $C\left(m^S\right)$, on a :

$$\begin{array}{rcll} t_1^{\varphi}(m) & = & \frac{1}{6}[c(\{1\}) - c(\{0\})] & (\text{cas } \{1,2,3\}) \\ & & +\frac{1}{6}[c(\{1\}) - c(\{0\})] & (\text{cas } \{1,3,2\}) \\ & & +\frac{1}{6}[c(\{1,2\}) - c(\{2\})] & (\text{cas } \{2,1,3\}) \\ & & +\frac{1}{6}[c(\{1,2,3\}) - c(\{2,3\})] & (\text{cas } \{2,3,1\}) \\ & & +\frac{1}{6}[c(\{1,3\}) - c(\{3\})] & (\text{cas } \{3,1,2\}) \\ & & +\frac{1}{6}[c(\{1,2,3\}) - c(\{3,2\})] & (\text{cas } \{3,2,1\}) \\ & & -f_1(\hat{\delta}_1(m_1) & \end{array}$$

On peut simplifier cette expression comme suit :

$$\begin{array}{rcl} t_1^{\varphi}(m) & = & \frac{1}{3}[c(\{1\}) - c(\{0\})] \\ & & +\frac{1}{6}[c(\{1,2\}) - c(\{2\})] \\ & & +\frac{1}{6}[c(\{1,3\}) - c(\{3\})] \\ & & +\frac{1}{3}[c(\{1,2,3\}) - c(\{3,2\})] \\ & & -f_1(\hat{\delta}_1(m_1)) \end{array}$$

Mis à part le terme $-f_1(\hat{\delta}_1(m_1))$, c'est précisément la formule à laquelle on est arrivé dans le chapitre 2 quand on a dérivé la règle Shapley-Shubik. À ce titre, ce mécanisme est intéressant puisqu'on retrouve la propriété de monotonie forte discutée à la section 7.2 et si importante pour éviter les incitations perverses. Ce mécanisme est donc de nature à inciter les divisions à l'innovation et à la réduction des coûts.

Pour compléter cet exemple, supposons que les fonctions de coûts sont données par (7.7) et (7.8) avec $k = 20$, $a = 40$, $c = 10$ et que la demande véridique soit $q = (30, 30, 30)$. La solution $\hat{\delta}$ du problème (7.4) donne alors[18] $\hat{\delta}(30, 30, 30) = (20, 20, 20)$ et, comme coût total minimal, $C(q) = f_0(q - \hat{\delta}(q)) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\hat{\delta}_i(q)) = 63.43 + 60 = 123.43$. La réparation des coûts donne $t_i^{\varphi}(q) = 21.1447$, pour tout i, soit un tiers du coût total du centre. C'est un résultat qui s'explique par le fait que les trois divisions demandent un même bien privé homogène. C'est la somme des quantités produites pour les trois divisions qui entre dans la fonction f_0.

En terminant, il est important de souligner trois points. Premièrement, si les fonctions de coût des divisions sont linéaires, alors on ne peut utiliser la méthode de répartition des coûts t_i^{φ} qui vient d'être définie car elle violerait la contrainte incitative. La

[18] À noter que si le vecteur de demande véridique était $q = (9, 9, 9)$, on aurait alors $\delta(q_1, q_2, q_3) = (9, 9, 9)$. On est donc vraiment en présence d'une fonction de coût telle que $\delta_i(q) = \min\{q_i, P)$, c'est-à-dire qui ne dépend que de q_i.

discontinuité à un point $k_i > 0$ est importante dans le dernier résultat de Schmeidler et Tauman. Deuxièmement, si $\hat{\delta}_i$ ne dépend que de q_i alors le mécanisme défini à la sous-section 7.4.1 n'est pas nécessairement satisfaisant.

Finalement, dans cette section, on a vu certains cas où l'on peut trouver un mécanisme de révélation qui satisfait aux trois contraintes d'efficacité, d'incitation et de rationalité individuelle. Il est certain qu'il est souhaitable pour l'entreprise d'être en mesure de mettre en place un tel mécanisme. Par contre, dans le cas spécifique des incitations à la réduction des coûts dans la firme, il est certes plus important de maximiser les gains plutôt que de s'assurer que le mécanisme couvre les coûts. La recherche d'un mécanisme équilibré est moins importante lorsqu'existe une instance capable de financer le déficit. Cela n'est pas le cas dans un contexte de coopération entre firmes où il est important de couvrir les coûts, car on peut penser qu'aucune des firmes n'est évidemment prête à assumer le déficit potentiel.

7.5 Conclusion

Nous avons vu que les problèmes relatifs au caractère incitatif des mécanismes de partage de coûts se présentent sous diverses formes. Il est ainsi difficile de traiter l'ensemble de ces problèmes de manière intégrée et complète sans avoir recours à un formalisme analytique avancé. Nous avons préféré considérer de manière explicite trois cas particulièrement importants décrits dans l'introduction. La présentation rigoureuse quoique succincte de ces trois cas nous a permis d'illustrer non seulement les difficultés que pose notre approche au partage des coûts mais aussi tout son potentiel.

Afin de choisir la bonne taille d'une infrastructure et d'économiser autant que possible sur les coûts d'investissement, il faut en général au responsable (le Centre dans le langage de ce chapitre) certaines informations qui lui sont typiquement inconnues et pour lesquelles il doit s'en remettre à des agents ou partenaires qui voudront utiliser leurs informations privilégiées de manière stratégique. Ces problèmes sont endémiques à toute société, toute alliance, tout partenariat et toute entreprise publique ou privée. Malgré leur importance, ils sont souvent totalement escamotés dans la pratique. Cela s'explique en partie par le niveau de difficulté de l'analyse des incitations, dans le cadre du partage des coûts entre autres. En effet, l'analyse des incitations dans des contextes d'information incomplète est un des domaines les plus exigeants en science économique. Le niveau de formalisme de ce chapitre, qui était inévitable, en a donné un aperçu.

Malgré les difficultés, il y a des solutions ou du moins des approches méthodologiques pour obtenir des solutions parfois souvent imparfaites mais du moins transparentes et éclairantes. Nous avons montré qu'il est possible de tenir compte de ces contraintes d'incitation dans la détermination ou le choix d'une règle de partage des coûts et nous avons indiqué la marche à suivre dans certains cas particulièrement importants.

7.A Annexe : incompatibilité entre monotonie en coalition et test du coeur

Considérons la fonction de coût c définie sur $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ telle que les coûts de faire cavalier seul pour les diverses coalitions ou sous-ensembles de N sont donnés par :

$$c(\{3,5\}) = c(\{1,2,3\}) = 3$$
$$c(\{1,3,4\}) = c(\{2,4,5\}) = 9$$
$$c(\{1,2,4,5\}) = c(\{1,2,3,4,5\}) = 12$$

et, pour toute autre coalition S, par le coût minimal des coalitions ci-dessus qui contiennent S, par exemple $c(\{1,2\}) = \min\{c(\{1,2,3\}),\ c(\{1,2,4,5\}),\ c(\{1,2,3,4,5\})\} = \min\{3, 12, 12\} = 3$. Si la formule x de partage des coûts communs est dans le coeur, alors $x(S) \leq c(S)$ pour tout S et en particulier pour les 5 premières coalitions ci-dessus dans lesquelles chaque entité de N apparaît 3 fois. En faisant la somme de ces conditions pour les 5 coalitions en question, on obtient ainsi $3x(N) \leq 36$. Or, $x(N) = 12$ et donc chacune des conditions $x(S) \leq c(S)$ pour les 5 coalitions ci-dessus doit en fait être serrée : $x(S) = c(S)$. L'unique solution de ce système d'équations est $x = (3, 0, 0, 6, 3)$. Ce point forme le coeur du jeu à lui seul.

Considérons maintenant une autre fonction de coût identique à la première sauf que $c(\{1,2,4,5\}) = 9$ et $c(\{1,2,3,4,5\}) = 11$. Le coeur ne contient alors que la solution $x = (0, 1, 2, 7, 1)$. Ainsi, x_2 et x_4 ont tous deux augmenté alors qu'aucune des coalitions comprenant les entités 2 et 4 n'ont vu leurs coûts communs augmenter et que certaines d'entre elles ont vu leurs coûts diminuer.

Prenons maintenant une méthode de répartition de coûts quelconque qui donne toujours une répartition du coeur. Appliquée aux deux exemples qui précèdent, cette méthode va donc donner les répartitions uniques qu'on a trouvées. La méthode en question n'est donc pas *monotone en coalition*. La preuve se généralise à $N \geq 5$. Par contre, dans plusieurs cas concrets spécifiques, il peut être possible de déterminer une règle de partage qui soit à la fois dans le coeur et incitative, c'est-à-dire monotone en coalition.

Références

Aumann, R.J. et L.S. Shapley, 1974. *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, NJ : Princeton University Press.

Clarke, E., 1971. "Multipart Pricing of Public Goods," *Public Choice*, 11, 17-33.

Crémer, J., 1996. "Manipulations by Coalitions under Asymmetric Information : The Case of Groves Mechanisms," *Games and Economic Behavior*, 13, 39-73.

Green, G. et J.J. Laffont, 1977. "Révélation des préférences pour les biens publics : caractérisation des mécanismes satisfaisants," *Cahiers du Séminaire d'économétrie*, 19, 83-103.

Moriarity, S., 1975. "Another Approach to Allocating Joint Costs," *Accounting Review*, 49, 791-795.

Moulin, H. et S. Shenker, 2001. "Strategyproof Sharing of Submodular Costs : budget balance versus efficiency," *Economic Theory*, 18, 511–533.

Schmeidler, D. et Y. Tauman 1994. "Incentive-Compatible Cost-Allocation Schemes," *Journal of Economic Theory*, 63, 189-207.

Shapley, L.S., 1953. "A Value for n-Person Games," in Kuhn, H., et A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton : Princeton University Press, 307-317.

Shubik, M., 1962. "Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing," *Management Science*, 8, 325-43.

Varian, H.R., 1997. *Introduction à la microéconomie*, Bruxelles ; Paris : De Boeck Université.

Young, H.P., 1985a. "Producer Incentives in Cost Allocation," *Econometrica,* 53, 757-65.

Young, H.P., 1985b. "Monotonicity in Cooperative Games," *International Journal of Game Theory,* 13, 65-72.

Young, H.P., 1994. "Cost Allocation", in R.J.Aumann et S. Hart, eds, *Handbook of Game Theory, Vol. II,* Amsterdam : North Holland, Chap. 34, 1191-1235.

Wang, Y.T., 2002. "Proportionally Adjusted Marginal Pricing Method to Share Join Costs," *Review of Economic Design,* 7, 205-211.

Chapitre 8

Tarification optimale des infrastructures communes

8.1 Introduction

Dans les chapitres précédents on a parfois parlé de tarification (au coût moyen, au coût marginal, à la Aumann-Shapley) mais le problème abordé en était essentiellement un de partage de coûts. On supposait que les quantités demandées par les différents agents ou entités étaient données et il s'agissait de répartir entre ces derniers le coût de les satisfaire de façon conjointe. La question abordée dans le présent chapitre est plus générale. On admet que la façon même de répartir les coûts peut avoir une influence sur les demandes elles-mêmes. On suppose donc que les agents, clients ou consommateurs ont une fonction de demande pour les services, qu'on suppose connue avec certitude.[1] La question étudiée est celle de la détermination des tarifs de façon à maximiser le bien-être des agents, tout en couvrant les coûts de production.

De façon assez générale, les infrastructures ont été mises en place à grand frais, alors que leur coût d'opération est relativement faible. L'intérêt général commanderait qu'on tarife l'usage de ces infrastructures à leur coût marginal, en prenant soin d'y inclure tous les coûts d'opportunité, dont ceux liés à la congestion et à la pollution. À tout le moins, on devrait abaisser les tarifs de manière à assurer une pleine utilisation de ces infrastructures. Ce résultat est connu par les économistes comme la solution de *premier rang (first best)*. À l'autre bout du spectre, le gestionnaire de l'infrastructure pourrait exercer tout son pouvoir de marché et maximiser ses profits privés, compte tenu de la demande.

L'objectif visé se situe le plus souvent entre ces deux solutions. Il faut collecter suffisamment de recettes pour couvrir les coûts ou, du moins, une partie d'entre eux. Dans l'intérêt général, les recettes totales doivent alors être prélevées grâce à une gestion aussi proche que possible du premier rang, c'est-à-dire en maximisant (grâce à une tarification au coût marginal) l'usage de l'infrastructure, pour le plus grand bien-être des citoyens. On cherche ce que les économistes appellent une solution de *second rang (second best)*, c'est-à-dire la meilleure solution étant donnée la contrainte budgétaire imposée au gestionnaire. Le problème est de déterminer les tarifs de manière à atteindre cet objectif.

C'est la problématique abordée dans ce chapitre. On suppose que la contrainte budgétaire ne peut pas être modifiée. On débute par la tarification à la Ramsey-Boiteux, aussi dite *linéaire*. Dans ce cas, il n'y a qu'un prix par unité de bien ou service, bien qu'il puisse varier d'un bien à un autre. Ensuite, on montre qu'on peut faire mieux avec des *tarifs polynômes* ou *non linéaires*, comprenant des charges fixes,

[1] Le cas où elle ne l'est pas est abordé en partie dans le chapitre 7.

des prix d'usage, etc. On termine par un bref survol des applications qui ont été faites de la tarification linéaire et non linéaire.

8.2 Tarification à la Ramsey-Boiteux

La théorie économique nous enseigne que, pour assurer la maximisation du bien-être des consommateurs, les biens et services doivent être vendus à leur coût marginal social.[2] Cependant, en présence d'économies d'échelle, ce mode de tarification donne un déficit. Une solution possible consiste à combler ce déficit par une subvention, comme on le fait pour le transport en commun et la production de spectacles par exemple. Dans d'autres situations, cela est politiquement impossible et on requiert plutôt que le responsable de la production s'autofinance, au moins en partie. Pour ce faire, il doit alors majorer les prix, du moins certains d'entre eux, au dessus des coûts marginaux.

La règle de Ramsey-Boiteux indique comment opérer cette majoration, tout en générant le moins de distorsions possibles par rapport aux consommations de premier rang obtenues avec la tarification au coût marginal. Elle maximise le bien-être total des consommateurs sous la contrainte budgétaire. Elle suppose la fonction de demande connue ou, du moins, l'élasticité de cette dernière. La définition ainsi que quelques illustrations de ce concept fondamental sont données à l'annexe 8.A.1.

Il sera plus aisé de comprendre la règle de Ramsey-Boiteux si on comprend bien la manière dont un monopole fixerait les prix pour maximiser son profit. On va donc commencer par ce problème, d'abord avec un catégorie de clients et ensuite deux. On passera ensuite assez naturellement à la règle de Ramsey-Boiteux.

8.2.1 Maximisation du profit avec une catégorie de consommateurs

Considérons un monopole qui produit un bien à un coût marginal c constant[3]. Ce monopole fait cependant face à un coût fixe C, nécessaire au fonctionnement et à l'entretien de l'infrastructure. C'est le type de configuration de coûts qui justifie l'existence d'un monopole. Dans ce cas, le coût marginal est en effet toujours inférieur au coût moyen et ce dernier est toujours décroissant. La tarification au coût marginal donnerait forcément un profit négatif.

[2] Ce dernier inclut les dommages à l'environnement et les effets pervers pour les autres agents.

[3] Cela signifie que la production de toute unité supplémentaire entraîne un coût additionnel c.

Supposons pour l'instant qu'il n'y a qu'une catégorie de consommateurs, avec une demande d'élasticité $\eta(p)$. Pour maximiser le profit, le prix p doit être choisi de manière à satisfaire la condition suivante :

$$\frac{p-c}{p} = \frac{1}{\eta\,(p)} \tag{8.1}$$

Ainsi, pour maximiser le profit, il faut choisir un prix p de manière à ce que la marge $(p-c)$ réalisée par rapport au prix soit égale à l'inverse de l'élasticité.[4] De plus, le prix ne doit pas être si faible que la demande dépasse les capacités de production.

Une justification intuitive de l'expression ci-dessus est la suivante. La réduction du prix d'une unité ($\Delta p = -1$) a deux effets. Le premier est négatif, puisqu'il correspond à une diminution directe du profit de $\Delta p \times q = -q$. Le deuxième effet est positif et correspond à l'accroissement de la quantité demandée suite à la baisse du prix. En vertu de la définition de l'élasticité, cette dernière est donnée par $\Delta q = \eta\,(p) \times \frac{q}{p}$.[5] Elle entraîne une augmentation du profit d'un montant :

$$(p-c) \times \Delta q = (p-c) \times \eta\,(p) \times \frac{q}{p} = \frac{(p-c)}{p} \times \eta(p) \times q$$

Pour maximiser le profit, il faut que les deux effets s'annulent :

$$\frac{(p-c)}{p} \times \eta(p) \times q = q$$

En divisant les deux parties de cette égalité par $\eta(p) \times q$, on obtient la règle (8.1).

Comme cas particulier, si le coût marginal de production c est nul, le prix doit être fixé de manière à égaliser l'élasticité à 1 ($\eta\,(p) = 1$). De façon générale, le prix p ne doit jamais être fixé de sorte que l'élasticité soit inférieure à 1.[6]

8.2.2 Maximisation du profit avec deux catégories de consommateurs

Considérons maintenant le cas où il existe deux catégories de consommateurs, avec des élasticités respectives $\eta_1\,(p)$ et $\eta_2\,(p)$, pouvant être servies à des coûts marginaux respectifs c_1 et c_2. Pour les mêmes raisons et suivant les mêmes intuitions que pour

[4] Dans la littérature sur le monopole, on réfère au rapport $\frac{p-c}{p}$ sous le vocable d'*indice de Lerner*. Voir Lerner (1934), Dunlop (1939) et Rothschild (1942).

[5] Voir (8.6) à l'annexe 8.A.1.

[6] Avec $\eta\,(p) < 1$, une augmentation de prix d'une unité ($\Delta p = 1$) entraînerait une augmentation directe du profit de $\Delta p \times q = q$. La baisse indirecte, due à l'augmentation de prix, serait inférieure à la hausse directe. On aurait en effet $p \times \Delta q = \eta\,(p) \times q > -q$. En termes absolus, $|p \times \Delta q| < q$.

la maximisation du profit, la structure optimale des prix est donnée par la formule suivante :

$$\frac{p_1 - c_1}{p_1} = \frac{1}{\eta_1 (p_1)} \qquad \frac{p_2 - c_2}{p_2} = \frac{1}{\eta_2 (p_2)}$$

La marge réalisée par rapport au prix pour chaque type de consommateurs doit être égale à l'inverse de l'élasticité de la demande de ce même type de consommateurs. La marge réalisée par rapport au prix doit être d'autant plus importante que la demande des consommateurs a une faible élasticité. L'intuition derrière ces formules est la suivante. Les consommateurs dont la demande est moins élastique sont moins sensibles aux variations de prix que ceux dont la demande est plus élastique. Ils peuvent faire face à un prix plus élevé, payer une marge plus importante, sans pour autant diminuer sensiblement leur consommation. Les consommateurs ayant une élasticité plus grande paieront un prix plus proche du coût marginal qu'ils imposent au producteur. On veut ainsi qu'ils maintiennent la quantité demandée à un niveau élevé.

Comme cas particuliers, si les coûts marginaux des deux catégories de consommateurs sont nuls ($c_1 = c_2 = 0$), alors chaque prix p_i doit être fixé de sorte que l'élasticité $\eta_i(p_i)$ soit égale à 1.

8.2.3 L'optimum de second rang avec deux catégories de consommateurs

Supposons dorénavant que le monopole n'ait pas le droit de maximiser ses profits mais qu'on lui permette simplement de couvrir ses coûts, c'est-à-dire d'atteindre l'*équilibre budgétaire*.[7] Comment alors doivent être fixés les prix qui atteignent l'objectif de second rang ? En suivant les mêmes intuitions, la règle est donnée par la formule suivante :

$$\frac{p_1 - c_1}{p_1} = \frac{\lambda}{\eta_1 (p_1)} \qquad \frac{p_2 - c_2}{p_2} = \frac{\lambda}{\eta_2 (p_2)} \tag{8.2}$$

Dans cette formule, λ est fixé de façon à satisfaire la condition d'équilibre budgétaire. On trouve cette valeur en résolvant un système d'équations simultanées, par tâtonnement si nécessaire. Si on pose $\lambda = 1$, on retrouve la solution qui maximise le profit. Avec $\lambda = 0$, on obtient les prix de la solution de premier rang, $p_1 = c_1$ et $p_2 = c_2$, qui donnent un déficit. La solution de second-rang, correspondant au cas de l'équilibre budgétaire, est quelque part entre les deux : $0 < \lambda < 1$. Les prix qui sont définis par

[7] S'agissant d'entreprises publiques, on pourrait exiger qu'elles récupèrent un certain pourcentage de leurs coûts. La notion d'équilibre budgétaire peut s'entendre dans ce sens également.

(8.2) sont dits de Ramsey-Boiteux.[8] La règle (8.2) elle-même est souvent appelée la *règle de l'inverse de l'élasticité.*

Si $c_1 = c_2 = 0$, les prix doivent être tels que :

$$\eta_1(p_1) = \eta_2(p_2) = \lambda \tag{8.3}$$

À l'optimum de second rang, les prix sont alors choisis de sorte que les élasticités des deux catégories de consommateurs soient égales et inférieures à l'unité. Ce résultat montre que la structure des prix est, dans un sens, équitable : les deux types de consommateurs réagissent de manière similaire à une augmentation marginale des prix, puisque leurs élasticités sont égales. Cette propriété d'équité est une caractéristique importante de la structure de ces prix.

Dans le cas plus général, les marges réalisées en fixant les prix optima de second rang (les membres gauches de (8.2)) sont proportionnelles, et non plus égales, à l'inverse des élasticités des demande respectives des consommateurs. Les marges sont donc plus faibles que lorsque le profit de l'entreprise est maximisé. Le facteur λ, inférieur à 1, reflète la contrainte d'équilibre budgétaire imposée au gestionnaire de l'entreprise, qui ne peut pas profiter pleinement de son pouvoir de marché pour maximiser ses profits.

Comme pour la maximisation du profit, les consommateurs à forte élasticité bénéficient d'une marge plus faible, par rapport au coût marginal, que ceux à faible élasticité. L'intuition est la même : si l'entreprise décidait d'une marge trop élevée, ces consommateurs auraient intérêt à se tourner vers un bien substitut. À l'inverse, les marchés où la demande est peu élastique peuvent supporter une marge plus élevée sans que les consommateurs modifient leur choix de façon sensible pour un produit substitut.

La règle de fixation des prix exprimée en (8.2) permet à l'entreprise d'atteindre l'équilibre budgétaire, tout en minimisant la distorsion par rapport à l'optimum de premier rang (pour lequel les prix sont égaux aux coûts marginaux). Même si les consommateurs à faible élasticité couvrent une plus grande part des coûts de fonctionnement et de maintenance, ils bénéficient tout de même de la présence des consommateurs dont l'élasticité est plus grande, puisque ceux-ci contribuent aussi à l'équilibre budgétaire de l'entreprise.

8.2.4 Prise en compte des élasticités croisées

Jusqu'à maintenant, il a été question de deux catégories de consommateurs mais d'un seul bien ou service. On peut interpréter la règle (8.2) comme s'appliquant à

[8] Pour une présentation plus poussée, voir Brown et Sibley (1986). Voir également Ramsey (1927) et Boiteux (1956).

la demande pour deux biens différents mais à condition que la demande d'un bien dépende uniquement de son prix. Dans de nombreuses situations, les différents services dont il faut établir les tarifs sont cependant des substituts ou des compléments. Par exemple, l'électricité aux heures creuses est, jusqu'à un certain point, un substitut pour l'électricité aux heures de pointe. La quantité demandée dans une période dépend non seulement du tarif pour cette période mais également de celui qui s'applique aux autres périodes. On peut toujours choisir de faire la lessive durant les heures creuses plutôt qu'en période de pointe, en fonction du tarif pour les différentes périodes. Il importe alors d'en tenir compte dans la dérivation des tarifs optimaux.

Supposons que l'entreprise vende deux services et que la demande pour le service i soit donnée par $q_i = d_i\,(p_1, p_2)$. Convenons de noter $\eta_{12}\,(p_1, p_2)$ l'élasticité croisée de la demande du service 1 par rapport au prix du service 2. De même, $\eta_{21}\,(p_1, p_2)$ est l'élasticité croisée de la demande du service 2 par rapport au prix du service 1. La règle (8.2) devient alors :

$$\frac{p_1 - c_1}{p_1} = \frac{\lambda}{s_1} \qquad \frac{p_2 - c_2}{p_2} = \frac{\lambda}{s_2} \tag{8.4}$$

où :

$$s_1 = \frac{\eta_2\eta_1 - \eta_{12}\eta_{21}}{\eta_2 - \eta_{12}\dfrac{p_2q_2}{p_1q_1}} \qquad s_2 = \frac{\eta_1\eta_2 - \eta_{21}\eta_{12}}{\eta_1 - \eta_{21}\dfrac{p_1q_1}{p_2q_2}}$$

Les termes s_1 et s_2 sont souvent appelés les super élasticités des demandes pour les deux biens. Ils deviennent respectivement η_1 et η_2 quand $\eta_{21} = \eta_{12} = 0$. À noter que les termes c_1 et c_2 peuvent ne pas être constants et même dépendre de tout le vecteur (q_1, q_2). La formule pour le cas où l'entreprise produit plus de deux biens est donnée à l'annexe 8.A.2.

8.3 La tarification non linéaire

Si l'on se contente d'une tarification linéaire, définie par un seul nombre ou monôme, la formule de Ramsey-Boiteux indique comment faire payer les différents types de consommateurs de manière à maximiser le bien-être social. Cependant, la théorie économique nous enseigne qu'il est possible de faire mieux, en offrant aux consommateurs un menu de différents tarifs polynômes, parmi lesquels chacun peut librement choisir. Un tarif polynôme est un tarif non linéaire, défini par différents prix qui s'appliquent à différentes caractéristiques de la demande. Un tarif non linéaire peut, par exemple, être composé d'une charge fixe et de différents prix par unité pour différentes utilisations de l'infrastructure. Cette section débute avec la définition d'un tarif binôme (à deux parties). Ensuite, on définit un menu de tarifs binômes et on généralise enfin cette définition aux tarifs polynômes.[9]

8.3.1 Menu de tarifs polynômes

Un *tarif binôme* est défini par un couple (f, p), où f est une charge fixe, par période de temps par exemple, et p une charge variable qui s'applique à l'utilisation de l'infrastructure (nombre de passages, nombres de minutes, distance parcourue, etc.). Considérons maintenant une suite de tarifs binômes $(f_1, p_1), (f_2, p_2), (f_3, p_3), \ldots$, telle que :

$$p_1 > p_2 > p_3 > \cdots$$
$$f_1 < f_2 < f_3 < \cdots$$

Cette suite constitue un *menu de tarifs binômes*, si l'on permet aux consommateurs de choisir, dans cette suite, le couple (f_i, p_i) suivant lequel ils vont être facturés. En supposant qu'ils vont choisir le meilleur tarif, c'est-à-dire celui qui minimise leurs dépenses totales, on obtient la courbe de facturation illustrée dans la Figure 8.1. Cette courbe illustre la recette totale obtenue d'un consommateur, en fonction de son utilisation de l'infrastructure. Chaque paire (f_i, p_i) définit une droite d'ordonnée à l'origine f_i et de pente p_i. Cependant, seules les parties pleines de la droite doivent être considérées, puisque tout point des parties en pointillés est dominé, en termes de coût, par un point situé en-dessous, sur une autre droite.

Le concept de tarif binôme peut être généralisé à un nombre quelconque de composantes. Par exemple, un tarif peut prendre la forme (f_i, p_i, r_i, s_i), où f_i est un charge fixe et p_i, r_i et s_i représentent des charges variables, chacune afférente à une caractéristique différente du service. Par exemple, p_i pourrait être le prix à la minute d'une communication Internet, r_i celui du volume d'information téléchargée et s_i celui du volume téléversé. Un tel vecteur est un tarif polynôme. Une suite de tarifs polynômes est un *menu de tarifs polynômes*.

La théorie économique récente nous enseigne qu'il est toujours possible de faire mieux avec un menu de tarifs polynômes qu'avec un tarif linéaire, disons $p_1 > c$. Plus exactement, il est possible d'avantager certains consommateurs, sans en défavoriser d'autres, tout en augmentant les recettes nettes. On peut comprendre comment en considérant deux consommateurs, l'un à faible demande et l'autre à forte demande. Soit q_1 et q_2 les utilisations respectives de l'infrastructure par ces deux consommateurs à un

[9] Pour une présentation plus extensive, voir Wilson (1993).

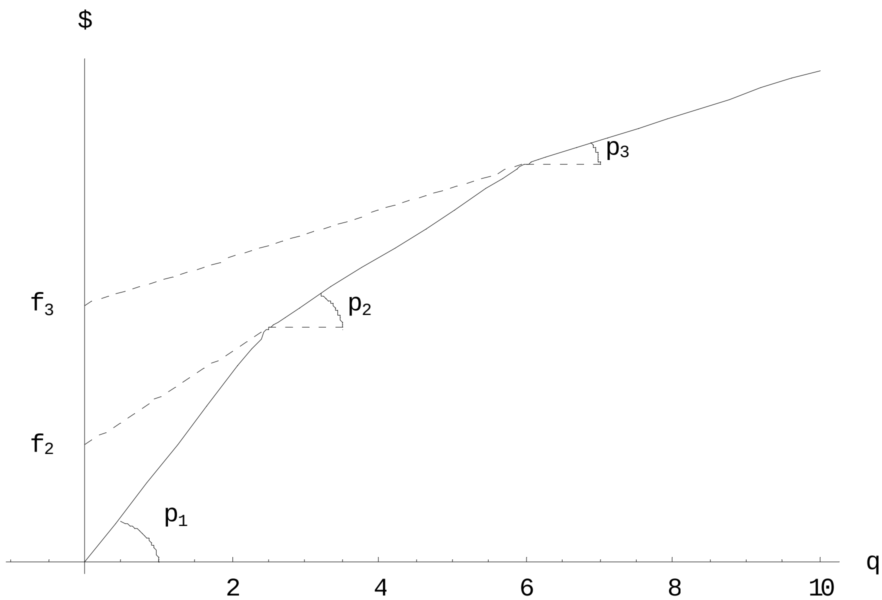


Figure 8.1 – Courbe des charges avec un menu de tarifs binômes

prix unique p_1. Supposons $q_1 < q_2$ et proposons maintenant le menu $\{(f_1, p_1), (f_2, p_2)\}$ aux consommateurs, avec $p_2 < p_1$ et des charges fixes $f_1 = 0$ et $f_2 = (p_1 - p_2)q_2$. Les consommateurs peuvent choisir la même tarification que précédemment, c'est-à-dire p_1, puisque $f_1 = 0$, ou bien ils peuvent choisir (f_2, p_2). La charge fixe f_2 satisfaisant :

$$f_2 + p_2 q_2 = p_1 q_2$$

le consommateur 2, en choisissant (f_2, p_2), paie la même facture qu'avec un prix unique p_1 et consomme la même quantité q_2. Toutefois, étant donné que le prix variable par unité de service est plus faible $(p_2 < p_1)$, ce consommateur peut envisager d'augmenter sa demande, au moins à long terme, ce qui se traduira par une augmentation des recettes de l'entreprise.

En ce qui concerne le consommateur 1, il va vraisemblablement choisir de conserver la tarification initiale p_1, puisque, avec $q_1 < q_2$:

$$f_2 > (p_1 - p_2)\, q_1$$

et donc :

$$f_2 + p_2 q_1 > p_1 q_1$$

à moins qu'il ne trouve plus avantageux de payer la charge fixe f_2 et d'accroître sa consommation au prix p_2. En tout état de cause, il ne se plaindra pas, sa situation ne pouvant évoluer que dans le bon sens. Le fait que toutes les structures tarifaires soient disponibles à tous les consommateurs confère à cette forme de tarification un principe d'équité notable, celui d'*absence d'envie*. Chaque utilisateur peut choisir le tarif qui convient le mieux à ses besoins et ses particularités.

Si le gérant de l'infrastructure n'a pas besoin des recettes supplémentaires qu'apporterait ce menu de tarifs (s'il a déjà atteint l'équilibre budgétaire), il peut le redistribuer aux consommateurs en réduisant les charges f_i et p_i. Ainsi, on a montré comment, en partant d'un prix unique linéaire p_1, il est possible d'améliorer le bien-être de **chaque agent** en introduisant une autre tarification (f_2, p_2), où $p_2 < p_1$.

8.3.2 Menu optimal

Une question venant naturellement à l'esprit est de savoir s'il existe une structure optimale pour de tels tarifs. La réponse est positive. Cette structure optimale dépend de la nature des différentes demandes, plus particulièrement des élasticités $\eta_1(p)$ et $\eta_2(p)$ des deux consommateurs ou groupes de consommateurs (marchés, demandes). En fait, quand on considère des tarifs polynômes, il faut distinguer l'élasticité par rapport à la charge fixe de l'élasticité par rapport à la charge variable. Ces élasticités sont en principe différentes et la structure tarifaire optimale dépend des deux.

Dans la recherche du menu optimal de tarifs, on doit s'assurer que le consommateur 1 choisira, volontairement et naturellement, le tarif (f_1, p_1), alors que le consommateur 2 préférera (f_2, p_2). En outre, les différents tarifs (f_i, p_i) doivent être conçus de sorte que la contrainte d'équilibre budgétaire soit vérifiée et que l'infrastructure soit utilisée de façon optimale, c'est-à-dire à son maximum.

Si l'on peut améliorer l'utilisation de l'infrastructure, tout en satisfaisant la contrainte d'équilibre budgétaire, en passant d'un tarif linéaire unique p_1 à un menu de tarifs binômes $\{(f_1, p_1), (f_2, p_2)\}$, on peut améliorer davantage l'utilisation de cette infrastructure avec un menu $\{(f_1, p_1)\,,\ (f_2, p_2)\,,\ (f_3, p_3)\}$ et ainsi de suite. Le nombre maximum de composantes à un menu de tarifs polynômes correspond au nombre de différents types de consommateurs ou groupes de consommateurs qui utilisent l'infrastructure.

Rappelons que, en construisant ce menu de tarifs, on doit s'assurer que chaque type de consommateur trouvera avantageux de choisir le tarif qui lui est destiné, c'est-à-dire que le consommateur 1 doit préférer (f_1, p_1) à tout autre tarif, le consommateur 2 le tarif (f_2, p_2), le consommateur 3 le tarif (f_3, p_3) et ainsi de suite. On dit alors que les tarifs permettent l'auto-sélection des consommateurs, ou encore que ces tarifs sont auto-sélectifs.

Il faut bien sûr traiter cette complication supplémentaire avec beaucoup d'attention. En particulier, les différents tarifs (f_i, p_i) doivent être déterminés de manière à satisfaire la contrainte d'équilibre budgétaire, tout en maximisant l'utilisation de l'infrastructure. L'élaboration de tarifs polynômes à n-parties est évidemment plus complexe que celle de tarifs binômes.

8.3.3 Un exemple

On a vu qu'une tarification polynôme peut être plus efficace qu'un tarif linéaire simple. On a aussi insisté sur le problème d'auto-sélection qu'il faut résoudre lorsqu'on établit une telle tarification. Voyons maintenant un exemple illustrant ces idées. En particulier, on va déterminer un couple de tarifs binômes qui permette d'atteindre une solution plus efficace que celle obtenue par les prix de Ramsey-Boiteux.

Supposons qu'il existe deux consommateurs, dont les fonctions de demande respectives sont :

$$\begin{aligned} q_1 &= 100 - 10\,p_1 \\ q_2 &= 10 - 0.5\,p_2 \end{aligned}$$

Le coût total qui doit être couvert est fixe et égal à 75$.

Tarifs de Ramsey-Boiteux

Les prix de Ramsey-Boiteux sont les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{10p_1}{100 - 10p_1} = \dfrac{0.5p_2}{10 - 0.5p_2} \\ 100p_1 - 10p_1^2 + 10p_2 - 0.5p_2^2 = 75 \end{cases}$$

La première équation est équivalente à $\eta_1(p_1) = \eta_2(p_2)$ et la deuxième représente la contrainte d'équilibre budgétaire. La solution est :

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.6698 \\ p_2 &= 1.3397 \end{aligned}$$

Si ces prix sont proposés aux consommateurs, leurs demandes respectives sont :

$$\begin{aligned} q_1 &= 93.302 \\ q_2 &= 9.3301 \end{aligned}$$

Tarifs binômes auto-sélectifs

Avec les tarifs de Ramsey-Boiteux, le consommateur 2 préférerait payer p_1 plutôt que p_2. Ce résultat est général : la tarification à la Ramsey-Boiteux ne satisfait pas au principe d'absence d'envie. Cela signifie qu'elle ne satisfait pas à la contrainte d'auto-sélection non plus : le consommateur 2 a intérêt à se faire passer pour le consommateur 1.

On va à présent montrer qu'il existe une structure tarifaire (un menu) $\{(f_1, p_1), (f_2, p_2)\}$ permettant d'atteindre une meilleure solution que celle obtenue avec les prix de Ramsey-Boiteux. Rappelons que f_i est une charge fixe, p_i un tarif par unité consommée et que chaque consommateur peut librement choisir entre les deux paires (f_1, p_1) et (f_2, p_2). Cette structure tarifaire est $\{(8, 0.574), (2, 1.1493)\}$. Les deux composantes de ce menu de tarifs binômes définissent les deux droites tracées sur la Figure 8.2. La courbe formée des deux segments pleins donne les dépenses totales en fonction de la quantité demandée.

Pour l'instant, faisons l'hypothèse simplificatrice que les charges fixes, 8 ou 2, n'ont pas d'impact sur la demande des consommateurs. Seules les charges variables entrent en compte dans leurs fonctions de demande. Si le consommateur 1 choisit la paire $(8, 0.574)$ et le consommateur 2 la paire $(2, 1.1493)$, leurs demandes respectives sont :

$$\begin{aligned} q_1 &= 94.26 \\ q_2 &= 9.425 \end{aligned}$$

Ces consommations sont supérieures à celles calculées avec les prix de Ramsey-Boiteux. En outre, les recettes liées à cette tarification sont exactement de 75\$.

Il reste à montrer que le consommateur 1 va effectivement choisir la paire $(8, 0.574)$ et le consommateur 2 la paire $(2, 1.1493)$. Sur la Figure 8.2, on voit que $q_1 = 94.26$ coûte moins cher au consommateur 1 avec le premier tarif qu'avec le deuxième et que $q_2 = 9.425$ coûte moins cher au consommateur 2 avec le deuxième tarif qu'avec le premier. De plus, q_1 se situe à droite du point d'équivalence des deux tarifs, alors que q_2 se situe à gauche de ce point. Cependant, on devrait comparer les surplus des consommateurs plutôt que les dépenses totales. Que sont ces surplus ?

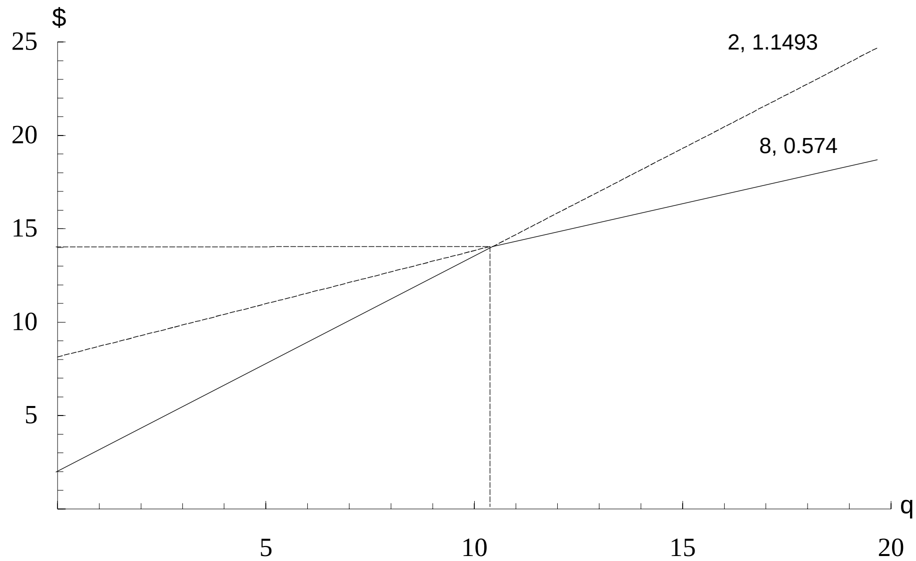


Figure 8.2 – Deux tarifs binômes

Considérons la fonction de demande représentée dans la Figure 8.3. Si le tarif linéaire est 5$, alors le surplus des consommateurs dans ce marché est donné par l'aire ombrée, moins toute charge fixe f. En effet, on peut interpréter la courbe de demande comme représentant le prix maximum que le consommateur est prêt à payer pour chaque unité de service. Ainsi, s'il paie en réalité 5$ pour une unité qu'il serait prêt à payer 10$, comme pour la 5^{e} unité, le consommateur réalise un surplus de 5$ sur cette unité. En reproduisant ce même raisonnement pour toutes les unités de bien achetées, on obtient le triangle ombré, qui représente le surplus brut du consommateur. Le surplus net s'obtient en retranchant la charge fixe qu'il doit payer pour avoir accès à l'infrastructure. Avec une fonction de demande de la forme $q = b - ap$, le surplus, fonction de f et de p, est facile à calculer. Il s'écrit :

$$S\left(f,p\right) = \frac{\left(\frac{b}{a} - p\right)\left(b - a\,p\right)}{2} - f$$

Appliquons cette formule pour calculer le surplus du consommateur 1 avec chacun des deux tarifs binômes. On obtient :

$$\begin{aligned} S_1(8,\ 0.574) &= 436.24 \\ S_1\left(2,\ 1.1493\right) &= 389.67. \end{aligned}$$

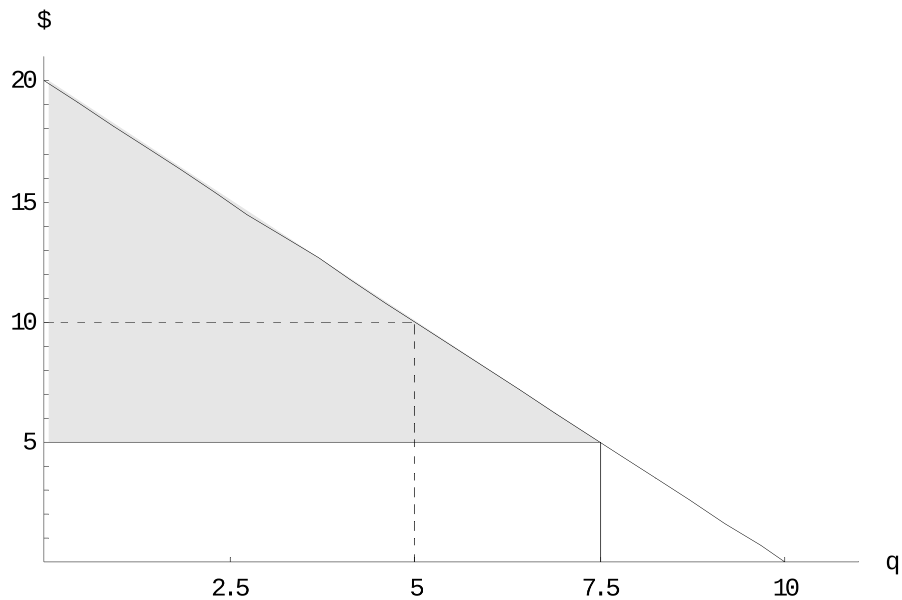


Figure 8.3 – Le surplus des consommateurs lorsque le prix est fixé à 5$

Il est clair que le consommateur 1 gagne à choisir la première paire de la structure tarifaire, $(8, 0.574)$. Quant au consommateur 2, on obtient :

$$\begin{aligned} S_2(8,\ 0.574) &= 86.34 \\ S_2\,(2,\ 1.1493) &= 86.83. \end{aligned}$$

Le consommateur 2 a donc intérêt à choisir le tarif $(2, 1.1493)$.

En résumé, cette tarification, où les paires (charge fixe, charge variable) ont été spécialement déterminées pour les consommateurs 1 et 2, entraîne une solution meilleure que celle de Ramsey-Boiteux et satisfait au principe de non envie et à la condition d'auto-sélection. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer un tarif à un consommateur. Cette tarification permet aussi d'accroître le surplus de chaque consommateur. Remarquons aussi que les charges variables de chaque tarif tiennent compte des différentes élasticités de la demande. On a en effet $p_1 < p_2$ comme avec la règle de Ramsey-Boiteux. En fait, p_1 et p_2 sont les prix optimaux de Ramsey-Boiteux pour $f_1 = 8$ et $f_2 = 2$. Toutefois, ces choix de f_1 et f_2 ne sont pas nécessairement optimaux.

Prise en compte de l'effet de la charge fixe

Jusqu'à maintenant, on a supposé que les charges fixes, f_1 et f_2, n'avaient aucun impact sur la demande. En réalité, elles peuvent influencer la demande. Supposons donc que la partie fixe du tarif a un effet négatif sur la quantité demandée. Par exemple, supposons que la fonction de demande soit de la forme $d(f,p) = b - ap - cf$. La fonction de surplus d'un consommateur s'écrit alors :

$$S(f,p) = \frac{\left(\frac{b-cf}{a} - p\right)(b - cf - ap)}{2} - f$$

Soit les demandes des deux consommateurs :

$$\begin{aligned} q_1 &= 100 - 10\,p_1 - 0.5\,f_1 \\ q_2 &= 10 - 0,5\,p_2 - 0.5\,f_2 \end{aligned}$$

Avec de telles fonctions de demande, voyons que les tarifs non linéaires :

$$\{(11.2638,\ 0.574),\ (4.7751,\ 1.1493)\}$$

satisfont la condition d'auto-sélection. En effet, les surplus du consommateur 1 selon ces deux tarifs sont :

$$\begin{aligned} S_1(11.2638,\ 0.574) &= 381.4832 \\ S_1(4.7751,\ 1.1493) &= 366.052 \end{aligned}$$

Ainsi, il est clair que le consommateur 1 va choisir le premier tarif (11.2638, 0.574). Les surplus du consommateur 2 sont :

$$\begin{aligned} S_2(11.2638,\ 0.574) &= 5.3915 \\ S_2(4.7751,\ 1.1493) &= 44.7555 \end{aligned}$$

Le consommateur 2 préfère donc le deuxième tarif (4.7751, 1.1493). En somme, les consommateurs 1 et 2 ont toujours intérêt à choisir les tarifs respectifs $(11.2638, 0.574)$ et $(4.7751, 1.1493)$ qui ont été conçus pour eux.

8.4 La tarification linéaire et non linéaire en pratique

Nous présentons maintenant une brève revue de certains articles qui étudient la tarification à la Ramsey-Boiteux et la tarification non linéaire (polynôme). Ce survol inclut des analyses empiriques.

8.4.1 La tarification à la Ramsey-Boiteux

Le secteur de l'électricité fait partie des secteurs où les tarifs optimaux sont utilisés de façon extensive. Dans une étude portant sur un échantillon de fournisseurs privés d'électricité, Naughton (1988) développe un modèle de régulation par les prix où les préférences du régulateur sur les catégories de consommateurs peuvent varier. Cette analyse montre que la structure tarifaire alors en vigueur favorisait davantage les petits consommateurs, résidentiels ou commerciaux, en leur facturant, pour des raisons d'équité, des prix inférieurs aux prix de second rang de Ramsey-Boiteux. En général, les consommateurs commerciaux étaient les moins favorisés (car les moins politiquement organisés). La règle de Ramsey-Boiteux aurait commandé d'augmenter légèrement les prix destinés à la consommation résidentielle, sans modifier les prix à la consommation industrielle, de réduire de façon significative les prix de l'électricité à usage commercial et d'augmenter les charges fixes.

Dans de nombreux pays, on a vu la tarification traditionnelle de l'électricité (tarif uniforme ou tarifs par période) évoluer vers de nouvelles formes qui tiennent compte des coûts marginaux variables de fournir le service et ce de façon dynamique. Une particularité importante de ces nouveaux tarifs est qu'ils sont le plus souvent proposés comme options au tarif de base, de sorte que les consommateurs peuvent choisir entre l'ancien et les nouveaux tarifs. Sur sept pays européens étudiés, six offrent des tarifs par période comme alternative au tarif unique de base.

Dans une expérience de tarification dynamique réalisée en Finlande, Räsänan et al. (1997) proposent un grille de tarifs qui aurait donné au consommateur la possibilité de choisir le tarif le mieux adapté à son type de consommation. Il y a quatre types de tarifs envisagés : un prix uniforme, un tarif avec prix par période, un menu de deux prix uniformes et un menu de deux tarifs avec prix par période. Cette étude montre que l'option de deux tarifs avec prix par période donne les bénéfices les plus élevés. En permettant aux consommateurs de choisir entre plusieurs tarifs, on peut accroître le bien-être social.

Un autre secteur dans lequel on a constaté que la règle de Ramsey-Boiteux était utile est celui des transports. La tarification à la Ramsey-Boiteux a été proposée pour facturer l'accès aux aéroports non congestionnés. S'il existe des excès de capacité, la tarification au coût marginal entraîne un déficit. Cela conduit l'aéroport à imposer des frais fixes supérieurs aux coûts marginaux, ce qui provoque d'autres inefficacités. En général, la base pour les frais d'atterrissage est le poids de l'appareil (poids maximum à l'atterrissage ou poids maximum au décollage). Une étude de Morrison (1982) évalue les prix optimaux de Ramsey-Boiteux pour les aéroports non encombrés et montre que les frais optimaux d'atterrissage doivent dépendre du coût marginal de l'aéroport, de l'élasticité de la demande et du coût du vol. Ces frais doivent croître avec le coût marginal de l'aéroport et le coût du vol et décroître avec l'élasticité de la demande. Ces trois paramètres peuvent être liés à deux particularités de chaque vol : la taille (ou le poids) de l'appareil et la distance qu'il parcourt. Cette étude conclut que les prix d'accès à un aéroport devraient être basés sur la taille (le poids) et la durée du vol.

Des prix à la Ramsey-Boiteux ont aussi été calculés pour le transport en commun dans la partie est de la région de la Baie de San Francisco. Dans cette région, les transporteurs ont un monopole naturel puisque leur coût marginal est inférieur au coût moyen. Cela implique qu'une tarification au coût marginal entraîne un déficit. Train (1977) a montré que, en définissant des prix de Ramsey-Boiteux, les utilisateurs du service par autobus subventionneraient l'usage du rail. Cependant, dans cette région de la Baie de San Francisco, les usagers de l'autobus ont des revenus plus faibles que les usagers du chemin de fer. Du point de vue de l'équité, cette subvention croisée semble tout à fait inopportune. L'étude propose alors que les prix de Ramsey-Boiteux soient ajustés de manière à prendre en compte ces considérations d'équité.

L'application de la tarification à la Ramsey-Boiteux aux services postaux a aussi été abondamment étudiée. Les Services postaux des États-Unis (USPS) ont été créés en 1970 en tant que compagnie gouvernementale semi-autonome. L'USPS est contrainte à l'équilibre budgétaire et chaque catégorie de courrier doit prendre en charge les coûts directs et indirects qui lui sont imputables, ainsi qu'une fraction des coûts institutionnels. Pour partager les coûts institutionnels, non imputables à une catégorie particulière de courrier, les services postaux se sont, pour un temps, servis de la règle de l'inverse de l'élasticité. Mais même si cette règle était utilisée en 1974, il n'existait pas d'estimation de ces élasticités, qui n'ont été disponibles qu'en 1976. La méthode utilisée alors consistait à classer les catégories de courrier suivant les élasticités relatives de la demande.

La règle simple de l'inverse de l'élasticité aurait été appropriée si les postes produisaient des services répondant à des demandes indépendantes. Cependant, il existe des relations de substitution entre les différentes catégories de courrier. L'USPS, reconnaissant l'existence des élasticités-prix croisées non nulles, a tenté d'introduire cette notion dans l'établissement de ses tarifs. En 1978, l'application de la règle de Ramsey-Boiteux a tenu compte des élasticités-prix croisées, sous forme de contrainte, et plus tard, les modèles de demandes utilisés par USPS ont explicitement pris en compte les effets prix croisés.

Une autre particularité, qui distingue encore les services postaux de beaucoup d'autres services publics, est l'existence de services substituts ou compléments dans le secteur privé. Sherman et George (1979) ont remarqué que USPS ne prenait pas correctement en compte la concurrence des produits du secteur privé, ni les effets de ses propres tarifs sur les profits du secteur privé. Ils dérivent un système d'équations permettant de caractériser les prix optimaux en prenant en compte les interdépendances avec le secteur privé. Scott (1986) compare les tarifs appliqués par USPS avec ceux qui seraient obtenus en appliquant la règle de Ramsey-Boiteux généralisée, tout en tenant compte de la concurrence. Le fait que chaque prix soit augmenté de la "valeur du service" que représente la partie du coût institutionnel a pour conséquence que les tarifs choisis par USPS sont assez proches de ceux calculés grâce aux principes généraux de la règle de Ramsey-Boiteux, même si on n'utilise pas explicitement cette dernière règle.

En Angleterre, la poste n'a pas fait d'études statistiques élaborées des demandes de ses produits, même si quelques travaux préliminaires ont été réalisés. Albon (1989) évalue la tarification à la Ramsey-Boiteux sous le régime alors en vigueur de deux niveaux de prix (première et deuxième classes) et montre que la différence de prix entre les courriers de première et deuxième classes est bien plus importante que ce qu'elle devrait être. Cette étude constate aussi que la tarification des envois nationaux ne dépend pas assez explicitement de la distance. L'analyse suggère une structure de prix à quatre niveaux, suivant la catégorie (première et deuxième classes) et la destination (urbain et rural). Une tarification à la Ramsey-Boiteux avec quatre niveaux de tarifs aurait entraîné une augmentation du volume de courrier envoyé.

Dans une autre étude du service téléphonique, Train (1994) calcule les tarifs auto-sélectifs optimaux pour Bell of Pennsylvania, et les compare aux tarifs uniques et à la tarification au coût marginal. L'analyse montre que les tarifs auto-sélectifs conduisent à un surplus social supérieur à celui obtenu avec la tarification obligatoire au coût marginal.

8.4.2 Tarifs polynômes

Les compagnies d'électricité utilisent fréquemment des tarifs binômes ou polynômes. Par exemple, la compagnie Commonwealth Edison proposait en 1976 un tarif polynôme de la forme suivante : un abonnement de 1.20$ et deux prix unitaires, 0.0418$ et 0.03148$, suivant que la consommation était inférieure ou supérieure à 100 kWh (Brown et Sibley, 1986). Dans cet exemple, l'abonnement est le même, quelle que soit la consommation. Dans d'autres cas, la charge fixe elle-même peut varier avec la consommation. Électricité de France (EDF) propose ce genre de tarification. Les tarifs d'EDF reposent sur un système élaboré de prix non linéaires. Un exemple est le tarif bleu qui offrent trois options aux consommateurs. Chaque option consiste en un abonnement mensuel et un prix par unité d'énergie consommée. L'abonnement est calculé suivant un programme non linéaire et est d'autant plus élevé que les besoins sont grands. Les consommateurs peuvent choisir entre les trois options suivantes : tarif de base, tarif "heures creuses", tarif "périodes critiques" (Wilson, 1993).

Par rapport au tarif de base, l'abonnement du tarif "heures creuses" est plus élevé et celui du tarif "périodes critiques" est plus faible. Avec le tarif de base, le prix unitaire de l'électricité est constant alors que les deux autres tarifs ont chacun un deuxième prix. Avec le tarif "heures creuses", le prix est réduit pendant les périodes creuses alors que le tarif "périodes critiques" impose un prix très élevé pour l'électricité consommée en période de pointe, pénalisant la consommation en période de très forte demande où la capacité est saturée. Ce tarif bleu est en fait une combinaison de trois tarifs binômes, chacun consistant en un abonnement et une charge pour l'énergie consommée. Les trois options offrent à chaque consommateur la possibilité de choisir le tarif binôme qui minimisent ses dépenses étant donné son profil de consommation.

Il existe de surcroît un tarif jaune et un tarif vert, qui sont dans l'ensemble similaires au tarif bleu, si ce n'est qu'ils font dépendre la facturation d'autres facteurs, comme la saison, le mois, la durée de la consommation, etc. Mais, en général, les petits consommateurs ont le choix entre des tarifs moins raffinés et moins complexes que les grands consommateurs (industries, etc.). Avec la mise en œuvre de tels tarifs non linéaires, EDF couvre ses coûts et incite les consommateurs à utiliser les ressources énergétiques de façon plus efficace.

Lorsque le prix payé par les consommateurs dépend de la quantité consommée, il est fréquent que ce prix soit dégressif : plus on consomme, plus le prix unitaire est faible. Dans certains cas cependant, cela peut être le contraire : par exemple, un prix progressif peut être opportun, afin d'encourager l'utilisation efficace de l'énergie. Ainsi, la compagnie China Light and Power de Hong Kong est passée d'un tarif dégressif à un tarif uniforme en 1994, puis à un tarif progressif à trois niveaux en 1996 et enfin à un tarif progressif à quatre niveaux en 1998. Les prix élevés pour les niveaux supérieurs de consommation découragent le gaspillage, alors que les prix faibles pour les consommations des niveaux inférieurs sont destinés à protéger les usagers à faibles revenus qui consomment peu d'énergie. Certaines métropoles, comme Tokyo ou San Francisco, appliquent aussi des tarifs progressifs pour les particuliers.

La facturation des services téléphoniques est une autre illustration de l'application des tarifs polynômes. Aux États Unis, depuis 1984, les fournisseurs de services interurbains paient deux charges (par minute) pour connecter leurs usagers aux réseaux existants : une charge pour la ligne afin de couvrir les coûts d'accès à la boucle locale, invariants par rapport au trafic, et une autre charge, qui dépend du trafic, couvrant les services de commutation de l'appel ainsi que les frais d'interurbain. En général, ces charges sont transférées aux consommateurs par le biais d'un prix d'appel interurbain (par minute) uniforme. Comme ces frais devenaient considérables pour certains grands consommateurs, ces derniers ont commencé à installer des systèmes de connexions directes, afin de contourner la boucle locale et la commutation des appels. En 1986, les opérateurs ont déposé une requête auprès de la Federal Communications Commission (FCC) afin d'obtenir qu'un prix non linéaire soit facturé directement aux consommateurs, dans le but d'empêcher le contournement pratiqué par les grands consommateurs. Les prix proposés auraient avantagé les grands consommateurs, mais auraient désavantagés les usagers consommant peu. Heyman et al. (1987) ont calculé le tarif polynôme (la combinaison de tarifs binômes) qui aurait assuré qu'aucun type de consommateurs ne soit désavantagé par rapport au tarif uniforme. Leurs résultats apparaissent dans le Tableau 8.1, de même que les prix proposés par la compagnie NYTel.

Utilisation	Tarif non linéaire proposé par NYTel ($/min)	Tarif polynôme proposé par Heyman et al.	
		Abonnement ($/mois)	Prix unitaire ($/min)
0-60	0.0961	0	0.0756
61-1000	0.0713	0	0.0756
1001-2000	0.0484	0.52	0.0752
2001-7000	0.0352	29.18	0.0674
7001-20000	0.0302	342.17	0.0446
20000+	0.0269	3 495.58	0.0238

Tableau 8.1 – Comparaison d'un prix non linéaire et d'un tarif polynôme

Les usagers, de par leur consommation, choisissent le tarif auquel ils seront soumis. Le tarif polynôme proposé par Heyman et al. maximise le surplus social et avantage les grands consommateurs sans désavantager les usagers à faible consommation.

Dans certains cas, des tarifs binômes ou polynômes se cachent derrière des services prétendument différents. À titre d'illustration, AT&T, dans les années 1980, vendait un service de téléphonie WATS ("Wide Area Telephone Service") à un tarif présentant des ristournes à partir de certaines quantités consommées, alors qu'il proposait un service

“Message Toll” à un prix uniforme, consistant en un prix unitaire élevé. L’argument avancé par la compagnie était que ces services étaient distincts et donc qu’ils pouvaient être vendus à des prix différents. La FCC a cependant jugé que ces deux services avaient tellement de points communs qu’on pouvait considérer qu’ils constituaient un même et unique service et que leur différence de prix devait être justifiée par des différences de coûts seulement. D’après la FCC, c’était un cas de discrimination permettant de faire payer moins cher aux grands consommateurs, ce qui d’après le Communications Act était illégal (Brown and Sibley, 1986).[10]

8.4.3 Remarques

Certaines caractéristiques se retrouvent de façon récurrente dans la mise en œuvre des tarifs optimaux, qu’ils soient simples ou polynômes. En général, les industries où l’on retrouve ce genre de tarifs sont des monopoles naturels qui, par définition, ont des coûts marginaux de production substantiellement plus faibles que leurs coûts moyens. Il existe différentes méthodes de fixation des prix qui ne correspondent pas toujours à l’application explicite de la méthode de Ramsey-Boiteux (la règle de l’inverse de l’élasticité). Cependant, même lorsque d’autres méthodes sont employées, les éléments essentiels de la méthode de Ramsey-Boiteux sont implicitement compris dans les prix et ceux-ci ne divergent jamais trop des prix optimaux de Ramsey-Boiteux. Lorsque différents types de produits sont concernés, la question de l’équité émerge, puisqu’il existe des possibilités de subventions croisées entre les différents groupes de consommateurs. Les paramètres des fonctions de coût et de demande sont indispensables à la détermination des prix optimaux. Enfin, notons que ces informations peuvent être obtenues avec plus ou moins de facilité suivant les contextes étudiés.

8.5 Conclusion

La valorisation des infrastructures passe en partie par la répartition efficace de leur coût. De plus, on exige souvent qu’une infrastructure se finance par la tarification, en totalité ou du moins en partie. Dans ce chapitre, nous avons voulu montrer comment on peut approcher cette question de la manière la plus efficace possible en fixant les prix de manière à se rapprocher le plus possible d’un optimum de premier rang. En pratique, diverses contraintes, autres que la contrainte budgétaire, peuvent influen-

[10] On a vu que la discrimination dans les prix pouvait se justifier par des considération d’efficacité économique, ce qui ne veut pas dire qu’elle soit équitable.

cer la tarification. L'approche générale et les principes de tarification que nous avons développés dans ce chapitre permettent de considérer des contraintes de toutes sortes.

Un des concepts qui ont été explorés est celui de la tarification à la Ramsey-Boiteux, qui consiste à fixer les prix des différents biens ou services en fonction de l'inverse de l'élasticité de leurs fonctions de demande. Les tarifs polynômes semblent encore plus intéressants. Ils peuvent être construits comme des menus de différentes composantes, où chaque composante comprend une charge fixe (abonnement) et des prix relatifs à différentes caractéristiques de la consommation. L'aspect le plus important de cette approche est que les consommateurs ont la liberté de choisir, dans le menu, la composante qui leur convient le mieux.

Par contre cette tarification n'est pas immune aux critiques au plan de l'équité. De plus, dans un contexte concret, il peut être difficile d'avoir toute l'information requise (par exemple l'information sur les demandes) pour calculer les prix de Ramsey-Boiteux. La tâche risque de s'avérer encore plus difficile s'il s'agit d'établir un menu de tarifs non linéaires.

8.A Annexes

8.A.1 Les élasticités de la demande

Les prix influencent les recettes de deux façons. Un prix appliqué à un bien (ou service) donné engendre une recette précise mais ce prix a vraisemblablement un impact sur la quantité totale demandée. Ainsi, une augmentation du prix peut accroître ou décroître les recettes. Le résultat final dépend de l'amplitude de la réaction de la demande à un changement des prix. Les économistes ont une mesure de cette amplitude : *l'élasticité de la demande*. Commençons par l'exemple d'une hypothétique demande :

prix	quantité échangée	recettes
1$	24	24$
2$	18	36$
3$	12	36$
4$	6	24$

Dans cet exemple, l'augmentation du prix de 1$ induit une baisse de 6 unités dans la quantité demandée, quel que soit le prix initial considéré. Cependant, l'impact sur la recette dépend de la situation de départ. Le concept d'élasticité permet de saisir cette caractéristique.

Pour un prix donné p, l'*élasticité de la demande*, dénotée $\eta(p)$, est définie par :

$$\eta(p) = -\frac{\text{\% variation de la quantité échangée}}{\text{\% variation du prix}}$$

Formellement, la définition est :

$$\eta(p) = -\frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = -\frac{\Delta q}{q} \times \frac{p}{\Delta p} = -\frac{\Delta q}{\Delta p} \times \frac{p}{q}$$

où q représente la quantité demandée, p le prix unitaire et Δ une variation de la variable (prix ou quantité). On peut réécrire ces formules de la manière suivante :

$$\text{\% variation de demande} = -\eta(p) \times \text{ \% variation du prix, c'est-à-dire}$$

$$\frac{\Delta q}{q} = -\eta(p) \times \frac{\Delta p}{p} \tag{8.6}$$

Ainsi, l'élasticité indique de quel pourcentage la demande va varier si le prix varie de 1%.

Prix	quantité	recette	Δp	$\bar{p}$	$\frac{\Delta p}{\bar{p}}$	Δq	$\bar{q}$	$\frac{\Delta q}{\bar{q}}$	η
1	24	24							
			1	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	-6	21	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
2	18	36							
			1	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	-6	15	$-\frac{2}{5}$	1
3	12	36							
			1	$\frac{7}{2}$	$\frac{2}{7}$	-6	9	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
4	6	24							

Tableau 8.2 – Calcul des élasticités

Le Tableau 8.2 donne les résultats du calcul des élasticités de l'exemple de demande, où $\bar{p}$ représente le prix moyen et $\bar{q}$ la quantité moyenne.
Une élasticité de $\frac{3}{7}$ ou 0.43 indique qu'une variation relative du prix de $\frac{2}{3}$ (1\$ par rapport à 1.5\$, ou 66%) induit une variation relative de signe opposé de $\frac{2}{9}$ (ou de -29%), c'est-à-dire :

$$-0.43 \times 0.66 = -\frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = -\frac{2}{7} = -0.29$$

Remarque

L'élasticité n'est généralement pas une constante. Elle varie en fonction du point de référence, c'est-à-dire en fonction du niveau de demande à partir duquel le changement de tarif est effectué ou considéré. C'est pour cette raison que l'on fait dépendre η de p : $\eta(p)$. Comme la demande q décroît, ou du moins n'augmente pas, lorsque le prix augmente, l'élasticité $\eta(p)$ augmente normalement avec le prix p. C'est le cas dans l'exemple précédent, bien que la pente de courbe de demande soit constante quel que soit le prix p : $\frac{\Delta q}{\Delta p} = -6$. L'élasticité croît avec p car le ratio $\frac{p}{q}$ augmente avec p.

La variation de la recette est aussi liée à l'élasticité. Un accroissement du prix entraîne une augmentation de la recette si et seulement si l'élasticité est inférieure à 1, c'est-à-dire si $\eta(p) < 1$. Une diminution du prix augmente les recettes si et seulement si l'élasticité est supérieure à 1, $\eta(p) > 1$.

La valeur de l'élasticité est essentiellement déterminée par trois facteurs :

– l'existence ou non de proches substituts : l'élasticité est d'autant plus grande qu'il existe des biens substituts, puisque les consommateurs peuvent éviter une augmentation du prix en achetant ces biens substituts.

– l'importance du bien dans le budget ou dans un sous-budget (par exemple, le coût du taxi entre la résidence et l'aéroport dans le coût total d'un déplacement Montréal-Paris ; plus cette part est faible, plus l'élasticité de la demande de service de taxi est faible).
– l'échelle de temps considérée : plus la période étudiée est longue, plus l'élasticité est élevée car plus nombreuses sont les possibilités d'ajustement.

Deux cas particuliers sont à mentionner. Le premier est celui de la demande *parfaitement inélastique*. La demande est alors totalement insensible aux variations de prix, au moins dans l'intervalle des prix considérés. Il est plausible que la demande soit inélastique à court terme, mais cela est moins probable à long terme. Le deuxième cas est celui de l'*élasticité constante*. Par exemple, si la demande peut être exprimée par la fonction $q = A\,p^{-\alpha}$ dans l'intervalle considéré, où A est une constante, alors $\eta(p) = \alpha$, quelles que soient les valeurs de p choisies dans l'intervalle. Un exemple d'une telle fonction est $q = \frac{1}{p}$.

Élasticités croisées

On peut définir d'autres élasticités, par rapport à d'autres variables, comme le revenu ou les prix des autres biens. Par exemple, supposons que la demande pour un bien i dépende non seulement de son prix p_i mais également du prix de $m-1$ autres biens. Formellement, la demande pour le bien i est donnée par $q_i = d_i\left(p_1, \ldots, p_m\right)$. On peut alors définir l'élasticité de la demande pour le bien i par rapport au prix du bien j par :

$$\eta_{ij}\left(p\right) = \frac{\Delta q_i}{\Delta p_j} \times \frac{p_j}{q_i}$$

On parle alors d'élasticité croisée.

8.A.2 Les prix de Ramsey-Boiteux dans le cas général

Une entreprise produit m biens et la demande pour le bien i est donnée par $q_i = d_i\left(p_1, \ldots, p_m\right),\ i = 1, \ldots, m$. On suppose d_i différentiable. Les élasticités croisées peuvent alors s'écrire : $\eta_{ij}\left(p\right) = \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{pj}{q_i}$. Supposons qu'on peut inverser le système de fonctions de demande pour obtenir $p_i = f_i\left(q_1, \ldots, p_m\right)$. On peut alors définir les élasticités croisées de ces fonctions de demande inverses : $\varphi_{ij}\left(q\right) = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{q_i}{p_j}$. L'usage veut que, dans le cas général (plus de deux biens), on exprime la règle de Ramsey-Boiteux en termes de ces dernières. De façon précise, les prix de Ramsey-Boiteux sont définis par :

$$\frac{p_i - c_i}{p_i} = \frac{\lambda}{s_i},\ i = 1, \ldots, m$$

où :

$$s_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \varphi_{ij} \frac{p_j q_j}{p_i q_i}}$$

Si $\varphi_{ij} = 0\ \forall j \neq i$, on a alors $\varphi_{ii} = \frac{1}{\eta_{ii}}$, si bien que $s_i = \eta_{ii},\ \forall i$. Autrement, la relation entre les η_{ij} et les φ_{ij} est plus complexe, si bien que chercher à exprimer la formule qui précède en termes des élasticités η_{ij} donnerait une formule très lourde et difficile à interpréter. Dans le cas de deux biens, on peut cependant montrer que cette formule est équivalente à celle donnée par (8.2).

Références

Albon, R., 1989. "Some observations on the efficiency of British postal pricing", *Applied Economics*, 21, 461-73.

Aumann, R.J. et L.S. Shapley, 1974. *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, NJ : Princeton University Press.

Boiteux, M., 1956. "Sur la gestion des monopoles astreints à l'équilibre budgétaire," *Econometrica*, 24, 22-40.

Brown, S.J., et Sibley, D.S., 1986. *The theory of public utility pricing*, Cambridge University Press, Cambridge.

Clarke, E., 1971. "Multipart Pricing of Public Goods," *Public Choice*, 11, 17-33.

Dunlop, J.T., 1939. "Price Flexibility and 'The Degree of Monopoly"', *Quarterly Journal of Economics,* 53, 522-534.

Heyman, D., Lazorchak, J., Sibley, D., et Taylor, W., 1987, "An Analysis of Tapered Access Charges for End Users", in Trebing, H. (ed.), *Proceedings of the Eighteenth Annual Williamsburg Conference on Regulation*, Michigan State University Press, East Lansing, MI.

Lerner, A.P., 1934. "The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly Power", *Review of Economic Studies,* 1, 157-175.

Morrison, S.A., 1982. "The Structure of Landing Fees at Uncongested Airports : An Application of Ramsey Pricing", *Journal of Transport Economics and Policy*, 16(2), 151-59.

Naughton, Mc., 1988. "Regulatory Preferences and Two-Part Tariffs : The Case of Electricity", *Southern Economic Journal*, 55, 743-58.

Ramsey, F.P., 1927. "A Contribution to the Theory of Taxation", *Economic Journal*, 37, 47-61.

Räsänen, M., Ruusunen, J., et Hämäläinen, R.P., 1997. "Optimal tariff design under consumer self-selection", *Enegery Economics*, 19(2), 151-67.

Rothschild, K.W., 1942. "The Degree of Monopoly", *Economica,* 9, 24-39.

Scott, F.A.(JR.), 1986. "Assessing USA Postal Ratemaking : An Application of Ramsey Prices", *Journal of Industrial Economics*, 34(3), 279-90.

Sherman, R., et George, A., 1979. "Second-Best Pricing for the U.S. Postal Service", *Southern Economic Journal*, 45, 685-95.

Train, K.E., 1977. "Optimal Transit Prices under Increasing Returns to Scale and a Loss Constraint", *Journal of Transport Economics and Policy*, 11(2), 185-94.

Train, K.E., 1994. “Self-Selecting Tariffs Under Pure Preferences Among Tariffs”, *Journal of Regulatory Economics*, 6, 247-64.

Wilson, R.B., 1993. *Nonlinear Pricing*, Oxford University Press, NY

Postface

Bien que partage des coûts et tarification soient liés, nous avons traité principalement de partage des coûts communs dans les sept premiers chapitres de cet ouvrage et principalement de tarification dans le huitième chapitre. Le titre « Partage des coûts et tarification des infrastructures » suggère pourtant qu'il y a des liens directs et importants entre le partage des coûts et la tarification dans la valorisation des infrastructures. Mais en réalité, tant dans les entreprises que dans les administrations, il n'y a pas nécessairement une corrélation très forte entre la conception des tarifs et les méthodes de répartition des coûts.

La concordance entre la répartition des recettes et celle des coûts ne peut donc habituellement être vérifiée que par simulation et, à la rigueur, ex post. La divergence entre les deux représente ce qu'on qualifie communément d'interfinancement entre les classes de clients. Lorsqu'un client paie moins que ce qu'il aurait dû payer en vertu de la répartition des coûts, on dit qu'il est financé par les clients qui paient plus que leur part de coûts. De manière générale, les exigences des organismes de régulation portent à la fois sur les règles de répartition des coûts et sur les tarifs. On veut parfois que les règles de répartition des coûts soient les plus « équitables » possibles et que les règles de détermination des tarifs ne produisent pas trop d'interfinancement et donc, donnent des résultats qui se rapprochent de la répartition des coûts. Mais souvent la dichotomie est plus forte : on veut que le partage des coûts communs soit « équitable » et que la tarification soit proche des coûts marginaux. L'entreprise, régulée ou non, sera quant à elle préoccupée au premier chef par le positionnement concurrentiel des différents tarifs, par les risques inhérents à chaque catégorie de consommateurs et, jusqu'à un certain point, par la cohérence entre les classes tarifaires.

Les préoccupations des régulateurs, en ce qui concerne la répartition des coûts et la prise en compte de cette répartition dans la fixation des tarifs, ne sont généralement pas au diapason des exigences d'une tarification optimale ou efficace, définie en termes de contribution, des biens ou services considérés, à la maximisation du bien-être de la société dans son ensemble. Les gains (ou surplus) de bien-être correspondent à la différence entre ce que les consommateurs seraient prêts à payer pour un bien ou un service et la valeur des ressources additionnelles requises pour leur procurer ce bien. En l'absence de toute contrainte de budget ou de rentabilité et dans la mesure où un bien ou service contribue globalement au mieux-être de la population, la règle d'or de la tarification optimale veut que le prix de ce bien ou service soit fixé à son coût marginal, donc à l'accroissement de coût (proprement défini) qu'entraîne la fourniture des unités marginales de ce bien.

Dans les industries où les rendements d'échelle sont croissants à cause, entre autres, des coûts fixes élevés d'infrastructure, l'application d'une telle règle entraînerait des profits négatifs, donc des pertes pour l'entreprise, malgré le fait que cette règle de tarification permet de maximiser la contribution de ce bien au bien-être de la société. Si on impose une contrainte de budget ou de profitabilité et qu'on s'en tient à des tarifs uniformes sur l'ensemble de la consommation de chaque client, cette règle doit être modifiée par l'introduction d'écarts entre les tarifs des différentes classes de service et leurs coûts marginaux respectifs. Ces écarts doivent être inversement proportionnels aux élasticités de la demande pour les différentes classes de services (demandes des divers regroupements de clients). C'est par ailleurs précisément le genre de prescription que doit suivre un monopole pour maximiser son profit ou encore une entreprise qui, sans être un monopole, bénéficie d'un certain pouvoir de marché. Lorsque le profit réalisable est plafonné (possiblement à 0) par un régulateur, la règle demeure valable, avec la différence que les écarts qui sont introduits entre prix ou tarifs et coûts marginaux seront majorés indirectement par le plafond sur les profits. Les prix qui en résultent sont souvent appelés prix à la Ramsey-Boiteux. On parle aussi de la règle de l'inverse de l'élasticité.

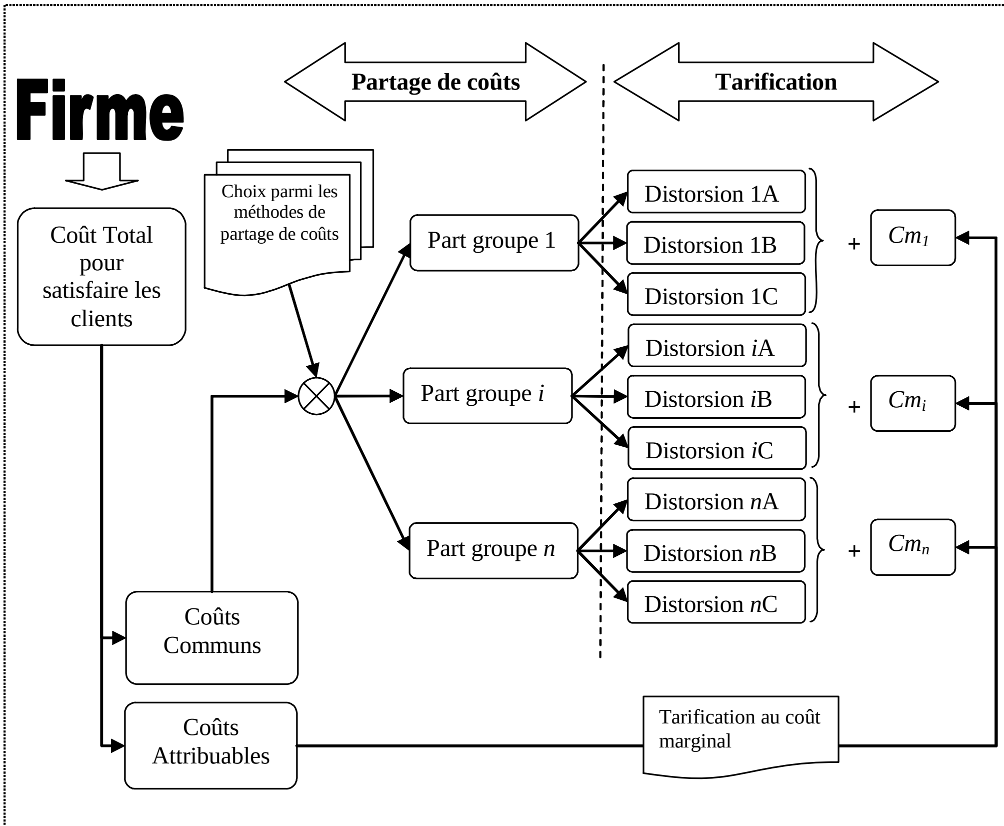
Dans le chapitre 8, nous avons montré qu'il est possible de faire mieux, en ce sens que la contrainte de plafonnement du profit peut être satisfaite tout en augmentant le bien-être, avec des tarifs à deux ou plusieurs parties, dont l'une peut constituer une charge fixe. Là encore, la détermination des composantes de ces tarifs doit obéir à une règle généralisée de l'inverse de l'élasticité. On doit tenir compte, entre autres, des élasticités de la demande par rapport aux frais fixes (abonnement) et par rapport aux taux/prix unitaires applicables aux diverses tranches de quantités consommées.

Ainsi, la théorie économique suggère qu'il n'y ait pas de mal, bien au contraire, pour un monopoleur, sujet à une réglementation de ses profits, ou encore pour une entreprise avec pouvoir de marché plus ou moins limité par la concurrence, à se préoccuper de la profitabilité relative des biens et services offerts et, par conséquent, à discriminer entre les clients en fonction de ce qu'ils sont prêts à payer, étant donné les alternatives dont ils peuvent bénéficier. À l'inverse, une tarification basée exclusivement sur une formule de partage des coûts, même si cette formule obéit à des critères d'équité fort défendables, peut donner des résultats très différents d'une tarification efficace dans la mesure où elle ne tient aucunement compte des élasticités des différentes composantes des demandes globales et spécifiques des diverses clientèles.

L'intégration du partage des coûts et de la tarification optimale ou efficace, dans la valorisation des infrastructures, peut être assurée comme suit. Ce sont les coûts fixes communs qui sont responsables des distorsions nécessaires des tarifs par rapport aux coûts marginaux. Ces coûts fixes communs pourront et devront généralement être répartis, dans une première étape, entre les différents groupes de clients, selon l'une des formules de partage que nous avons étudiées dans cet ouvrage et qui aura été choisie en fonction de ses propriétés. La tarification optimale fera en sorte de récupérer, pour chaque groupe de clients, les coûts fixes qui lui ont été attribués. En supposant qu'il y a, au sein d'un groupe donné, plusieurs catégories de clients, les tarifs demandés aux diverses catégories de clients s'écarteront de leurs coûts marginaux d'approvisionnement respectifs dans des proportions qui dépendront de l'inverse des élasticités des demandes de ces catégories de clients. Ainsi, dans l'exemple du gazoduc reliant Montréal, Québec, Saguenay et la Beauce discuté au chapitre 2, nous avons vu que la méthode Shapley-Shubik allouait le coût fixe du gazoduc (12 662.26) de la manière suivante : 3 728.22 à la Beauce, 4 097.10 à Saguenay et 4 836.94 à Québec. Dans le cas de Québec, le coût fixe ainsi attribué devrait être récupéré en tarifant le gaz naturel aux différentes catégories de clients de la région de Québec (ménages, commerces, industries et administrations par exemple) en fonction des coûts marginaux de satisfaire la demande des différentes catégories de clients et de l'inverse de l'élasticité de leurs demandes respectives, conformément à la règle Ramsey-Boiteux. Il en serait de même pour les autres régions.

La tarification efficace exige qu'on connaisse les élasticités des demandes exprimées par les catégories de clients au sein de chacun des groupes, une tâche difficile et exigeante mais bien connue. Il faut distinguer les élasticités par rapport aux prix propres des élasticités croisées, tant de court terme (plus faibles) que de moyen ou long terme (plus élevées). C'est aussi par la modélisation des élasticités que les effets des pressions concurrentielles peuvent en bonne partie être pris en compte.

La tarification efficace globale, intégrant l'étape du partage des coûts communs, peut être visualisée dans la figure qui suit.



- Du partage des coûts à la tarification -

Cette dernière s'interprète de la manière suivante. Une firme supporte divers coûts pour satisfaire ses clients. Ces coûts se partagent en coûts communs (au départ non attribuables) et coûts attribuables ou spécifiques. Au cours d'une première étape (à gauche de la ligne en pointillés), les coûts communs sont répartis, à l'aide d'une méthode appropriée de partage des coûts, entre les divers groupes de clients identifiés. La firme a ainsi attribué les coûts communs qui ne l'étaient pas au départ. Une fois cette étape franchie, on passe à la phase de tarification proprement dite (à droite de la ligne en pointillés). Il convient au cours de cette étape de récupérer, pour chaque groupe de clients, l'ensemble des coûts attribués à ce groupe. Les coûts qui étaient attribuables au départ pourront souvent être récupérés par une tarification au coût marginal. Les coûts communs attribués aux divers groupes, dans la première étape, seront récupérés grâce aux distorsions par rapport aux coûts marginaux qui, elles, seront calculées en fonction de la règle de l'inverse de l'élasticité. A ce stade, chaque groupe de clients sera possiblement scindé en plusieurs catégories et le processus de tarification pourra être affiné davantage. Ce phénomène est représenté par les trois distorsions (catégories) proposées pour chaque groupe.

Nonobstant le caractère efficace ou optimal de cette procédure, il est possible que son application entraîne le façonnement de tarifs qui pourraient être perçus comme difficilement acceptables au plan politique. Dans un tel cas, il serait inopportun de modifier de manière ad hoc la règle de partage des coûts communs, choisie au départ pour ses propriétés d'équité et de cohérence, ou la règle de tarification à la Ramsey-Boiteux (contraintes de tarifs uniformes et de profitabilité), permettant de s'éloigner le moins possible des niveaux de consommation efficaces (obtenus par une tarification au coût marginal). Il faudrait plutôt recourir à des mécanismes incitatifs de support direct pour aider et compenser les clients à protéger et ce, sans manipulation des tarifs.

Partage des coûts équitable et cohérent d'un côté et tarification optimale ou efficace (accompagnée de mécanismes d'atténuation des impacts, le cas échéant) de l'autre sont des outils essentiels et complémentaires dans la valorisation des infrastructures.

2020, rue University, 25e étage, Montréal (Québec) H3A 2A5
Tél. : (514) 985-4000 • Téléc. : (514) 985-4039
www.cirano.qc.ca • info@cirano.qc.ca