MÉTHODES AVANCÉES D'ÉVALUATION D'INVESTISSEMENTS

ADVANCED METHODS OF INVESTMENT EVALUATION

Information, Value Creation and Real Options
Information, création de valeur et options réelles

MONOGRAPHIE CIRANO MONOGRAPH
Tome 1 / Volume 1
2017MO-03 - ISBN 978-2-89609-007-5

Hiver/Winter 2017

Marcel Boyer
Michael Benitah
Éric Gravel
David Jarry
Peuo Tuon
Nicolas Marchetti
Jingmei Zhu
Molivann Panot

CIRANO

Université de Montréal

MÉTHODES AVANCÉES D'ÉVALUATION D'INVESTISSEMENTS

INFORMATION, CRÉATION DE VALEUR ET OPTIONS RÉELLES

ADVANCED METHODS OF INVESTMENT EVALUATION

INFORMATION, VALUE CREATION AND REAL OPTIONS

TOME 1 / VOLUME 1

Marcel Boyer
www.cirano.qc.ca/~boyerm

COLLABORATEURS/CONTRIBUTORS
Michael Benitah
Éric Gravel
David Jarry
Peuo Tuon
Nicolas Marchetti
Jingmei Zhu
Molivann Panot

CIRANO
Allier savoir et décision
Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

ISBN 978-2-89609-007-5
Dépôt légal – Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2017

Table of Contents – Volume 1

Table of Contents – Volume 2

Fundamentals

CHAPTER 1

1:1 - ARBITRAGE: LAW OF ONE PRICE

Say you are offered the following game: a coin is tossed and if the result is *heads*, you get \$1. The question is: how much would you be willing to spend to take part in such a game? Sure enough, it would be nice to enter the game for free. Then, after a couple of trials you would probably end up with some profit. However, it is hard to imagine someone would offer you such a game for free. Conversely, if someone charged you any amount greater than a dollar for taking part in this game, you would certainly not accept it, as it would mean a certain loss.

The bottom line is that there is a *fair price* (between \$0 and \$1) that would make neither the person who is offering the game nor the one who is taking it too happy or too sad about it.

What is that price? Evidently, it depends on the expected value of the game. If the coin is supposed to be fair, with equal probabilities of producing *heads* or *tails*, then the price is:

(1.1)

$$\frac{1}{2} \times 1\$ + \frac{1}{2} \times 0\$ = 0.50\$$$

Any price lower than that value would constitute an opportunity of producing money out of thin air for the person taking the game (buyer). We call such opportunity an **arbitrage opportunity**. Any price higher than 0.50\$, on the contrary, represents an arbitrage opportunity for the person offering the game (seller).

In large and efficient markets, any arbitrage opportunity that may eventually arise tends to be explored very quickly. Hence, we assume that arbitrage opportunities do not actually exist.

DEFINITION. Arbitrage

More formally, we can define an arbitrage possibility as a self-financed portfolio such that:

- The cost of the portfolio is zero.
- It is certain that the value $V(t)$ of the portfolio will remain non-negative in the future, that is, $V(t) \geq 0$ with probability 1 for any time $t \geq 0$.
- The portfolio will eventually produce some value, that is, there is a strictly positive probability that $V(t) > 0$, for some time t in the future.

The market is said to be **arbitrage-free** if there are no arbitrage possibilities.

■

1:2 - THE OPPORTUNITY COST OF CAPITAL AND PRESENT VALUE

Suppose a company has $100 to invest in a project that would generate a 120$ cash flow at period 1. Alternatively, the company could put the $100 in the bank and earn interests at the risk-free rate. When the company chooses to invest in the project, it renounces the opportunity to earn interest on the investing capital. This represents a cost for the company and we call that the **opportunity cost of capital**.

When evaluating a project, the opportunity cost of capital must be considered. Suppose the risk-free rate is 10%. Investing in the project means letting an opportunity to earn 10$ pass. This is a sound decision, since the project earns 20$. But what if the risk-free rate is 25%? Then, the opportunity cost of capital is 25$, a cost higher than what the project generates. In that case, the company would be better off by putting the money in bank and not taking the project.

	0	1
Project	-100	120
Cost of capital		-25
Total cash flow	**-100**	**95**

TABLE 1. CASH FLOWS FOR THE TWO PROJECTS.

The cost of capital exists because money accrues interests over time. Therefore, a hundred dollars in our hands right now has not the same value of a hundred dollars a year from now. If we have 100$, we can invest it at the risk-free rate and earn $100\$ \cdot (1+r)$ one period later. If we leave the money invested for two periods, we will then have $100\$ \cdot (1+r)^2$ and so on. More generally, if we denote the future value after n periods by FV and the invested present value capital by PV, then:

$$FV = PV(1+r)^n \tag{1.2}$$

We can, of course, rewrite Equation (1.2) for the present value:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} \tag{1.3}$$

In the next chapter, we will use the present value concept to calculate the net present value of a project over a series of cash flows.

1:3 - FISHER SEPARATION THEOREM

Fisher separation theorem states that:

> **Investment decisions are always the same for every investor, no matter what their time-preferences are or how they choose to finance the project.**

Investors are always interested in maximising the project's net present value (NPV). If they need to opt among several projects, they will choose the one that provides the highest NPV. This is independent of their time preferences or the way the project is funded.

Consider the following two projects: project A requires an initial investment of $100 providing a return of $110 after one year; project B requires the same initial investment of $100, generating no cash flows during the first year and giving $110 in the second year.

	0	1	2
Project A	-100	110	-
Project B	-100	-	110

TABLE 2. CASH FLOWS FOR THE TWO PROJECTS.

Suppose we have two different investors: investor A has obligations in Year 1. Investor B, on the contrary, needs to pay some obligations in Year 2. Then, we may be tempted to say that Investor B would prefer project B. However, this is **not** true. As we have seen, even if investor B has to do some payments at period 2, she would be better off by undertaking project A, and investing the period-1 cash flow at the risk-free rate until period 2. At period 2, she would have a cash flow higher than the $110 cash flow of project B. Project A is the project that maximises NPV and it is the project that both investors A and B would take, irrespective of their time preferences.

Likewise, consider the two projects:

	0	1	NPV(10%)
Project A	-100	120	9.09
Project B	-150	240	68.18

TABLE 3. CASH FLOWS FOR THE TWO PROJECTS.

For a discount rate of 10%, the net present value of this project[1] is higher and it is the project that every investor would choose. But what if the investor disposes of only $100? In that case, he cannot undertake project B on its own and may be forced to choose project A. However, if we consider that lending and borrowing are allowed, then the investor can sell shares of Project B and undertake it in lieu of the less profitable project A. If he invests the $100 he disposes in Project B, selling shares for the other $50, then he would have a NPV of $45.45, which is a NPV higher than that of project A.

	0	1	NPV(10%)
2/3 of Project B	-100	160	45.45

TABLE 4. CASH FLOWS FOR 2/3 OF PROJECT B.

The conclusion is that no matter how the project is funded, every investor would choose the same project, namely the project that offers the highest NPV.

[1] We will see how to calculate the NPV in more details in the next chapter.

Basic Capital Budgeting Techniques[2]

CHAPTER 2

Les références aux ouvrages et articles cités dans ce chapitre sont disponibles à la fin du tome 2.

2:1 - VALEUR ACTUELLE VS. AUTRES TECHNIQUES DE DÉCISION D'INVESTISSEMENT

1.1 - Valeur actuelle nette (VAN) ou Valeur présente nette (VPN)

La valeur actuelle nette d'un projet est la somme des cash-flows (CF) futurs que le projet génèrera durant sa durée de vie actualisée au coût d'opportunité du capital (taux moyen en vigueur sur le marché financier) (r) moins l'investissement initial (I_0) du projet :

(2.1)

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - I_0$$

> **Règle de décision :**
> **Accepter les projets dont la VAN est positive.**

Il existe trois caractéristiques clé de la VAN :

- La VAN reconnaît la valeur temps de la monnaie
- La VAN dépend uniquement des CF futurs du projet et du coût d'opportunité du capital
- La VAN répond au principe d'additivité

Certains critères de choix d'investissement autres que la VAN sont utilisés de façon courante par les firmes pour évaluer la valeur d'un projet, ces critères sont les suivants :

- Le taux de rendement interne (TRI) (*internal rate of return*)
- Le délai de récupération (*payback period*)
- Le délai de récupération actualisé (*discount payback period*)
- Taux de rendement comptable (*average return on book value*)
- L'indice de profitabilité (*profitability index*)

[2] Les définitions et les exemples sont inspirés de (BREALEY ET MYERS, 1991).

Nous allons montrer que les critères de décision alternatifs à la VAN qui ne répondent pas aux trois caractéristiques mentionnées plus haut donnent lieu à des décisions d'investissement inférieures à la VAN.

1.2 - Taux de rendement interne (TRI)

Le TRI est le taux d'actualisation pour lequel la VAN d'un projet est nulle, il permet d'établir le taux de rendement d'un projet à long-terme. Le calcul du TRI d'un projet de T périodes est le suivant :

(2.2)

$$VAN = I_0 + \frac{C_1}{1+TRI} + \frac{C_2}{(1+TRI)^2} + \cdots + \frac{C_T}{(1+TRI)^T} = 0$$

La façon la plus facile de trouver le TRI sans calculatrice est de procéder par itération.

Règle de décision :
Accepter les projets dont le TRI est supérieur au coût d'opportunité du capital ($TRI > r$).

EXEMPLE Prenons l'exemple d'un projet dont les cash flows sont présentés dans le tableau suivant pour illustrer le concept du TRI:

C_0	C_1	C_2
- 4 000	+ 2 000	+ 4 000

TABLEAU 1. CASH FLOWS EN DOLLARS.

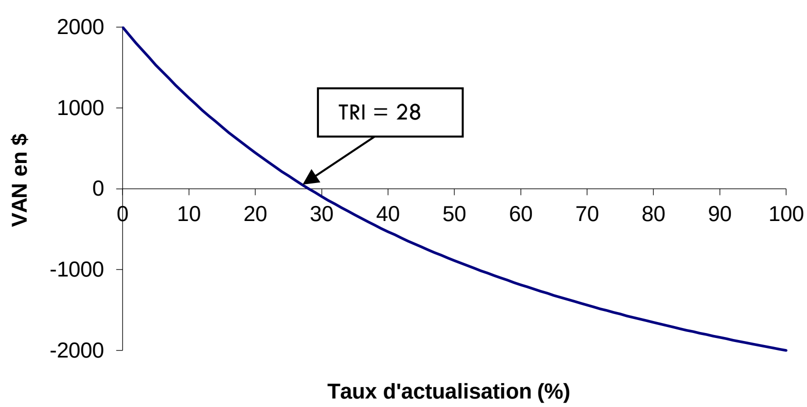


FIGURE 1. LA VALEUR ACTUALISÉE NETTE EN DOLLARS.

Nous pouvons constater sur le graphique précédent que le taux d'actualisation pour lequel la $VAN = 0$ est de 28%. Cela signifie que lorsque le projet est actualisé à un coût du capital inférieur au TRI, la VAN du projet est positive, au contraire lorsque le projet est actualisé à un taux supérieur au TRI, la VAN du projet est négative.

1.2.1 - Limites du TRI

De nombreuses firmes utilisent le TRI à la place de la VAN, mais cela est sans tenir compte du fait que le critère du TRI cache quelques pièges.

1.2.1.1 - PIÈGE 1 : PRÊTEUR OU EMPRUNTEUR?

Une firme est en position de **prêteur** lorsque son investissement initial est négatif, c'est à dire lorsqu'elle débourse un montant d'argent à l'initiative d'un projet et qu'elle s'attend à recevoir des cash-flows positifs dans le futur pour combler son prêt. Au contraire, une firme est en position d'**emprunteur** lorsque son investissement initial est positif, c'est à dire lorsqu'elle reçoit un montant d'argent au début d'un projet et qu'elle s'attend à verser des cash-flows négatifs dans le futur pour rembourser son emprunt. Le fait d'être prêteur ou emprunteur peut mener à une règle de décision différente. En effet, lorsque nous prêtons de l'argent, nous désirons un TRI élevé, au contraire lorsque nous empruntons nous désirons un TRI faible. Par conséquent, la règle de décision devrait être d'accepter un projet dont le $TRI > r$ dans une position de prêteur et accepter un projet dont le $TRI > r$ dans une position d'emprunteur. Néanmoins, un problème subsiste lorsque nous adoptons la position de prêteur et d'emprunteur et vice-versa durant un projet. Devons-nous accepter ou pas le projet et sur quel critère? La réponse est qu'il faut regarder la VAN du projet.

1.2.1.2 - PIÈGE 2 : TAUX DE RENDEMENT MULTIPLES

Un projet pourrait avoir plusieurs TRI lorsque ses CF changent de signe plus d'une fois. De plus, il se pourrait qu'un projet n'ait pas de TRI, par exemple un projet dont la VAN est toujours positive.

EXEMPLE Nous illustrons, dans les lignes suivantes, le cas d'un projet qui a deux TRI :

Projet	C_0	C_1	C_2	TRI (%)	VAN à 10%
A	- 4 000	+ 25 000	- 25 000	25 et 400	- 1 934

TABLEAU 2. CASH FLOWS EN DOLLARS.

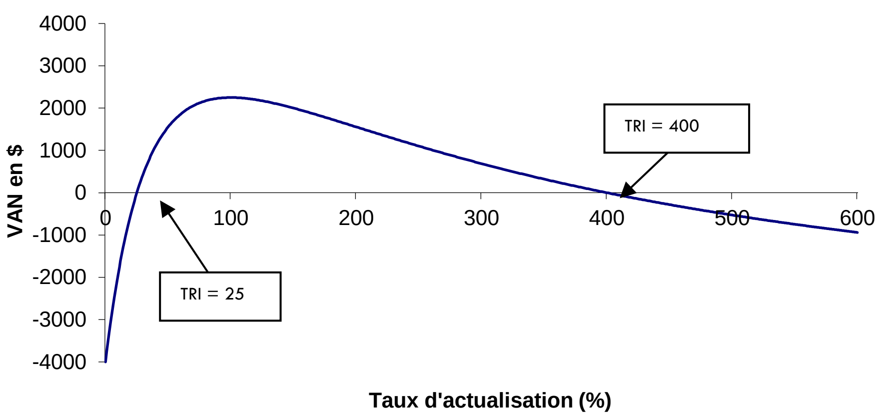


FIGURE 2. LA VALEUR ACTUALISÉE NETTE EN DOLLARS.

Le projet présenté a donc deux TRI, un de 25 % et un autre de 400%.

Quelle règle de décision adopter dans ce cas? Encore une fois la VAN s'avère être la solution la plus simple.

1.2.1.3 - PIÈGE 3 : PROJETS MUTUELLEMENT EXCLUSIFS

Il peut arriver qu'une firme ait à choisir entre plusieurs projets permettant de produire le même bien, ces projets sont dits mutuellement exclusifs. L'utilisation du TRI pour choisir entre deux projets mutuellement exclusifs peut amener à des décisions sous-optimales. Prenons l'exemple suivant :

EXEMPLE

Projet	C_0	C_1	TRI (%)	VAN à 10%
B	- 10 000	+ 20 000	100	+ 8 182
C	- 20 000	+ 35 000	75	+ 11 818

TABLEAU 3. CASH FLOWS EN DOLLARS.

Nous constatons que les deux projets sont rentables, le critère du TRI nous montre que le projet B est supérieur au projet C, tandis que la VAN nous indique le contraire. Que faut-il faire dans ce cas, si nous voulons utiliser le critère du TRI? Il faut considérer les deux projets comme étant un seul projet fractionné en plusieurs étapes en ne considérant, par conséquent, que les flux monétaires incrémentaux. La première étape est de considérer le projet B comme étant la première partie du projet. Nous pouvons voir que le projet B est rentable puisque son TRI de 100% est supérieur au coût du capital de 10% utilisé pour actualiser la VAN. Nous devons ensuite considérer l'investissement de 10 000 dollars supplémentaires (ce qui correspondrait au total à 20 000 dollars d'investissement donc au projet C). Les flux monétaires incrémentaux permettant de déterminer s'il est plus rentable de choisir le projet C plutôt que le projet B sont représentés au tableau suivant :

Projet	C_0	C_1	TRI (%)	VAN à 10%
C - B	- 10 000	+ 15 000	50	+ 3 636

TABLEAU 4. CASH FLOWS EN DOLLARS.

Le TRI de l'investissement incrémental est de 50%, ce qui est également supérieur au coût du capital, par conséquent le projet C est préférable au projet B, ce qui correspond au choix initialement dicté par la VAN. Le problème de projets mutuellement exclusifs existe également lorsque nous avons des projets dont les flux monétaires sont non seulement différents, mais également reçus à des périodes différentes. Le critère du TRI aurait tendance à favoriser les projets dont la majorité des flux monétaires est reçue au début du projet. En effet, plus les CF sont reçus au début d'un projet, plus il y a de chance que le TRI du projet soit plus élevé que celui d'un projet où les cash-flows sont plus étalés dans le temps. Pour pallier à cette difficulté, il est préférable d'utiliser le critère du TRI en tenant compte des flux monétaires incrémentaux, comme mentionné précédemment, ou la VAN. Le **rationnement du capital**, que nous verrons plus en détail ultérieurement, peut amener les gestionnaires à choisir des projets dont les CF sont reçus le plus rapidement, afin d'avoir les ressources nécessaires pour entreprendre d'autres projets.

En somme, le principe du TRI a tendance à favoriser les petits projets très rentables en pourcentage tandis que le principe de la VAN favorise les grands projets ayant des profits importants en valeur nominale même si ces projets ont un TRI tout juste au-dessus du taux d'actualisation.

1.2.1.4 - PIÈGE 4 : STRUCTURE DES TAUX D'INTÉRÊT

Un projet pourrait avoir un coût du capital différent à court terme et à long terme, dans ce cas il peut paraître difficile d'utiliser le critère du TRI. En effet, la règle de décision du TRI nous dit d'accepter les projets dont le TRI est supérieur au coût du capital ($TRI > r$). Mais que devons-nous faire lorsque nous sommes confrontés à plusieurs coûts du capital? La réponse est qu'il faudrait calculer un coût du capital moyen pondéré qui serait comparable au TRI, mais cette solution s'avère complexe. Par conséquent, la solution la plus abordable est le calcul de la VAN.

Nous avons vu que le TRI répond aux trois caractéristiques de la VAN, par contre nous devons être attentifs à l'utilisation de ce critère de décision qui comporte quelques pièges que nous avons énoncés plus haut. Le TRI est donc un critère qui donne des résultats équivalents à ceux de la VAN s'il est utilisé de façon judicieuse.

1.3 - Délai de récupération

Le délai de récupération se définit comme étant la période de temps nécessaire pour que les cash-flows d'un projet soient égaux au montant investi initialement dans le projet. Lorsqu'un projet produit des cash-flows constants durant toute sa durée de vie, le délai de récupération se calcule comme suit :

(2.3)

$$Délai\ de\ récupération = \frac{Montant\ investi\ initialement}{Cash\ Flows\ générés\ par\ période}$$

Règle de décision :
Accepter le projet dont le délai de récupération est le plus court.

EXEMPLE Considérons les deux projets suivants :

Projet	C_0	C_1	C_2	C_3	Délai de récupération	Van à 10%
D	- 2 000	+ 2 000	0	0	1	- 182
E	- 2 000	+ 1 000	+ 1 000	+ 5 000	2	+ 3 492

TABLEAU 5. CASH FLOWS EN DOLLARS.

Le projet B a un délai de récupération d'un an tandis que le projet E a un délai de récupération de deux ans. Selon ce critère de décision, le projet D serait choisi car son délai de récupération est le plus court. Mais lorsque nous considérons la VAN de ces deux projets, il s'avère que le projet D n'est pas rentable car sa VAN est négative, contrairement au projet E qui a une VAN de 3 492$.

La fixation du délai de récupération dépend de la direction de la firme, par conséquent si les gestionnaires exigent un délai de récupération d'un an, le projet D sera accepté aux dépens du projet E. De même, s'ils fixent le délai de récupération à deux ans, les deux projets seront acceptés. Or nous avons vu plus haut qu'avec le critère de la VAN seul le projet E serait choisi.

Avantages du délai de récupération :

- Il est facile à appliquer
- Il tient compte de l'impact d'un projet d'investissement sur la liquidité d'une firme
- Il permet d'avoir une idée du risque que peut comporter un projet

Limites du délai de récupération :

- Il ne tient pas compte de la valeur temps de la monnaie
- Il ne tient pas compte des cash-flows qui pourraient être générés après le délai de récupération
- Il dépend de la fixation arbitraire d'une date butoir par le gestionnaire
- Il défavorise les projets à long terme (ex : projets de R&D)
- Il ne tient pas compte du moment auquel les cash-flows (entrants ou sortants) générés avant le délai de récupération sont appliqués. Par conséquent, un projet permettant d'avoir des cash-flows (entrants) importants juste après l'investissement initial aura le même délai de récupération qu'un projet dont les mêmes cash-flows sont générés juste avant la période de récupération.

Le délai de récupération est une méthode simple à utiliser ce qui justifie sa popularité auprès des gestionnaires. De plus, cette méthode permet de palier à l'analyse du risque d'un projet si celle-ci est difficile à réaliser. Ainsi un projet dont le délai de récupération est de quatre ans est moins risqué qu'un projet dont le délai de récupération est de dix ans. Mais les limites mentionnées plus haut font de la VAN une méthode plus intéressante à utiliser que le délai de récupération.

1.4 - Délai de récupération actualisé

Le délai de récupération actualisé consiste à déterminer la période de temps nécessaire pour que la VAN des cash-flows cumulés actualisés soit positive. Contrairement au délai de récupération, le délai de récupération actualisé permet de tenir compte de la valeur des flux monétaires dans le temps en les actualisant à un certain coût du capital.

> **Règle de décision :**
> **Accepter le projet dont le délai récupération est le plus court.**

EXEMPLE Considérons les deux projets mutuellement exclusifs suivants qui ont des durées de vie différentes. Le projet F a une durée de vie de 6 ans, tandis que le projet G a une durée de vie de 10 ans.

Projet	C_0	C_1	C_2	C……	C_6	C……	C_{10}	Délai de récupération actualisé à 10%	VAN à 10%
F	- 20 000	+ 6 500	+ 6 500	……	+ 6 500			3.88	+ 8 309
G	- 20 000	+ 6 000	+ 6 000	……	+ 6 000	……	+ 6 000	4.21	+ 16 687

TABLEAU 6. CASH FLOWS EN DOLLARS.

Le projet F a une période de récupération actualisée plus courte que le projet G, mais une VAN inférieure.

Avantages du délai de récupération

- Il est facile à appliquer
- Il tient compte de l'impact d'un projet d'investissement sur la liquidité d'une firme
- Il permet d'avoir une idée du risque que peut comporter un projet
- Il tient compte de la valeur temps de la monnaie

Limites du délai de récupération actualisé :

- Il ne tient pas compte des cash-flows qui pourraient être générés après le délai de récupération
- Il dépend de la fixation arbitraire d'une date butoir par le gestionnaire
- Il défavorise les projets à long terme (ex : projets de R&D)
- Il ne tient pas compte du moment auquel les cash-flows (entrants ou sortants) générés avant le délai de récupération sont appliqués. Par conséquent, un projet permettant d'avoir des cash-flows (entrants) importants juste après l'investissement initial aura le même délai de récupération qu'un projet dont les mêmes cash-flows sont générés juste avant la période de récupération.

Le délai de récupération actualisé, bien qu'étant plus précis que le délai de récupération, du fait qu'il tienne compte des CF actualisés, mène également à une décision inférieure à celle de la VAN.

1.5 - Taux de rendement comptable (TRC)

Le taux de rendement comptable est le ratio des profits comptables moyens (après dépréciation et taxes) d'un projet sur la valeur au livre moyenne de l'investissement du projet :

(2.4)

$$Taux\ de\ rendement\ comptable = \frac{Profits\ nets\ comptables\ moyens}{Valeur\ au\ livre\ moyenne\ de\ l'investissement}$$

(2.5)

$$TRC = \frac{\sum_{t=1}^{n} B_t/n}{\frac{I + VR}{2}}$$

B = Bénéfices nets comptables

N = Durée de vie du projet en années

I = Investissement initial

VR = Valeur résiduelle

Règle de décision :
Accepter les projets dont le taux de rendement comptable est supérieur au coût du capital.

Avantages du TRC :

- Méthode simple et rapide à utiliser

Limites du TRC:

- Il dépend de revenus comptables basés sur le passé, pas des CF futurs du projet
- Il ne considère que le rendement moyen sur l'investissement, par conséquent il ne tient pas compte du fait que les profits comptables reçus immédiatement ont plus de poids que ceux reçus plus tard.
- L'intervalle de temps dans lequel le taux de rendement comptable est calculé est choisi de façon arbitraire. Il est souvent de 5 ans, mais il peut correspondre à la durée de vie du projet
- Il dépend de décisions arbitraires faites par le comptable de la firme, notamment le taux de dépréciation de certains actifs
- Le critère de décision du taux de rendement comptable est choisi de façon arbitraire par le gestionnaire. Il arrive que le critère de décision soit le taux de rendement comptable courant, dans ce cas les firmes ayant un taux de rendement élevé sur leurs activités passées auront tendance à rejeter de bons projets, tandis que les firmes avec un taux de rendement bas auront tendance à accepter de mauvais projets

Le taux de rendement comptable moyen ne respecte aucun des critères de la VAN tout comme le délai de récupération, mais à la différence du délai de récupération, le taux de rendement comptable est basé sur les revenus passés de la firme ce qui fait de ce critère un outil encore moins efficace que le délai de récupération.

1.6 - Indice de profitabilité

L'indice de profitabilité est la valeur actuelle des cash-flows générés par le projet divisée par l'investissement initial :

(2.6)

$$Indice\ de\ profitabilité = \frac{Valeur\ actuelle\ des\ CF}{Investissement\ initial}$$

> **Règle de décision :**
> **Accepter les projets dont l'indice de profitabilité est supérieur à 1.**

Un projet dont l'indice de profitabilité est supérieur 1 implique que la valeur actuelle des CF est supérieure à l'investissement initial d'où une VAN positive pour le projet. L'indice de profitabilité mène donc aux mêmes conclusions que celles de la VAN.

1.6.1 - Limite de l'indice de profitabilité :

L'indice de profitabilité tout comme le TRI doit être utilisé de façon judicieuse car son utilisation comporte certains pièges notamment le piège de projets mutuellement exclusifs. En voici un exemple :

EXEMPLE Considérons les deux projets suivants :

Projet	C_0	C_1	Valeur actuelle de C_1 à 10%	Indice de profitabilité	VAN à 10%
K	- 100	+ 200	182	1.82	82
L	- 10 000	+ 15 000	13 636	1.36	3636

TABLEAU 7. CASH FLOWS EN DOLLARS.

L'indice de profitabilité nous montre clairement que les deux projets sont de bons projets. Mais en considérant que ces deux projets sont mutuellement exclusifs, le projet L dont la VAN est la plus élevée serait choisi or nous pouvons remarquer que le projet K a un indice de profitabilité supérieur au projet L. Pour résoudre cette difficulté, nous allons considérer l'investissement incrémental comme cela a été fait précédemment pour le TRI. Nous allons donc regarder si le projet K est avantageux et ensuite calculer l'indice de profitabilité sur l'investissement additionnel de 9 900$ dans le projet L.

Projet	C_0	C_1	Valeur actuelle de C_1 à 10%	Indice de profitabilité	VAN à 10%
L - K	- 9 900	+ 14 800	13 354	1.36	3 554

TABLEAU 8. CASH FLOWS EN DOLLARS.

L'indice de profitabilité de l'investissement additionnel est supérieur à 1, le projet L est par conséquent un meilleur projet. De tous les critères de décision que nous avons vus, l'indice de profitabilité est celui qui est le plus proche de la VAN.

2:2 - LA VALEUR ACTUELLE NETTE EN PRATIQUE

Dans la section précédente, nous avons comparé la VAN à plusieurs critères de choix d'investissement couramment utilisés par les gestionnaires d'entreprises. Cette section porte sur l'utilisation pratique de la VAN lors de l'évaluation de projets. En effet, il existe plusieurs situations problématiques où la VAN doit être utilisée de manière judicieuse, notamment :

- Lors de la comparaison de projets de durées de vie différentes
- Lors de la comparaison de projets de taille différente
- Lorsqu'il existe un rationnement du capital
- Lorsqu'il y a de l'inflation ou des taxes
- Lorsque le taux de rendement est composé

2.1 - Comparer des projets de durées de vie différentes

Les gestionnaires sont souvent aux prises avec des projets mutuellement exclusifs ayant des durées de vie différentes. Comment ces derniers doivent-ils procéder pour faire un choix? Plusieurs alternatives sont possibles, la première est de considérer le projet comme une **«replacement chain»** et la seconde est de calculer un **coût annuel équivalent**.

2.1.1 - Replacement chain

Le concept de *replacement chain* repose sur deux hypothèses principales qui sont:

- La firme a l'opportunité de réinvestir à tout moment dans le futur
- La firme a la possibilité de réinvestir dans des actifs ayant exactement les mêmes caractéristiques que ceux utilisés actuellement

Pour expliquer le concept de *replacement chain*, prenons l'exemple suivant :

EXEMPLE Supposons que nous avons deux projets d'investissement pour l'achat de machines. La machine A a une durée de vie de 3 ans tandis que la machine B a une durée de vie de 2 ans. Le coût d'achat de chaque machine est déterminé par C_0, les coûts d'opération de chaque machine sont déterminés par les flux C_1 à C_3. Le tableau suivant présente les données des différents projets :

Machine	C_0	C_1	C_2	C_3	VAN à 5%
A	14 000	5 000	5 000	5 000	27 616
B	10 000	7 000	7 000		23 016

TABLEAU 9. CASH FLOWS EN DOLLARS.

Nous pouvons constater que le projet B à un coût plus faible car sa VAN est plus faible, mais étant donné que la durée de vie du projet B est plus faible, il n'est pas évident que le projet B soit le plus rentable. Pour comparer les deux projets, il faut les mettre sur une base identique, c'est-à-dire une durée de vie identique qui serait de 6 ans. L'idée est de considérer qu'il est possible de réinvestir dans un projet identique pour atteindre le nombre d'années requises pour pouvoir comparer les deux projets. Dans le cas de la machine A, nous aurons l'équivalent de deux projets de 3 ans pour un total de 6 ans avec un investissement en C_0 de 14 000 et un deuxième investissement de 14 000 en C_3 pour un total de 19 000. En ce qui concerne la machine B, l'idée est la même c'est-à-dire que nous aurons l'équivalent de trois projets de 2 ans avec des investissements de 10 000 en C_0, C_2 et C_4, le tableau illustre cette idée.

Machine	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	VAN à 5%
A	14 000	5 000	5 000	19 000	5 000	5 000	5 000	51 472
B	10 000	7 000	17 000	7 000	17 000	7 000	7 000	62 827

TABLEAU 10. CASH FLOWS EN DOLLARS.

Nous constatons, d'après le tableau 10, que le coût de la machine B a une VAN de 62 827$ comparé à 51 472$ pour la machine A, par conséquent la machine B s'avère finalement moins rentable que la machine A. Cet exemple nous montre qu'il est possible de comparer des projets de durées de vie différentes en comparant la VAN de la «replacement chain» de chaque machine dont les durées de vie totales sont identiques.

2.1.2 - Coût annuel équivalent (CAE)

Le coût annuel équivalent est le coût par année de détenir un actif durant toute sa durée de vie. Ce coût annuel équivaut en quelque sorte à un paiement de location de montants identiques. La valeur actuelle de ces montants de location est égale au coût d'investissement du capital. Lorsque la comparaison doit être faite entre deux machines, la machine ayant le plus faible CAE aura la plus petite VA de coûts totaux et sera, par conséquent, la meilleure machine à utiliser. En nous basant sur notre exemple précédent, le montant d'investissement de 14 000 de la machine A est équivalent à un montant de location de 5 141$ par an pendant trois ans (payable à la fin de l'année). Le calcul se fait comme suit :

Il faut dénoter au préalable a_{n-r} comme étant la VA d'une annuité de n périodes actualisée à r% par période

(2.7)

$$a_{n-r} = \left(\frac{1}{r}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

ensuite, nous avons l'équation suivante :

$$\text{(2.8)} \qquad Coût\ du\ capital = a_{n-r} \times (Equivalent\ capital\ lease\ payment)$$

$$14\ 000 = \left(\frac{1}{0.05}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(1.05)^3}\right) \times (Equivalent\ capital\ lease\ payment)$$

$$14\ 000 = 2.723 \times (Equivalent\ capital\ lease\ payment)$$

Ce qui nous donne :

(2.9)

$$Equivalent\ capital\ lease\ payment = \frac{14\ 000}{2.723} = 5\ 141$$

À ce montant nous devons ajouter les 5 000$ en coût d'opération ce qui nous donne un coût annuel équivalent d'utilisation de la machine A de :

(2.10)

$$CAE_A = 5\ 000 + 5\ 141 = 10\ 141$$

Le coût annuel équivalent d'utiliser la machine A est donc de 10 141$.

Nous pouvons procéder de façon identique pour calculer le coût annuel équivalent d'utiliser la machine B. Le montant d'investissement de 10 000$ pour la machine B est équivalent à deux paiements de location de :

(2.11)

$$CAE_B = 7\ 000 + 5\ 378 = 12\ 378$$

Le coût annuel équivalent d'utiliser la machine B est donc de 12 378$, ce qui est supérieur au coût de la machine A, par conséquent la machine A est plus rentable.

2.2 - Le rationnement du capital

Le rationnement du capital a lieu lorsqu'une entreprise fixe, par exemple, une contrainte sur le montant de capital qui peut être utilisé dans un budget annuel. Une entreprise sous rationnement de capital peut être amenée à rejeter des projets ayant une VAN positive. Au-delà de cette définition, il y a une idée fausse que nous nous faisons en pensant qu'une entreprise peut prêter ou emprunter n'importe quel montant désiré à un taux d'intérêt du marché donné. Il existe deux situations différentes pour lesquelles cette idée reçue ne tient pas.

La première situation a lieu lorsque la direction d'une entreprise limite de façon arbitraire le montant total à investir ou le type d'investissement à réaliser ou même lorsque la direction fixe des critères d'acceptation de projet qui conduisent à rejeter des projets qui auraient été acceptés en utilisant les critères du marché. Par exemple, au lieu d'utiliser le taux du marché, l'entreprise utilise un taux supérieur pour se fixer une limite.

La seconde situation a lieu lorsqu'une entreprise a la possibilité de prêter et d'emprunter à des taux d'intérêt du marché différents. Cette situation est le fait d'une imperfection du marché ou de coûts de transaction.

La première situation est un cas de **rationnement interne du capital** et la seconde situation, un cas de **rationnement externe du capital**. Nous allons expliquer de manière détaillée les deux situations dans les lignes suivantes.

2.2.1 - Rationnement interne du capital

Il existe deux sortes de rationnement interne du capital :

- Un rationnement sur le taux de rendement
- Un rationnement sur le montant d'investissement

Le rationnement interne du capital sur le taux de rendement a lieu lorsque la firme fixe un taux de rendement limite pour les investissements qui est supérieur au coût d'opportunité du capital de la firme.

Le rationnement interne du capital sur le montant d'investissement a lieu lorsque la firme décide de limiter le montant total de fonds alloués à un investissement interne lors d'une année donnée à une somme fixe, même si les investissements (actualisés au coût d'opportunité du capital de l'entreprise) ayant une VAN positive pourraient être rejetés suite à cette décision.

2.2.1.1 - RATIONNEMENT SUR LE TAUX DE RENDEMENT

Considérons le premier cas de rationnement interne du capital où une firme décide qu'un investissement a une VAN positive avec un taux de rendement de 15%, sachant que son propre coût d'opportunité du capital est de 10%. Si le même taux limite de 15% est maintenu d'année en année, le taux limite dans le futur sera connu et la firme pourrait évaluer tous les investissements comme si son coût d'opportunité était de 15%. L'utilisation de ce taux de 15% n'est pas correcte car le coût d'opportunité est sensé mesurer l'utilisation alternative de fonds disponibles pour la firme. En effet, en utilisant un taux de 15%, cela signifie que tout investissement actualisé aujourd'hui à un taux inférieur à ce taux ne sera pas entrepris. Si durant l'année suivante l'entreprise a généré plus de fonds qu'elle n'est capable d'investir en suivant la limite du 15%, le surplus de fonds aura un coût d'opportunité inférieur aux 15%. Inférieur de combien? Cela dépendra de l'utilisation que la firme fera des montants en excès qui n'auront pas pu être investis à l'interne.

2.2.1.2 - RATIONNEMENT SUR LE MONTANT D'INVESTISSEMENT

Dans le second cas de rationnement interne du capital, les hauts dirigeants de la firme fixent un montant maximum qui sera investi car ils ne veulent pas se procurer des fonds additionnels sur le marché même s'il existe des investissements rentables. Cette réticence à se financer sur le marché vient du fait que les dirigeants craignent de perdre le contrôle de leur compagnie. En effet, en se finançant sur le marché, par l'émission d'actions par exemple, une compagnie externe risquerait de prendre le contrôle de la compagnie émettrice. Au-delà de la perte de contrôle, le financement sur le marché pourrait entraîner une dilution des bénéfices par action. Le montant d'investissement de la firme dépendra alors de sa politique de dividende. La firme pourrait par exemple décider de maintenir sa politique de dividende sans tenir compte de toute augmentation de bénéfice résultant d'investissements additionnels. Supposons que les investissements passés permettent de supporter le niveau de dividende actuel, dans ce cas les cash-flows nets générés dans le futur par les investissements courants seront disponibles pour un réinvestissement à la période à laquelle ils ont été gagnés. Le montant d'argent disponible pour investissement variera de période en période tout comme la demande d'investissement. Cette situation pourrait amener la firme à rejeter des projets dont le TRI est supérieur à son coût d'opportunité. Pour cette raison, il serait difficile de faire des prédictions sur le coût d'opportunité des cash-flows futurs.

2.2.2 - Rationnement externe du capital

Nous avons défini précédemment le rationnement externe du capital comme étant une situation où l'entreprise a la possibilité de prêter ou d'emprunter des fonds à des taux d'intérêt du marché différents. Cette situation pourrait résulter d'imperfection du marché ou tout simplement de coûts de transaction. Avant d'aller plus en détail sur le rationnement externe du capital, il convient au préalable de définir ce que nous entendons par prêter et emprunter. Le terme prêter réfère ici à la situation où la firme utilise ses fonds pour acheter des titres quelconques. Le terme emprunter, lui, réfère à la situation où la firme obtient du capital en émettant des titres quelconques. Nous faisons l'hypothèse que le fait d'emprunter ou de prêter ne modifie pas la structure de capital de la firme, cette hypothèse implique que le niveau de risque de la firme ne varie pas en fonction des prêts ou des emprunts de cette dernière.

Si une firme avait la possibilité d'emprunter ou de prêter n'importe quel montant à un taux d'intérêt du marché qui est identique pour l'emprunt et pour le prêt, elle pourrait alors maximiser son profit en acceptant n'importe quel projet d'investissement, actualisé à ce taux d'intérêt unique, dont la VAN est positive. Dans un tel marché, les décisions d'investissement de la firme ne dépendraient pas du montant disponible à cette dernière puisque par une habile combinaison de prêts et d'emprunts, la firme pourrait financer des projets dont la VAN est positive. Bien entendu, cette situation est une situation idéale car en réalité il y a une divergence entre le taux auquel la firme peut prêter et celui auquel elle peut emprunter. Cette divergence est causée par plusieurs facteurs dont le fait que certains prêteurs imposent des caractéristiques aux firmes désireuses d'emprunter, par conséquent les firmes qui ne respectent pas ces caractéristiques verront leur coût d'emprunt augmenter. La politique d'investissement et de financement de la firme est donc fonction de l'écart entre le taux d'emprunt et le taux auquel la firme peut prêter.

Nous allons illustrer, par les graphiques suivants, le processus de choix d'investissement en présence de rationnement externe du capital. Supposons qu'un plan d'investissement est établi pour déterminer les dépenses totales nettes nécessaires en période 0 pour que des investissements aient une VAN positive à différents taux d'intérêt. Un tel plan met en évidence le fait que les dépenses courantes les plus importantes en terme monétaire se font aux taux d'intérêt les plus bas puisque certains investissements dont la VAN est négative à des taux d'intérêt élevés auront une VAN positive à des taux d'intérêt bas. De tels plans d'investissement sont représentés par les courbes I-I des figures 3, 4 et 5. La distance $\overline{OQ_1}$ représente la quantité de fonds disponibles générés à l'interne durant la période courante. Il existe trois scénarios possibles. Dans le premier scénario, représenté par la Figure 3, la quantité de fonds disponibles générés à l'interne, représentée par la ligne verticale partant de Q_1 coupe la courbe I-I à un taux d'intérêt supérieur au taux d'emprunt r_2. Cela indique que les investissements qui seraient profitables à un taux équivalent au taux d'emprunt ne pourraient pas être financés par des fonds générés à l'interne. Il serait donc profitable pour la firme d'emprunter un montant $\overline{Q_1Q_2}$ afin de pouvoir accepter les investissements qui seraient profitables au taux d'emprunt r_2. La firme ne devrait pas emprunter de montant supérieur à Q_2 car tout montant investi au delà de Q_2 actualisé au taux r_2 aura une VAN négative.

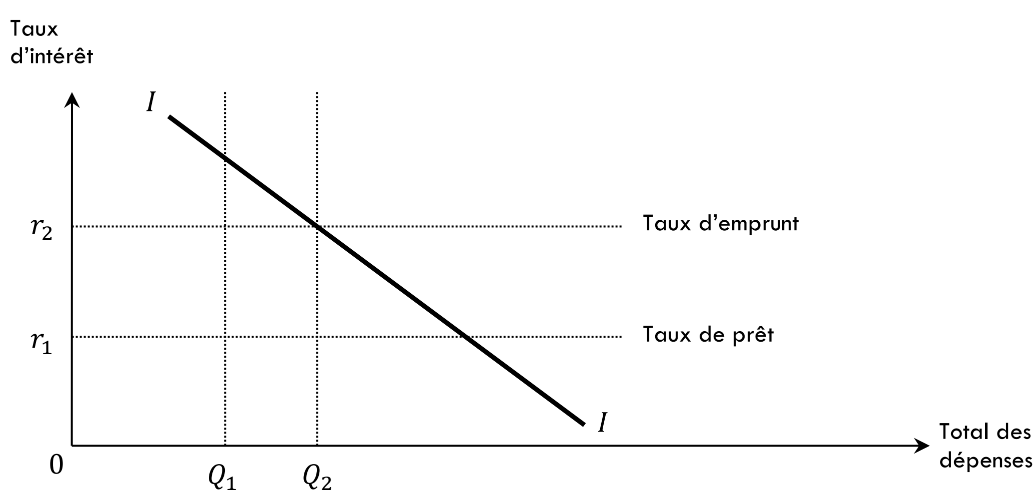


FIGURE 3.

Dans le second scénario, illustré par la Figure 4, les fonds disponibles pour investissement générés à l'interne sont plus que suffisants pour entreprendre des projets profitables si ceux-ci sont actualisés au taux des prêts r_1. Dans ce cas, le montant investi à l'interne sera seulement de $\overline{OQ_2}$. Le montant restant $\overline{Q_1Q_2}$, sera, soit investi à l'externe en achetant des titres d'autres firmes, soit utilisé pour rembourser la dette de la firme.

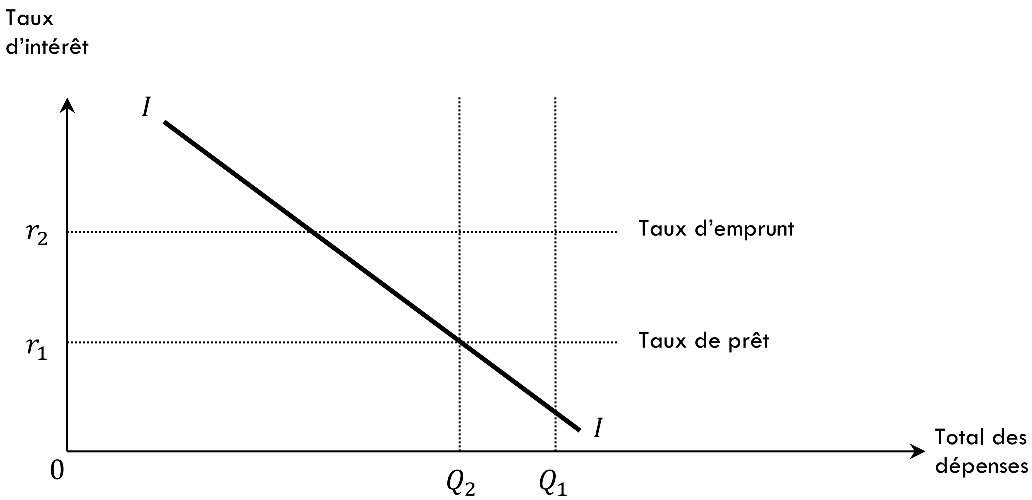


FIGURE 4.

Dans le dernier scénario, illustré par la Figure 5, la firme a suffisamment de fonds pour accepter tous les investissements indépendants dont la VAN est positive lorsque celle-ci est évaluée au taux d'emprunt, mais la firme n'a pas assez de fonds pour accepter les projets dont la VAN est positive lorsqu'elle est évaluée au taux des prêts r_1. La firme ne peut donc pas emprunter de fonds supplémentaires ni prêter de fonds et le taux adéquat auquel la firme devrait actualiser ses investissements est inférieur au taux d'emprunt, mais supérieur au taux des prêts.

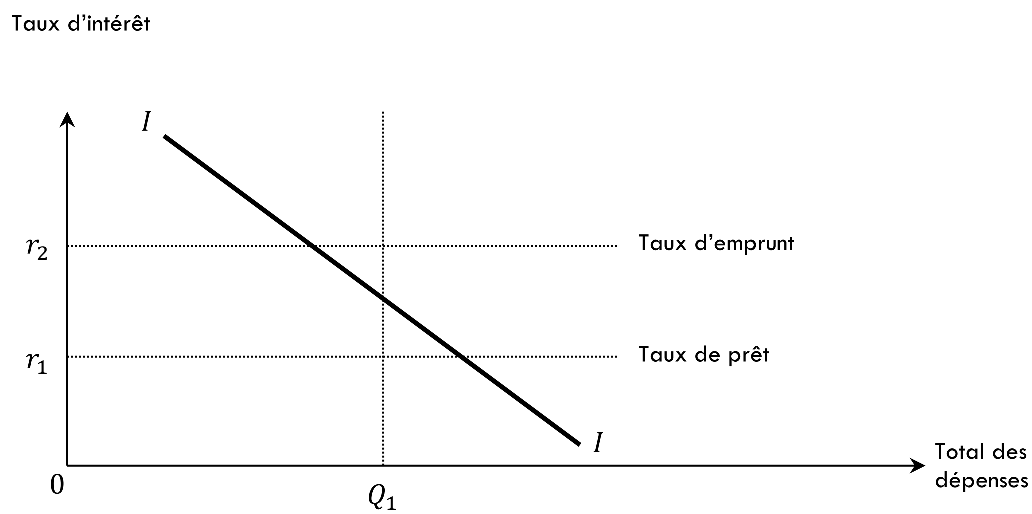


FIGURE 5.

2.3 - La valeur actuelle et l'inflation

Lorsque nous analysons des investissements, il est important de faire la distinction entre les éléments qui sont réels et ceux qui sont nominaux.

2.3.1 - Comment distinguer les flux réels des flux nominaux?

Les flux nominaux sont ceux généralement établis par un contrat légal ou par la législation car il est difficile d'établir un contrat en terme réel. Les intérêts sur les obligations, les contrats d'hypothèques, la dépréciation d'un actif sont généralement des flux nominaux.

Les flux réels quant à eux sont généralement établis par négociation sur le marché des biens au moment de la transaction. Parmi les flux réels, nous pouvons citer le prix des marchandises au moment d'une transaction, le coût de la main d'œuvre ou même le coût des biens d'investissement.

Il existe cependant une exception concernant la distinction des flux nominaux et des flux réels. Cette exception concerne les contrats de redevance (royalties) qui sont généralement payés en nature par conséquent leur valeur marchande est réelle lorsque convertie en dollar.

Les flux monétaires réels doivent être actualisés à un taux d'intérêt réel et les flux nominaux actualisés à un taux nominal. Si les deux méthodes sont appliquées correctement, elles devraient aboutir au même résultat. Avant de montrer la relation entre l'analyse nominale et l'analyse réelle, nous allons identifier les différentes notations :

$r = taux\ d'intéret\ nominal$

$\rho = taux\ d'intéret\ réel$

$\alpha = taux\ d'inflation$

Le **taux d'intérêt nominal** est le taux basé sur des rendements mesurés en terme monétaire, tel le dollar. C'est également le taux inscrit sur un contrat reliant deux individus, ce taux est fixe dans le temps.

Le **taux d'intérêt réel** est le rendement des biens réels transigés sur le marché.

Le **taux d'inflation**, lui, est le taux de croissance du niveau général des prix des biens réels.

Pour illustrer ces trois définitions, supposons qu'une compagnie vend un bien à 20$ aujourd'hui. Ce bien est supposé être vendu à 21$ dans un an. Le taux d'inflation de ce bien est :

(2.12)

$$\alpha = \frac{21}{20} - 1 = 0.05 \quad ou \quad 5\%$$

Supposons maintenant qu'un contrat est passé afin d'échanger une unité du bien aujourd'hui contre 1.1 unités du bien dans un an. Ici, il est question de bien réel. Dans ce cas, le taux d'intérêt réel est :

(2.13)

$$\rho = \frac{1.1}{1} - 1 = 0.10 \ \ ou \ \ 10\%$$

Une personne ayant 20$ à investir aujourd'hui pourrait donc acheter une unité du bien en question aujourd'hui et l'échanger contre 1.1 unités du bien dans un an au prix de $1.1 \times 21\$ = 23.10\$$. Il est question ici de taux d'intérêt nominal car la transaction se fait en termes de dollar. Dans ce cas, le taux d'intérêt nominal est de :

(2.14)

$$r = \frac{23.10}{20} - 1 = 0.155 \quad ou \;\; 15.5\%$$

La Figure 6 illustre la relation entre les trois équations précédentes. Le bien peut donc être investi dans un *swap* avec un taux d'intérêt de 10% ou être investi à la banque avec un taux d'intérêt nominal de 15.5%. Les deux options sont équivalentes si le taux d'inflation est de 5%.

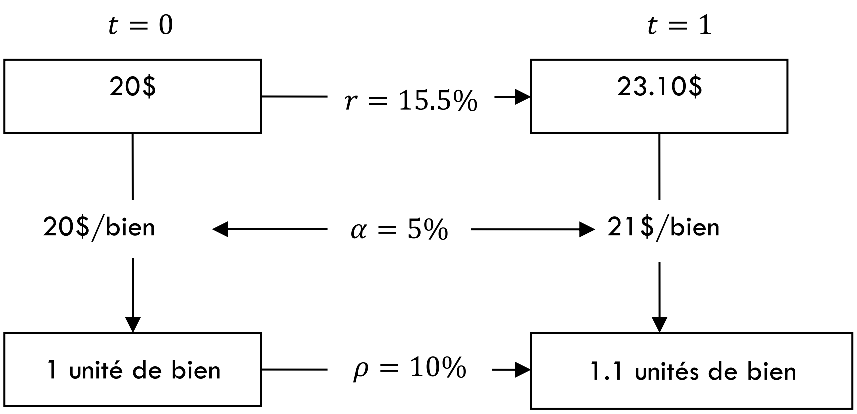


FIGURE 6.

Cette illustration permet d'introduire **l'Équation de Fisher** qui met en relation le taux d'intérêt réel, nominal et le taux d'inflation :

(2.15)

$$1 + r = (1 + \alpha)(1 + \rho)$$

Selon l'équation de Fisher, un investisseur qui reçoit un montant principal et des intérêts nominaux $(1 + r)$ est indifférent entre recevoir ce montant et recevoir un montant principal et des intérêts réels $(1 + \rho)$ combinés à un montant suffisant pour couvrir l'érosion due à l'inflation $(1 + \alpha)$.

Prenons l'exemple précédent de la compagnie qui vend une unité de bien à 20$. Supposons qu'il s'agisse d'une compagnie pétrolière qui envisage de vendre 1000 barils de pétrole dans 10 ans. Étant donné que le pétrole est un bien réel, il est convenable de projeter que le prix du baril sera à la valeur réelle de 20$. Pour calculer la valeur actuelle réelle des 1000 barils, nous devons actualiser les flux réels au taux d'intérêt réel :

(2.16)

$$VA_{réelle} = \frac{20 \times 1\,000}{(1 + \rho)^{10}} = \frac{20\,000}{1.10^{10}} = 7\,711\$$$

Nous pouvons alternativement calculer l'inflation sur le prix du pétrole dans 10 ans :

(2.17)

$$VF_{nominale}\; dans\; 10\; ans = 20(1 + \alpha)^{10} \times 1\,000$$

$$= 20\,000\; \times (1 + \alpha)^{10} = 20\,000 \times (1.05)^{10} = 32\,578\$$$

puis l'actualiser au taux d'intérêt nominal :

(2.18)

$$VA_{nominale} = \frac{32\ 578}{1.155^{10}} = 7\ 711\$$$

La valeur actuelle réelle est alors identique à la valeur actuelle nominale. Cette affirmation n'est valable que si le calcule se fait au début du projet ($t = 0$) car à cette date le facteur de l'inflation est égal à un.

À retenir:

- *Les flux nominaux doivent être actualisés à un taux d'intérêt nominal.*
- *Les flux réels doivent être actualisés à un taux d'intérêt réel.*
- *L'actualisation des flux monétaires réels au taux d'intérêt réel* **donne la même valeur actuelle** *que l'actualisation des flux monétaires nominaux au taux d'intérêt nominal.*
- *Les flux réels et les flux nominaux sont les mêmes uniquement au début d'un projet ($t = 0$), avant que l'inflation ne débute. Par conséquent, il est possible qu'à cette date, les flux nominaux actualisés au taux d'intérêt nominal soient additionnés aux flux réels actualisés au taux d'intérêt réel.*
- *À une date autre que $t = 0$, les flux réels et les flux nominaux ne sont pas comparables et ne peuvent donc pas être additionnés puis actualisés. Pour additionner des flux nominaux et réels à une date particulière, il faut au préalable convertir les deux flux en une même base (soit réelle ou nominale) puis les actualiser au taux approprié (nominal ou réel).*

2.4 - La valeur actuelle et les taxes

2.4.1 - Idées reçues à propos des taxes

En évaluation de projet, les taxes sont souvent négligées par certains gestionnaires. En effet, ces derniers préfèrent ignorer les taxes et actualiser les flux monétaires avant taxes à un taux d'actualisation plus élevé ou considérer qu'un projet d'investissement peut être viable de lui-même, c'est à dire sans tenir compte des subventions et des taxes dans la décision d'investissement. Or en agissant ainsi, ces gestionnaires ignorent le rôle incitatif que le gouvernement veut donner aux taxes. Il est vrai que le gouvernement utilise la loi de l'impôt et les taxes basées sur des incitations pour encourager ou décourager les investissements dans certains domaines, telle l'industrie pétrolière. Dans cette industrie, les incitations se font sous forme de dépréciation spéciale, de crédit d'investissement ou même de déduction fiscale pour exploration.

2.4.2 - Importance des taxes

Lorsque nous évaluons un projet, les taxes ne sont importantes que si une firme est assujettie à un taux d'imposition, ce qui est le cas de la majorité des firmes au Canada. Si une firme est imposée, elle doit considérer les taxes pour la détermination de son taux d'intérêt réel, mais également pour la prise en compte des économies d'impôt réalisées avec la dépréciation des actifs.

2.4.2.1 - TAXES ET INFLATION

L'équation de Fisher que nous avons abordée précédemment ne tient pas compte des taxes. Or si une firme est taxée, elle préfèrerait faire l'analyse de son projet après le paiement des impôts, ce qui est connu sous le nom **d'équation de Darby**.

Les dépenses d'intérêts sont généralement déductibles d'impôt au taux corporatif que nous désignons τ_c. La firme doit payer ses impôts sur la base d'un taux d'intérêt nominal plutôt que sur celle d'un taux d'intérêt réel car comme mentionné plus haut, le taux d'intérêt nominal est un taux basé sur un rendement mesuré en terme monétaire. Pour prendre en compte cette dimension, l'équation de Fisher doit donc être modifiée et doit montrer qu'un investisseur reçoit un montant principal auquel est ajouté un intérêt après taxe : $1 + r(1-\tau)$. Cet investisseur doit être compensé sous la forme d'un taux d'inflation α et d'un taux d'intérêt réel après-impôt ρ_{at}, où at signifie «après taxe». L'équation de Darby qui est donc une équation de Fisher modifiée est la suivante :

(2.19)

$$1 + r(1-\tau) = (1+\alpha)(1+\ \rho_{at})$$

Si nous supposons que la relation entre le taux d'intérêt réel et le taux d'intérêt nominal est établie par l'équation de Darby dont le taux d'imposition est $\tau = 40\%$ et nous reprenons l'exemple que nous avons utilisé pour l'équation de Fisher pour le taux d'intérêt nominal et l'inflation, nous avons la relation suivante :

(2.20)

$$1 + 0.155 \times (1 - 0.4) = 1.05 \times \rho_{at}$$

En résolvant pour un taux d'intérêt réel après taxe, nous avons :

(2.21)

$$\rho_{at} = -1 + \frac{1.093}{1.05} = 0.041 \ \ ou\ \ 4.1\%$$

Le taux de 4.1% est un taux bien inférieur au taux de 10% que nous avions trouvé en utilisant l'équation de Fisher. Il est également inférieur à 6% qui est le taux d'intérêt réel calculé par l'équation de Fisher multiplié par $(1-\tau)$. Nous trouvons ce résultat parce que la taxe a également été calculée sur l'inflation dans l'équation de Darby d'où un taux d'intérêt réel plus bas.

2.4.3 - Quand utiliser l'analyse de Fisher ou l'analyse de Darby?

Cette question n'a pas de réponse clairement définie. La seule certitude que nous avons est que les équations de Fisher et de Darby sont les mêmes lorsque le taux de taxation est nul. Nous savons que les taux d'intérêt sont fixés sur le marché par l'équilibre entre les taux des emprunteurs et les taux des prêteurs. Si les prêteurs et les emprunteurs ne sont pas sujets à un taux d'imposition (prenons l'exemple d'organismes de charité), alors l'analyse de Fisher sera privilégiée. Par contre, si les uns et les autres sont imposés, alors l'analyse de Darby sera utilisée. Mais dans la réalité, l'équation de Darby serait probablement appropriée pour des taux de taxation intermédiaires se situant entre 0% et le plus haut taux marginal établi (environ 40% à 50% dans la plupart des pays).

2.4.3.1 - TAXES ET DÉDUCTION POUR AMORTISSEMENT(DPA) (CAPITAL COST ALLOWANCE (CCA))

2.4.3.1.1 - Différence entre déduction pour amortissement (DPA) et dépréciation

Il est important de pouvoir différencier la **déduction pour amortissement (DPA)** de la **dépréciation** qui sont deux concepts souvent utilisés de manière interchangeable or il existe une nuance entre ces deux termes que nous allons éclaircir.

Lorsqu'une entreprise achète un actif immobilier, ce dernier peut être utilisé durant un certain nombre d'années. Le système de **DPA** permet d'établir le montant du coût d'acquisition de l'actif qui sera déduit durant une année donnée, c'est une mesure fiscale. Le montant de déduction acceptable pour l'année d'imposition est calculé en appliquant le taux auquel appartient la classe de l'actif en question au solde non déprécié de cette classe d'actifs. Nous expliquerons plus en détails ce calcul ultérieurement. Il faut noter que la DPA ne s'applique que lorsqu'une entreprise est imposée puisqu'elle permet à cette dernière de réaliser des économies d'impôt, de plus elle est un élément important dans le calcul du coût en capital puisque si une entreprise est autorisée à déduire plus rapidement un investissement, elle sera portée à investir en matériel et en technologie pour augmenter sa productivité.

La **dépréciation** est une dépense non monétaire qui réduit la valeur d'un actif afin de tenir compte de la désuétude de cet actif. C'est une notion comptable qui permet à une firme de réduire ses bénéfices tout en augmentant ses flux de trésorerie disponibles après impôt (free cash-flow).

DPA	Dépréciation comptable
Actifs identiques regroupés en une classe pour amortissement	Actifs dépréciés de façon individuelle
Pas d'estimation de la durée utile des actifs ou de leur valeur de revente	L'estimation de la durée de vie utile des actifs et leur valeur de revente est incluse
La DPA utilisée dans chaque classe d'actifs est déterminée par Revenu Canada et peut refléter ou non la désuétude d'un actif	La firme choisit la méthode qui représente le mieux la désuétude d'un actif (dépréciation linéaire dégressive etc.)
Tant que la firme existe et qu'il reste des actifs dans la classe, la valeur résiduelle de la fraction non-amortie du coût en capital demeure dans la classe.	

TABLEAU 11. TABLEAU COMPARATIF DE LA DPA ET DE LA DÉPRÉCIATION.

2.4.3.1.2 - Calcul de l'économie d'impôt liée à la DPA

Lorsqu'une entreprise détermine la VAN d'un projet, elle doit y intégrer la valeur actuelle des DPA. Pour illustrer le calcul de l'économie d'impôt (EI) nous allons prendre un exemple chiffré. Supposons qu'un projet nécessite l'achat d'un ordinateur dont le coût est $K = 5000\$$. L'ordinateur appartient à la classe d'actifs 10 dont le taux de dépréciation annuel est $d = 30\%$. Supposons également que le taux d'imposition de la firme est τ_c=40%. La firme possède plusieurs autres ordinateurs et actifs dans la classe 10, par conséquent les 5 000$ de l'ordinateur supplémentaire sont simplement ajoutés à la valeur au livre ou à la fraction non-amortie du coût en capital (FNACC) (undepreciated capital cost (UCC)) de la classe 10. La valeur incrémentale de l'achat de l'ordinateur est d'augmenter la FNACC de 5 000$. Supposons que l'ordinateur est acquis à l'année 0. À l'année 1, la firme est autorisée à réduire son revenu imposable de la valeur de la DPA qui est le taux de dépréciation multiplié par la FNACC. La DPA incrémentale, à l'année 2, liée à l'achat de l'ordinateur est :

$$DPA_1 = d \times K = 0.30 \times 5000 = 1500\$ \tag{2.22}$$

Par conséquent, l'achat de l'ordinateur permet de générer une économie d'impôt incrémentale à l'année 1 de

$$\begin{aligned} \text{économie d'impôt (EI)} &= DPA_1 \times \tau_c \\ &= Kd\tau_c \\ &= 5000 \times 0.3 \times 0.4 = 600\$ \end{aligned} \tag{2.23}$$

L'économie d'impôt est considérée comme une entrée de fonds incrémentale provenant du projet.

La DPA prise à la date 1 est déduite de la FNACC de la classe, par conséquent à la date 2 (après avoir pris la DPA), la FNACC incrémentale attribuable au projet est :

$$FNACC_1 = K - DPA_1 \tag{2.24}$$

$$= K - dK = (1-d)K$$

$$= 5000 - 1500 = 3500\$$$

À la date 2, la firme reçoit une économie d'impôt(EI) basée sur cette FNACC de :

$$EI_2 = DPA_2 \times \tau_c$$

$$= FNACC_1 \times d \times \tau_c$$

$$= (1-d)K \times d \times \tau_c$$

$$= 3500 \times 0.3 \times 0.4 = 420\$$$

De façon générale, nous avons :

$$FNACC_t = K - DPA_t \tag{2.25}$$

$$= (1-d)^t K$$

$$EI_t = DPA_t \times \tau_c \tag{2.26}$$

$$= FNACC_{t-1} \times d \times \tau_c$$

$$= (1-d)^{t-1} K \times d \times \tau_c$$

La valeur actuelle d'une économie d'impôt perpétuelle

Le processus précédent continue indéfiniment si l'actif n'est pas vendu. Dans ce cas, il est plus simple de le mettre sous forme de formule. À un taux d'actualisation de r, la valeur actuelle de cette économie d'impôt est :

(2.27)

$$VA \text{ d'une DPA perpétuelle} = \frac{K \times d \times \tau_c}{1+r} + \frac{(1-d)K \times d \times \tau_c}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{(1-d)^{t-1} \times K \times d \times \tau_c}{(1+r)^t} + \cdots$$

$$= \frac{K \times d \times \tau_c}{r+d}$$

Cette formule est dérivée de celle de la VA d'une perpétuité croissante, avec un taux de croissance $g = -d$ et un cash-flow initial de $K \times d \times \tau_c$.

Effet de la disposition d'un actif sur les économies d'impôt

Nous avons mentionné précédemment que lorsqu'un actif est acquis et qu'il appartient à une classe d'actifs déjà existante, cet actif est ajouté à la classe d'actifs. Avec cette méthode, il peut arriver que la FNACC de la classe soit supérieure à la valeur de revente de l'actif.

Supposons que dans cette situation un actif est revendu à un montant de S à la date n et que la valeur de revente est inférieure au coût original : $S \leq K$. Supposons également que la valeur de revente de l'actif est déduite de la FNACC de la classe au temps n. Étant donné qu'il y a plusieurs actifs dans la classe, nous supposons que cette FNACC est supérieure à S (si ce n'est pas le cas, nous devons voir les règles de récupération de l'amortissement que nous verrons en détails dans les paragraphes suivants). L'effet incrémental de $S \leq K$ résulte en une perte de flux d'économie d'impôt perpétuel dont la VA à la date n est :

(2.28)

$$\frac{S \times d \times \tau_c}{r+d}$$

En actualisant ce flux à la date 0, nous avons :

(2.29)

$$VA \text{ d'une perte d'économie d'impôt due à la revente d'un actif} = -\frac{1}{(1+r)^n} \times \frac{S \times d \times \tau_c}{r+d}$$

Si un actif est vendu à une valeur supérieure à son coût original ($S > K$), il génère un gain en capital ($S - K$) que l'actif soit amortissable ou non. Une fraction de ce gain en capital est incluse dans le revenu ordinaire et taxée à un taux ordinaire. Cette fraction est appelée **taux d'inclusion du gain en capital (TI)**. Au Canada, le taux de gain en capital d'une entreprise est : $\tau_g = IR \times \tau_c$.

Si un actif est amortissable et qu'il génère un gain en capital, seul le coût original de l'actif est déduit de la FNACC au moment de la vente. Par conséquent, l'effet incrémental de la revente d'un actif amortissable dont le prix de revente est supérieur au prix d'achat original (c'est-à-dire lorsqu'il y a plusieurs actifs dans la même classe et que la classe à une FNACC supérieure au coût original) est :

(2.30)

$$VA \text{ d'une perte de DPA et gain en capital} = -\frac{1}{(1+r)^n} \times \left(\frac{K \times d \times \tau_c}{r+d} + \tau_g(S-K)\right)$$

EXEMPLE Le calcul de la VA d'une DPA lorsqu'il y a plusieurs actifs dans une classe

Dans notre exemple précédent, un ordinateur est acquis à l'année 1 pour un montant de $K = 5000\$$. L'actif a un taux de DPA de $d = 30\%$. Le taux d'imposition corporatif est $\tau_c = 40\%$. Supposons que le taux d'actualisation est $r = 8\%$, et que l'ordinateur est vendu à la date $n = 5$ pour un montant $S = 800\$$. Le coût du capital après taxe d'utiliser l'ordinateur durant 5 ans est :

$$\begin{aligned}
&VA\ du\ coût\ du\ capital\ de\ l'actif\ après\ taxes = \\
&\quad = -coût\ du\ capital\ de\ l'actif + VA\ dela\ DPA\ perpétuelle + \\
&\quad + VA\ de\ la\ valeur\ de\ revente - VA\ de\ la\ perte\ de\ DPA\ sur\ disposition\ d'actif \\
&\quad = -K + \frac{K \times d \times \tau_c}{r+d} + \frac{1}{(1+r)^5}\left(S - \frac{S \times d \times \tau_c}{r+d}\right) \\
&\quad = -5000 + 1579 + 0.681 \times (800 - 253) \\
&\quad = -3048\$.
\end{aligned}$$

Règles d'imposition pour récupération de l'amortissement (recapture) et perte finale (terminal loss)

Le système de classification des actifs au Canada peut avoir pour conséquence de continuer à générer des flux perpétuels de DPA, même après la vente d'un actif. Cela est possible car la portion restante du coût du capital non-amorti générée par l'actif est attribuée au reste des actifs de la classe lorsque l'actif est vendu.

Cependant, il existe deux situations où la disposition d'un actif ne résulte pas en flux résiduels perpétuels de DPA :

- *L'actif en lui-même représente une classe*. Cela arrive lorsque l'actif est de grande envergure tel un immeuble par exemple.
- *Il y a d'autres actifs dans la classe,* mais la valeur de revente de l'actif en question est si grande qu'elle excède la FNACC de la classe entière au moment de la disposition.

Dans les deux cas, il y aura soit une **valeur finale** ou une **récupération de l'amortissement**.

Si un actif est vendu pour une valeur supérieure à la FNACC de la classe (indépendamment du fait qu'il reste des actifs dans la classe), cela signifie que le gouvernement a permis à la firme d'appliqué un amortissement trop élevé sur l'actif. Par conséquent, le système de taxes **récupère l'amortissement supplémentaire** et l'inclut au revenu imposable au moment de la disposition de l'actif.

Si un actif est le dernier restant dans une classe et qu'il est vendu à une valeur moindre que la FNACC restant dans la classe, alors les règles d'imposition permettent à la firme de bénéficier de cette **perte finale.** Cela signifie que la firme peut prendre un montant supplémentaire d'amortissement fiscal (appelé perte finale (terminal loss)) qui équivaut au montant nécessaire pour que la FNACC soit exactement égale à zéro après la disposition de l'actif.

Décrivons les éléments précédents sous forme de formule; supposons que la FNACC d'un actif juste avant la disposition de l'actif à la date n est $FNACC_n$. Si $S > FNACC_n$, il existe une **récupération de l'amortissement** et le montant $S - FNACC_n$ est additionné au revenu imposable de la firme, résultant en un paiement d'impôt incrémental de $\tau_c(S - FNACC_n)$ à la date n.

Si au contraire $S < FNACC_n$, il existe alors un bénéfice de **perte finale** parce que le montant négatif $S - FNACC_n$ est ajouté au revenu imposable.

En résumé, la formule de la VA du coût du capital d'un actif après impôt s'écrit comme suit :

(2.31)

$$\begin{aligned}
&\text{VA du coût du capital de l'actif après taxes} = \\
&= -\text{coût du capital de l'actif} + \text{VA dela DPA perpétuelle} + \text{VA de la valeur de revente} + \\
&+\text{VA de la récupération de l'amortissement ou du bénéfice sur perte finale } - \\
&-\text{VA de la perte de DPA sur disposition d'actif} \\
&= -K + \frac{K \times d \times \tau_c}{r+d} + \frac{1}{(1+r)^n}\left(S + \tau_c\,(FNACC_n - S) - \frac{FNACC_n \times d \times \tau_c}{r+d}\right)
\end{aligned}$$

2.5 - Taux d'intérêt composé continu

Nous avons assumé, dans les paragraphes précédents, que les taux d'intérêts des investissements étaient capitalisés annuellement et en fin de période or ces intérêts peuvent être capitalisés mensuellement, de façon hebdomadaire, quotidiennement ou même de façon continue. Supposons qu'un taux d'intérêt nominal annuel de 12% est capitalisé deux fois durant l'année. Si m désigne le nombre de capitalisations annuelles, pour $m = 2$ nous avons :

(2.32)

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} = \left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2} = (1.06)^2 = 1.1236$$

Le taux d'intérêt annuel est alors de 12.36%.

Si $m = 12$

(2.33)

$$\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12} = (1.01)^{12} = 1.1268$$

Le taux d'intérêt annuel est donc de 12.68%.

Si $m = 365$

(2.34)

$$\left(1+\frac{0.12}{365}\right)^{365} = (1.000329)^{365} = 1.12747$$

Le taux d'intérêt annuel est de 12.747%.

Si nous laissons m croitre jusqu'à l'infini, nous aurons un facteur d'accumulation de e^{jn}, où e qui est la base du logarithme népérien est égal à 2.71828. Si $j = 0.12$ et $n = 1$ (n représentant le nombre de périodes), nous avons $e^{0.12} = 1.12750$. Le taux d'intérêt continu permet de réaliser une valeur future plus grande que celle obtenue avec un taux d'intérêt discret. La valeur future d'un investissement actualisé à un taux d'intérêt continu se calcule comme suit :

(2.35)

$$VF = e^{jn}$$

et la valeur présente :

(2.36)

$$VP = e^{-jn}$$

Il est possible de convertir un taux d'intérêt composé annuel en un taux d'intérêt équivalent qui est continu et vice-versa. Pour illustrer, supposons que r représente un taux d'intérêt composé annuellement et que j est le taux d'intérêt équivalent continu. La relation suivante doit tenir si nous avons la même valeur présente ou valeur future indépendante d'un taux d'intérêt discret ou continu :

(2.37)

$$(1 + r) = e^{j}$$

L'équation permettant de convertir d'un taux continu j à un taux annuel composé correspondant est la suivante :

(2.38) $$r = e^j - 1$$

La conversion d'un taux annuel composé à un taux continu équivalent se fait par l'équation suivante :

(2.39) $$j = \ln(1 + r)$$

2.6 - Taux de croissance au niveau des cash-flows

Nous avons vu, dans la section précédente, que le taux d'intérêt peut être capitalisé de façon continue plutôt qu'en fin de période, il en est de même pour les cash-flows d'un investissement. En effet, au lieu de recevoir par exemple 1$ à la fin de chaque année, il peut y avoir m paiements par année d'un montant de $1/m$ dollars. Le montant total reçu chaque année serait alors de 1$. Si m devient très grand alors la valeur actuelle d'une série de tels paiements, effectués au cours de n années, avec un taux d'intérêt composé continu j serait :

(2.40)

$$Valeur\ actuelle\ d'une\ annuité\ continue = \frac{1 - e^{jn}}{j}$$

L'équation précédente s'applique si les cash-flows (continus) sont actualisés à un taux d'intérêt continu. Mais, il est possible d'avoir l'un sans l'autre. En effet, comme nous l'expliquerons ci-dessous, il est possible d'avoir des cash-flows continus actualisés à un taux d'intérêt discret sans pour autant perdre en précision comparé à des cash-flows discrets actualisés à un taux d'intérêt discret. Supposons qu'un d'intérêt est capitalisé m fois par année à un taux d'intérêt nominal de j par année. Il existe m périodes dans l'année. Le taux d'intérêt effectif de chaque période est de j/m. La valeur actuelle d'une annuité de 1$ par année pendant n années ($n \times m$ périodes) est :

(2.41) VA d'une annuité continue actualisée à un taux d'intérêt discret =

$$\frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$$

Supposons, par exemple, que j est de 12% et que l'annuité dure 10 ans ou 120 mois.

(2.42)

$$\frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j} = \frac{1 - \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{-120}}{0.12} = \frac{1 - (1 + 0.01)^{-120}}{0.12} = 5.80838$$

Le Coût du Capital en Présence de Risque

CHAPTER 3

Les références aux ouvrages et articles cités dans ce chapitre sont disponibles à la fin du tome 2.

Dans ce chapitre, nous allons tenter de définir intuitivement, mathématiquement et rigoureusement ce qu'est le risque d'un actif et comment sa volatilité et sa corrélation avec le risque systématique du marché l'influence. Ceci se fera principalement à partir du modèle *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). De plus, tel que Modigliani et Miller l'ont déjà fait, nous montrerons comment le risque d'un actif n'est pas influencé par sa méthode de financement sauf en situation de taxation.

3:1 - THÉORIE DE L'UTILITÉ EN INCERTITUDE

Tout d'abord, établissons une hypothèse qui est fondamentale en analyse de projet. Pendant tout ce document, nous ferons l'hypothèse que tous les agents sont averses au risque. Ainsi, un agent ayant le choix entre deux actifs ayant la même quantité espérée choisira toujours l'actif le moins risqué.

Par exemple, un agent a deux options, soit le choix de recevoir 100$ ou soit de tenter sa chance dans un jeu lui donnant 50% de probabilité de recevoir 200$ et 50% de probabilité de recevoir 0$, donc un gain espéré de $0{,}5 \times 200\$ + 0{,}5 \times 0\$ = 100\$$. Alors, nous faisons l'hypothèse que l'agent choisira toujours la première option lui donnant 100$ sans risque. De plus, même si la deuxième option lui avait donné un gain espéré supérieur à 100$, il est fort possible que l'agent choisirait tout de même la première option du 100$ sans risque. En fait, si l'on simplifie la théorie à un stade très primaire, vous verrez que tout au long de ce document, par plusieurs façons différentes, on cherche simplement à savoir qu'elle devrait être l'espérance de gain de la deuxième option pour que l'agent la choisisse. Si l'on vous donne le choix entre 100$ assurés ou l'option de jouer une seule fois un jeu de hasard avec 50% de chance d'obtenir 220$ et 50% de chance d'obtenir 0$, donc avec une espérance de gain de $0{,}5 \times 220\$ + 0{,}5 \times 0\$ = 110\$$. Alors, que choisiriez-vous? Le 100$ sans risque ou une espérance de gain de 110$ avec risque. La réponse n'est pas évidente et diffère d'une personne à l'autre.

Deuxièmement, nous faisons l'hypothèse que les agents ont une préférence inter-temporelle pour le présent. Ainsi, pour un gain égal, un agent préférera toujours recevoir ce gain maintenant plutôt que dans le futur. Par exemple, si l'on donne encore deux options à un agent, soit de recevoir 100$ sans risque maintenant ou de recevoir 100$ sans risque dans le futur, peu importe l'intervalle de temps dans le futur, l'agent préférera toujours recevoir 100$ maintenant. Encore dans ce cas, il est intéressant de savoir de combien la deuxième option doit être supérieure à 100$ pour que l'agent décide d'attendre. Et encore une fois, ce montant, qui détermine le taux de préférence inter-temporelle, peut différer d'une personne à l'autre. Cependant, il est très facile de déterminer le taux moyen pour l'ensemble des agents, c'est le taux d'emprunt ou de prêt sans risque dans une banque, par exemple le taux des bons du trésor. Ainsi, si ce taux est de 5%, un agent peut par l'entremise de cet outil financier prendre les 100$ maintenant et le prêter à la banque pour recevoir 105$ à l'année suivante. Il peut aussi emprunter 100$ maintenant et devoir rembourser 105% l'année suivante. Donc, dans ce cas, un agent sera indifférent entre les deux options de recevoir 100$ maintenant ou 105$ l'année suivante puisqu'en choisissant n'importe laquelle de ces options, il peut reconstituer l'autre par l'entremise d'un prêt ou d'un emprunt au taux sans risque à la banque. Bref, nous faisons l'hypothèse que le taux de préférence inter-temporelle est positif, donc que pour le même gain, on préfère celui présent à celui futur. Et de plus, nous faisons l'hypothèse que ce taux est égal au taux de prêt ou d'emprunt sans risque par les banques.

Troisièmement, nous faisons l'hypothèse que les préférences des agents sont concaves. Donc, l'utilité marginal d'une unité supplémentaire est décroissante à mesure la quantité augmente.

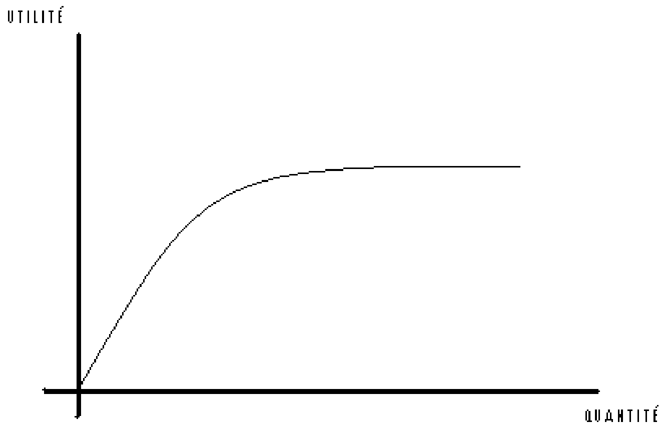


FIGURE 1. FONCTION D'UTILITÉ CONCAVE.

Cette hypothèse est moins cruciale que les deux premières. Toutefois, en la jumelant à l'hypothèse d'aversion pour le risque, elle est très importante pour démontrer le principe de l'équivalent certain que nous explorons en détails plus tard.

3:2 - LA RELATION ENTRE LE RISQUE ET LE RENDEMENT

Intuition : Plus il y a de risque, plus le rendement est élevé

Intuitivement, un investisseur demande un rendement sur un actif proportionnel à la probabilité que l'émetteur de l'actif soit dans l'impossibilité de rembourser l'investissement initial et/ou de respecter les termes de l'entente sur les intérêts attendus sur l'actif. En d'autres termes un investisseur qui prête de l'argent à un émetteur d'obligations, d'actions ou autres, exigera un rendement plus élevé si la probabilité que l'émetteur tombe en faillite est grande. C'est ainsi que le rendement sur des obligations d'une compagnie est généralement plus élevé que sur des obligations gouvernementales, puisqu'il y a moins de chance que le gouvernement tombe en faillite. Aussi, le rendement sur des actions d'une compagnie est généralement plus élevé que sur des obligations de cette même compagnie puisque dans l'éventualité d'une faillite, la loi fait en sorte que les détenteurs d'obligations auront plus de chance de se faire rembourser alors que les détenteurs d'actions auront tout perdu l'investissement initial.

De manière plus précise, cette intuition de demander un rendement élevé s'il y a possibilité (risque) de perdre son investissement pourrait rentrer dans un concept plus général où l'on demande un rendement proportionnel à la volatilité de l'actif. La volatilité agit telle qu'une mesure statistique du risque. Pour chaque actif, en se basant sur son historique, on peut mesurer la volatilité comme étant l'écart-type du rendement de l'actif comparativement au rendement moyen de cet actif. Donc, la volatilité est établie statistiquement par l'écart-type et représente l'étendue de la dispersion attendue autour du rendement moyen de l'actif. Mais n'oublions pas que ce qui intéresse l'investisseur c'est la volatilité future et non pas celle du passé, donc l'investisseur peut baser ses anticipations de la volatilité future sur celle du passé, mais il y a un jugement final laissé à l'intuition de l'investisseur. C'est ainsi qu'un investisseur exigera un rendement moyen plus élevé sur un actif dont l'émetteur a de grandes chances de faire faillite puisque dans ce cas le rendement sera très petit (voire négatif) et donc éloigné du rendement moyen et ainsi augmentera l'écart-type anticipé. De plus, même si la probabilité de faillite est nulle, la volatilité peut être tout de même élevé puisque par définition, elle ne mesure que l'écart-type du rendement face au rendement moyen, et non pas la probabilité de faillite.

Voyons mathématiquement comment ces principes sont appliqués. Premièrement, prenons un petit échantillon du rendement de la compagnie A pour une semaine du lundi au vendredi, donc avec 5 observations ($n = 5$).

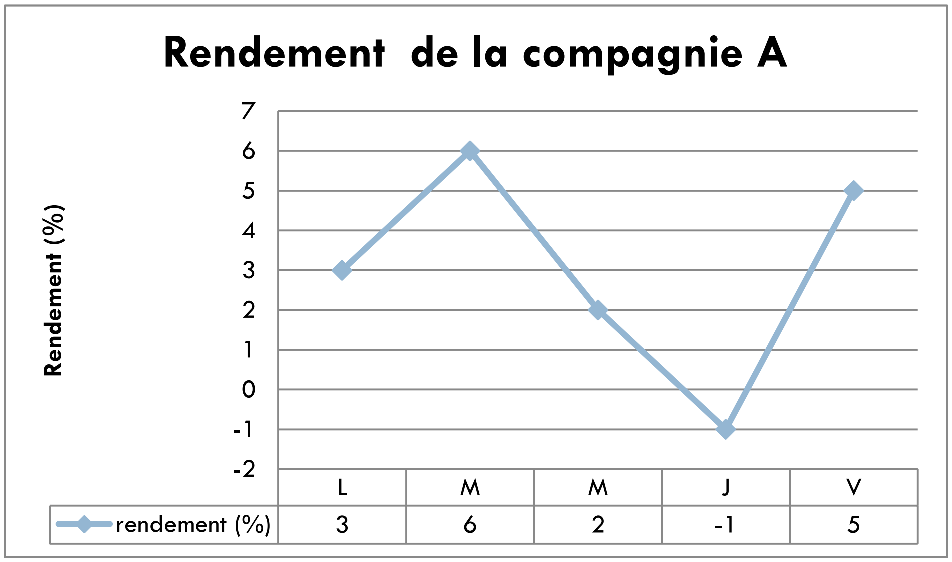


FIGURE 2. RENDEMENT DE LA COMPAGNIE A.

Comme vous le savez sans doute, le rendement moyen de la compagnie A est simple à calculer et est donné par :

(3.1)

$$\overline{R_A} = \frac{3 + 6 + 2 + (-1) + 5}{5} = 3\%$$

L'écart-type est donné par :

(3.2)

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_{Ai} - \overline{R_A}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(3-3)^2 + (6-3)^2 + (2-3)^2 + (-1-3)^2 + (5-3)^2}{5}} = 2.45$$

Donc, pour cet échantillon, le rendement moyen de la compagnie A est de 3% avec un écart-type de 2,45%. Par conséquent, le rendement de l'actif est typiquement situé à une différence de 2,45% du rendement moyen de 3%.

2.1 - Diminution du risque par diversification

On peut diminuer le risque d'un portefeuille d'actifs en acquérant des actifs ayant une corrélation négative entre eux. Ainsi, si l'on prend deux actifs ayant une forte volatilité et que leur rendement est corrélé négativement, c'est-à-dire que lorsque le rendement de l'un est élevé, celui de l'autre est petit et vice-versa. Donc, la combinaison des deux actifs donnera un rendement égal à la moyenne pondérée des rendements moyens des deux actifs mais la volatilité sera diminuée.

Pour l'illustrer, sur le même échantillon de temps que précédemment, prenons aussi le rendement de la compagnie B :

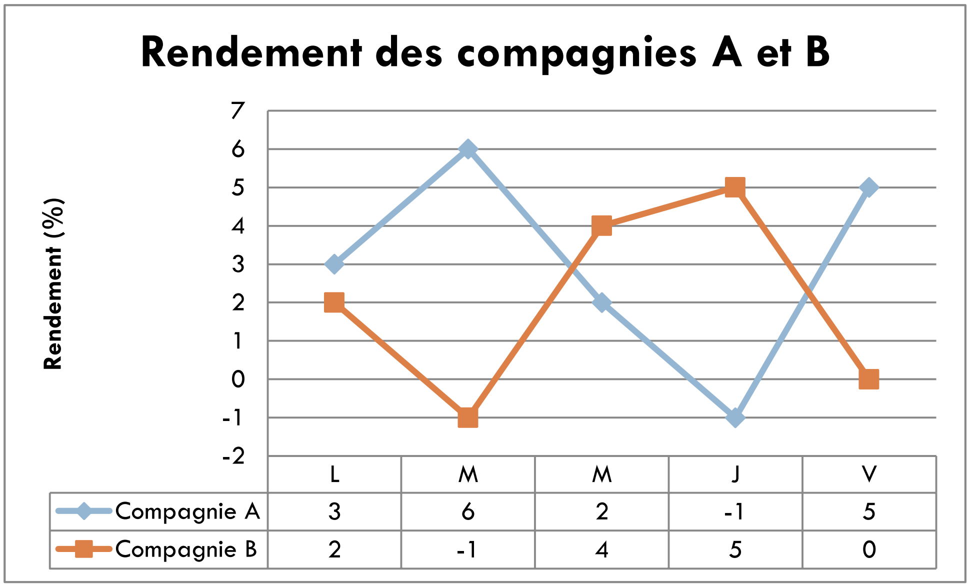


FIGURE 3. RENDEMENT DES COMPAGNIES A ET B.

Le rendement moyen de la compagnie B est de :

(3.3)

$$\overline{R_B} = \frac{2 + (-1) + 4 + 5 + 0}{5} = 2\%$$

Et l'écart-type de la compagnie B est de :

(3.4)

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_{Bi} - \overline{R_B}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(2-2)^2 + (-1-2)^2 + (4-2)^2 + (5-2)^2 + (0-2)^2}{5}} = 2{,}28$$

On peut alors calculer la covariance entre les rendements des compagnies A et B :

(3.5)

$$\operatorname{cov}(R_A, R_B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_{Ai} - \overline{R_A})(R_{Bi} - \overline{R_B})$$

$$= \frac{1}{5}[(3-3)(2-2) + (6-3)(-1-2) + (2-3)(4-2) + (-1-3)(5-2) + (5-3)(0-2)] = -5{,}4$$

Et ensuite la corrélation entre les rendements des compagnies A et B :

(3.6)

$$\rho_{AB} = \frac{cov(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-5.4}{2.45 \times 2.28} = -0.97$$

La corrélation est toujours comprise entre -1 et 1. Une corrélation positive indique que les rendements des compagnies ont tendance à évoluer dans la même direction et l'inverse si la corrélation est négative.

Alors, voyons maintenant comment le risque d'un portefeuille contenant seulement des actifs de la compagnie A sera diminué si on lui ajoute des actifs d'une compagnie dont le rendement est corrélé négativement tel que celui de la compagnie B. Prenons l'éventualité où le nouveau portefeuille sera composé de 60% d'actifs de la compagnie A ($\pi = 0{,}6$) et 40% d'actifs de la compagnie B. Alors le rendement moyen de ce portefeuille sera :

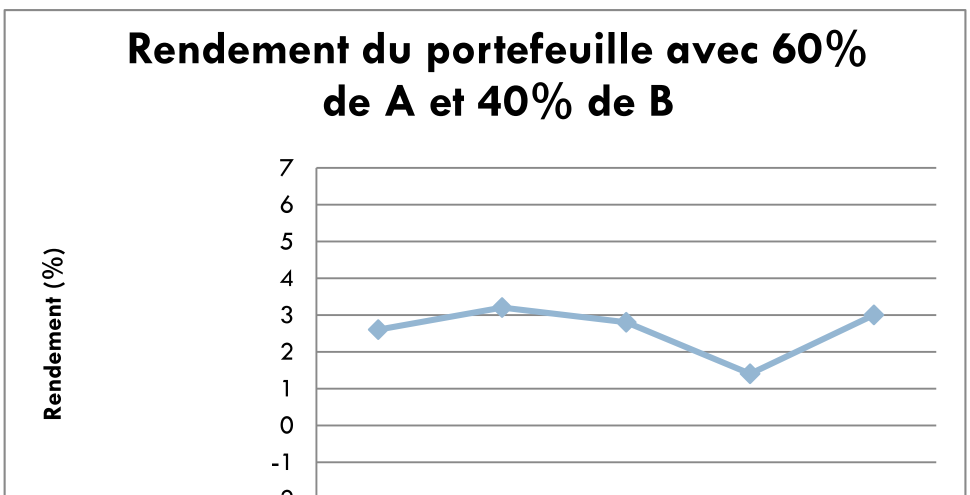
(3.7) $$\overline{R_{AB}} = \pi\overline{R_A} + (1-\pi)\overline{R_B} = 0{,}6 \times 3 + (1-0{,}6) \times 2 = 2{,}6\%$$

Et ce qu'il y a d'intéressant, son écart-type sera de :

(3.8) $$\sigma_{AB} = \sqrt{\pi^2\sigma_A^2 + (1-\pi)^2\sigma_B^2 + 2\pi(1-\pi)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}$$

$$= \sqrt{0{,}6^2 \times 2{,}45^2 + (1-0{,}6)^2 \times 2{,}28^2 + 2 \times 0{,}6 \times (1-0{,}6) \times (-0{,}97) \times 2{,}45 \times 2{,}28} = 0{,}63\%$$

Donc pour un portefeuille diversifié composé de 60% d'actifs de A et de 40% d'actifs de B, le rendement moyen sera de 2,6% et l'écart-type sera de 0,63%, ce qui est moins que pour les compagnies A et B individuellement. On peut facilement observer que ce portefeuille est en effet moins volatil.



	L	M	M	J	V
portefeuille A et B	2,6	3,2	2,8	1,4	3

FIGURE 4. RENDEMENT DU PORTEFEUILLE AVEC 60% DE A ET 40% DE B.

Pour s'assurer que la formule utilisée pour déterminer l'écart-type du portefeuille est bonne, calculons l'écart-type de la manière initiale à partir des rendements du portefeuille.

(3.9)

$$\sigma_{AB} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_{ABi} - \overline{R_{AB}}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(2{,}6-2{,}6)^2 + (3{,}2-2{,}6)^2 + (2{,}8-2{,}6)^2 + (1{,}4-2{,}6)^2 + (3-2{,}6)^2}{5}} = $$
$$= 0{,}63$$

Donc, pour ce portefeuille, on obtient un écart-type de 0,63%, tel que calculé précédemment lorsqu'on conserve toutes les décimales.

Cependant il faut faire attention, si l'on combine deux actifs ayant une corrélation positive, alors l'écart-type augmentera et ainsi le portefeuille deviendra plus risqué.

Dès que l'on se procure un deuxième actif corrélé négativement au premier, la diminution du risque est très grande, cependant la diminution du risque due à l'achat d'un troisième actif corrélé négativement aux deux premiers réduit encore la volatilité de l'ensemble du portefeuille, mais de manière moins importante que l'effet dû à l'achat du deuxième actif. Ainsi, plus l'on possède d'actifs corrélés négativement entre eux, plus la volatilité du portefeuille est diminuée, mais cependant la diminution marginale de la volatilité diminue à mesure que le nombre d'actifs augmente. Donc la relation entre l'écart-type d'un portefeuille et le nombre d'actifs est représentée par une fonction inverse.

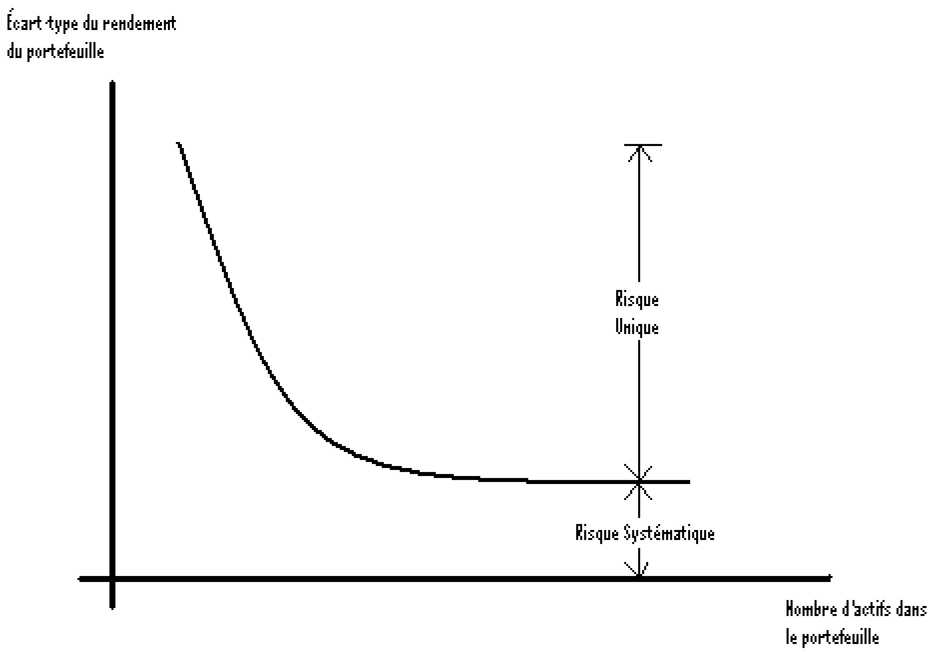


FIGURE 5. ÉCART-TYPE DU RENDEMENT DU PORTEFEUILLE EN LE DIVERSIFIANT.

Généralement, un portefeuille contenant 20 actifs bien diversifiés aura diminué la grande majorité du risque qui peut être potentiellement éliminé, c'est ce que l'on appelle le **risque unique**. C'est le risque qui s'applique à une compagnie directement et uniquement selon ses activités propres. Ainsi, ce risque peut être éliminé en se procurant des actifs d'une compagnie compétitrice produisant un substitut et/ou des actifs d'une compagnie qui profiterait de l'éventualité où la malchance frapperait la première compagnie. Par exemple, on peut diminuer le risque d'un portefeuille contenant des actions d'une compagnie aérienne faisant face à des difficultés financières dues à une mauvaise gestion interne en faisant l'acquisition des actions d'une compagnie aérienne compétitrice qui profiterait de la faillite de celle-ci. De plus, si l'on possède un portefeuille contenant ces actions de compagnies aériennes, il y a un risque unique dû à une possible augmentation du prix du pétrole qui ferait en sorte que les coûts en carburant des avions seraient plus élevés. On peut éliminer ce risque en ajoutant des actions de compagnies pétrolières à ce portefeuille qui profiteraient de cette hausse des prix du pétrole. Donc, plus un portefeuille est diversifié, moins le risque unique sera élevé, jusqu'à son élimination complète.

Malgré une grande diversification, il est impossible d'éliminer complètement tout le risque d'un portefeuille. Ainsi, le risque du marché, aussi appelé le **risque systématique**, demeure. C'est le risque que des événements, généralement de nature macroéconomique, politique ou environnementale, affectent le marché dans son ensemble et de la même façon. Nous pouvons donner des exemples d'événements ayant un impact négatif sur le marché dans son ensemble : une hausse drastique et non-anticipée des taux d'intérêt, se faire attaquer par un pays ennemi ou une grande épidémie. Malgré quelques rares opportunistes qui pourraient en profiter, leur nombre restreint, mais surtout l'impossibilité de prévoir l'événement et qui en profitera, fait en sorte qu'il est impossible de se prémunir à l'avance contre ce genre de risque. Donc, une diversification ne pourra pas éliminer le risque de faire face à de tels événements.

Un composant du risque systématique est le **risque systémique**. C'est le risque d'un effondrement du marché dû à l'échec du système bancaire. Ainsi, la faillite d'une banque peut entraîner la détresse financière d'autres banques, mais aussi la perte de confiance des individus et des compagnies envers le système bancaire. Cela engendrera un cercle vicieux qui pourrait faire tomber les banques par effet de domino ainsi que la plupart des autres actifs. Le risque systémique ne peut pas être éliminé par la diversification des actifs.

2.2 - La frontière d'efficacité des portefeuilles

Un investisseur se préoccupe de deux éléments : le rendement et le risque. Pour le même rendement, il choisira l'actif le moins risqué, et pour le même risque, il choisira l'actif ayant le meilleur rendement. C'est ainsi que l'on définit l'efficacité d'un portefeuille, soit le meilleur rendement pour un niveau de risque donné ou le plus petit risque pour un rendement donné. Ainsi, dans un graphique du rendement en fonction du risque, tous les portefeuilles non efficaces seront inclus sous la frontière de tous les cas possibles de portefeuilles efficaces.

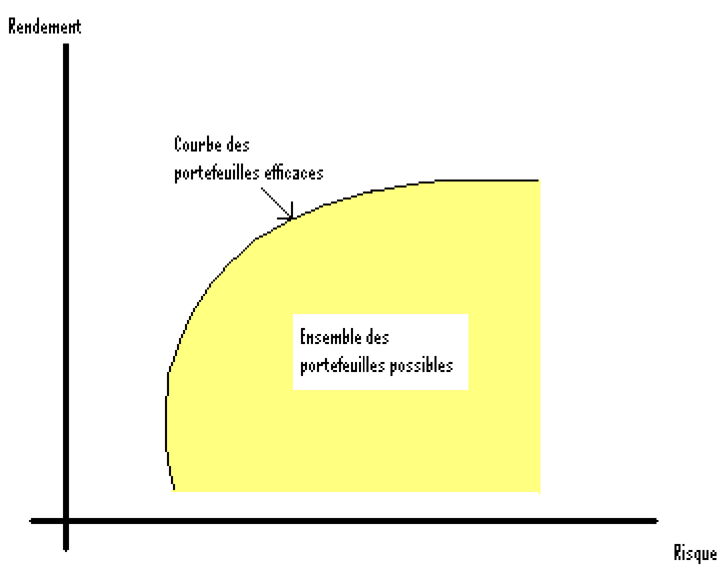


FIGURE 6. LA FRONTIÈRE D'EFFICACITÉ DES PORTEFEUILLES.

En introduisant la possibilité d'emprunt et de prêt nous pouvons dépasser cette frontière d'efficacité des portefeuilles. Premièrement, on peut déterminer le meilleur des portefeuilles parmi ceux situés sur la frontière d'efficacité. Ce sera celui tangent à la frontière d'efficacité dont la tangente passe par le taux de rendement pour un actif à risque nul, par exemple des obligations gouvernementales à court terme. Dans un cadre compétitif où l'information est complète et disponible, le meilleur portefeuille sera en fait celui du marché. Avec un montant d'argent à investir, on pourra ainsi décider de la combinaison désirée de deux actifs, soit prêt/emprunt d'obligations sans risque ou la part d'actions détenue dans un portefeuille tel que le marché. Ainsi, toutes les combinaisons possibles seront situées sur une droite. Alors le rendement devient directement proportionnel au risque.

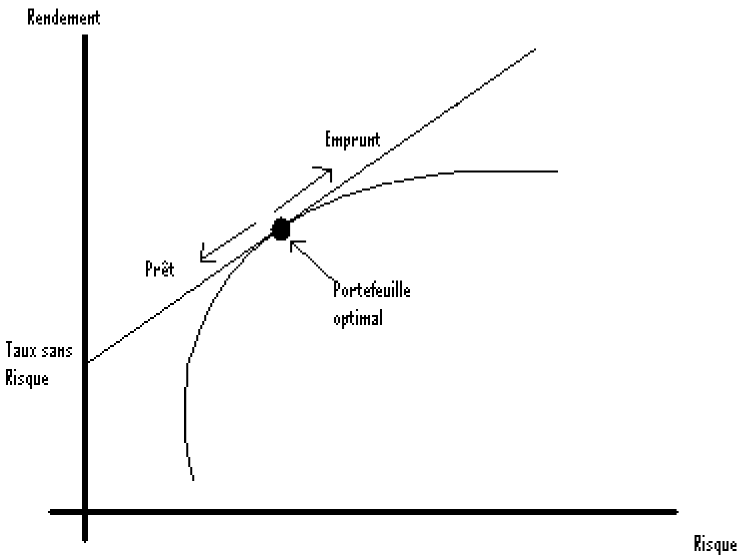


FIGURE 7. LE PORTEFEUILLE OPTIMAL AVEC POSSIBILITÉ DE PRÊT ET D'EMPRUNT.

3:3 - MODÈLES POUR DÉTERMINER LE COÛT DU CAPITAL: CAPM ET APT

3.1 - Arbitrage Pricing Theory (APT)

Développé premièrement par Stephen Ross en 1976, ce modèle n'est en fait qu'une régression linéaire du rendement d'un actif sur différents facteurs l'influençant. À partir de données historiques du rendement d'un actif et des données sur des facteurs souvent macroéconomiques tels que le taux d'inflation, la croissance du PIB, le prix du pétrole, le taux d'intérêt à court terme ou autres, on peut établir la relation entre le rendement de l'actif et chacun de ces facteurs. Par cette régression, pour chaque facteur, nous obtenons les paramètres (β) qui nous indiquent à partir des données historiques comment chaque facteur influence en moyenne le rendement de l'actif observé. Nous obtenons donc un modèle tel que,

$$R_i = \alpha + \beta_1 \times \text{facteur}_1 + \beta_2 \times \text{facteur}_2 + \cdots + \beta_n \times \text{facteur}_n + \text{erreur} \quad (3.10)$$

Où R_i = rendement de l'actif que l'on cherche à prédire

α = ajustement lorsque tous les facteurs sont nuls

β = paramètre de sensibilité entre le facteur et le rendement de l'actif

erreur = variation du rendement de l'actif qui n'est pas due aux facteurs observés

Une fois les paramètres (β) déterminés mathématiquement à partir des données historiques, nous pouvons appliquer la formule ci-haut et ainsi obtenir le rendement moyen de l'actif. Ce rendement prédit comporte une possibilité d'erreur, cependant la valeur espérée de cette erreur est nulle. C'est-à-dire que parfois le rendement prédit peut être plus élevé ou plus petit que le rendement réalisé, mais en moyenne l'erreur de la prévision sera nulle.

Une autre façon de voir le modèle APT est de régresser la prime de risque de l'actif, c'est-à-dire la différence entre le rendement de l'actif et le rendement sans risque, sur la prime de risque due à différents facteurs tel que mentionné précédemment. Ainsi,

$$R_i - R_z = B_1 \times PR_1 + B_2 \times PR_2 + \cdots + B_n \times PR_n + \text{erreur} \tag{3.11}$$

Où R_i = rendement de l'actif que l'on cherche à prédire

R_z = rendement sans risque (obligation gouvernementale à court terme)

PR_n = Prime de risque due au facteur n

B_n = paramètre de sensibilité entre PR_n et le rendement de l'actif

erreur = variation de la prime de risque de l'actif qui n'est pas due aux facteurs observés

(L'espérance est nulle)

Notons premièrement que $B_n \neq \beta_n$. Donc, même si l'on régresse pour la prime de risque du même facteur sur lequel on régressait dans le modèle initial, cela ne résulterait pas à des paramètres de sensibilité identiques puisque les unités utilisées sont différentes.

Deuxièmement, le modèle utilisant les primes de risque (PR_n) peut être très difficile à utiliser parce que celles-ci sont difficilement quantifiables. En effet, si l'on demande quelle est la prime de risque à laquelle une compagnie pétrolière fait face due à l'instabilité politique du Moyen Orient, on constate que plusieurs opinions divergent et qu'il existe peu de bases de données historiques à ce sujet !

3.2 - Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Au début des années 60, trois économistes, William Sharpe, John Lintner et Jack Treynor, ont établi les fondements d'un modèle bien connu en finance sous le nom de **Capital Asset Pricing Model** (CAPM). Bien que le modèle CAPM fût établi avant le modèle APT, on peut dire que le modèle CAPM n'est en fait qu'un cas particulier du modèle APT. En effet, à partir de données historiques, le modèle CAPM régresse la prime de risque d'un certain actif sur la prime de risque du marché. On cherche donc la relation historique, et donc celle anticipée à se poursuivre dans le futur, entre d'un côté la différence entre le rendement de l'actif et le rendement sans risque et de l'autre côté la différence entre le rendement du marché et le rendement sans risque. L'équation du modèle CAPM est donc :

$$R_i - R_z = \beta_i (R_m - R_z) + \text{erreur} \tag{3.12}$$

Où R_i = rendement de l'actif que l'on cherche à prédire

R_z = rendement sans risque (obligation gouvernementale à court terme)

R_m = rendement du marché (exemple Indices Dow-Jones, S&P/TSX, ou autres)

β_i = paramètre de sensibilité entre la prime de risque de l'actif et celle du marché

erreur = variation de la prime de risque de l'actif qui n'est pas due au marché

(L'espérance est nulle)

Le bêta (β) d'un actif particulier est donc un paramètre de sensibilité entre le rendement de cet actif et le rendement du marché. Ainsi, d'une certaine façon le bêta est une mesure de risque de l'actif. Plus le bêta est élevé, plus le rendement de l'actif est élevé comparativement à celui du marché et ainsi plus l'on considère l'actif risqué.

Un actif que l'on considère sans risque tel que les obligations gouvernementales à court terme aura un bêta de zéro. On peut voir dans l'équation que le côté gauche sera nul puisque que l'on prend la différence du rendement sans risque avec lui-même. Donc, il faut que le côté droit de l'équation soit aussi nul, et pour se faire, le bêta doit être zéro puisque généralement la différence entre le rendement du marché et celui sans risque est positive. Un actif ayant un bêta de zéro signifie donc que peu importe la prime de risque du marché, l'actif aura toujours en moyenne le même rendement que l'actif sans risque tel que les obligations gouvernementales.

$\beta < 0$	$0 \leq \beta < 1$	$\beta = 1$	$\beta > 1$
Le rendement de l'actif est inverse à celui du marché. Le rendement de cet actif augmentera à mesure que le rendement du marché diminue.	L'actif est moins risqué que le marché mais tout de même plus risqué que les obligations sans risque. Le rendement de l'actif se situe donc en moyenne entre celui des obligations sans risque et celui du marché.	L'actif à le même niveau de risque que le marché. Ainsi, le rendement de l'actif est en moyenne exactement le même que celui du marché.	Un béta plus grand que un signifie que l'actif est davantage risqué que le marché. Ainsi, le rendement de l'actif est en moyenne plus élevé que celui du marché.

TABLEAU 1. LE RENDEMENT DE L'ACTIF ET CELUI DU MARCHÉ EN FONCTION DE BETA.

Maintenant, essayons de comprendre exactement pourquoi le bêta est une mesure de risque. De plus, essayons de comprendre plus en détails pourquoi la relation entre le rendement et le risque est directement proportionnelle lorsque l'on représente le risque par bêta, comparativement à la frontière d'efficacité qui était courbée lorsque le risque était représenté par l'écart-type.

On a vu précédemment que l'investisseur va demander un rendement plus élevé si l'actif est risqué, ce que l'on représentait par une grande volatilité (écart-type). Cependant dans un marché concurrentiel, où l'on a la possibilité d'investir dans un portefeuille diversifié, représenté par le marché, et la possibilité de prêter ou emprunter à partir d'un actif sans risque, tel que des obligations gouvernementales à court terme, l'écart-type du rendement de l'actif n'est plus le seul élément influençant le risque, c'est-à-dire le bêta dans ce modèle. Le risque de l'actif est aussi influencé par la corrélation entre le rendement de l'actif et celui du marché. Ainsi, un actif étant fortement corrélé avec le marché aura un bêta plus élevé car on considère que cet actif comporte les mêmes risques systématiques que le marché. Alors qu'un actif étant moins corrélé avec le marché aura un bêta plus petit puisque cet actif est moins soumis au risque systématique. De plus, un actif corrélé négativement avec le marché pourra même avoir un bêta négatif, même si l'actif a une forte volatilité, puisque l'on considère que cet actif permet se couvrir (*hedging*) contre le risque systématique du marché. Alors, une manière d'interpréter le bêta serait de dire qu'il est un multiplicateur du risque systématique du marché. Une autre interprétation équivalente serait de dire que le bêta d'un actif est un indicateur du risque supplémentaire qu'engendrerait l'ajout de cet actif à un portefeuille typique du marché. Ainsi, si l'on prend ce portefeuille représenté par le marché, l'ajout d'un actif ayant un bêta plus grand que 1 résultera en une augmentation de la volatilité (écart-type), et donc du risque de ce portefeuille. D'un autre côté, si l'on y ajoute un actif ayant un bêta plus petit que un, la volatilité (écart-type), et donc le risque de ce portefeuille, sera diminuée.

Voyons ce raisonnement de façon mathématique. Le bêta est égal à la covariance entre le rendement du marché et celui de l'actif, divisé par la variance du marché :

(3.13)

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_m)}{\mathrm{var}(R_m)}$$

De plus, on sait que

(3.14)

$$\mathrm{cov}(R_i, R_m) = \rho_{im}\sigma_i\sigma_m$$

Où ρ_{im} = Corrélation entre le rendement de l'actif et celui du marché

σ_i = Écart-type du rendement de l'actif

σ_m = Écart-type du rendement du marché

On sait aussi que

(3.15)

$$\mathrm{var}[R_m] = \sigma_m^2 = \left(\text{Écart-type du rendement du marché}\right)^2$$

Et donc,

(3.16)

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_m)}{\mathrm{var}(R_m)} = \frac{\rho_{im}\sigma_i\sigma_m}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{im}\sigma_i}{\sigma_m}$$

Alors pour un écart-type du marché (σ_m) constant et connu, on peut voir que le bêta d'un actif dépend de deux éléments. Premièrement, de la corrélation entre le rendement de l'actif et celui du marché (ρ_{im}) et deuxièmement de la volatilité (écart-type) du rendement de l'actif (σ_i). Donc, dans un contexte plus généralisé où l'on compare l'actif par rapport au marché, le risque de l'actif, représenté par le bêta, n'est plus uniquement relié à la volatilité du rendement de l'actif tel que supposé précédemment, mais il est aussi influencé par la corrélation entre son rendement et celui du marché.

De plus, cette relation entre le rendement d'un actif et son risque, représenté par bêta, est directement proportionnelle. Alors, dans un graphique donnant le rendement en fonction du risque (bêta), tous les actifs se retrouveront sur une ligne à pente positive appelée la **ligne des actifs du marché** (security market line) qui passe par le rendement de l'actif sans risque lorsque le bêta est de zéro et par le rendement du marché lorsque le bêta est de 1.

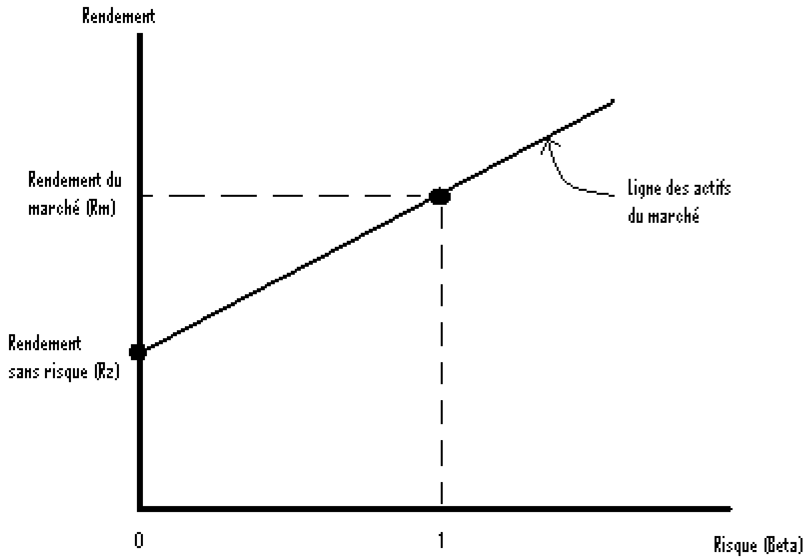


FIGURE 8. LIGNE DES ACTIFS DU MARCHÉ (SECURITY MARKET LINE).

En effet, un actif se retrouvant temporairement sous cette ligne, tel qu'au point A de la Figure , donc donnant un rendement plus faible pour un même niveau de risque que les actifs sur la ligne, sera délaissé par les investisseurs car ces derniers peuvent facilement atteindre tous les points sur la ligne en combinant le portefeuille du marché à un prêt ou emprunt d'actifs sans risque tels que des obligations gouvernementales à court terme. Ainsi, puisque la demande pour cet actif observé est diminuée, le rendement augmentera pour rétablir l'équilibre entre l'offre et la demande et ainsi rejoindre la ligne. D'autre part, un actif se retrouvant temporairement au dessus de la ligne, tel que le point B, sera en forte demande puisqu'il donne un rendement plus élevé pour le même niveau de risque qui peut être atteint par une combinaison du portefeuille du marché à un prêt ou emprunt d'actifs sans risque. Alors, le rendement s'ajustera pour rééquilibrer l'offre et la demande et revenir sur la ligne.

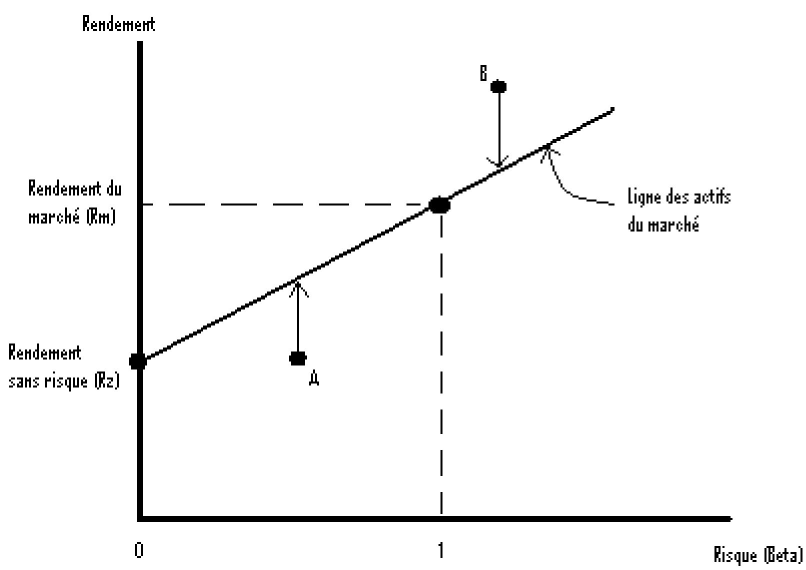


FIGURE 9. TOUS LES ACTIFS REJOIGNENT LA LIGNE DES ACTIFS DU MARCHÉ.

3.2.1 - Critique du modèle CAPM

N'oublions toutefois pas que le bêta est établi à partir de données historiques. Il n'est alors qu'un outil adéquat pour prédire le rendement d'un actif seulement que si l'intervalle de temps choisi pour les données historiques est représentatif des anticipations futures. Ainsi, l'intervalle de temps choisi doit être suffisamment large pour inclure l'historique de toutes les possibilités de risque auxquelles l'actif a fait face dans le passé et auxquelles il pourrait éventuellement faire face dans le futur. D'un autre côté, on peut donc exclure de nos données historiques celles qui sont dues à un risque qui est impossible de se reproduire dans le futur.

De plus, en observant l'équation mathématique du bêta, on s'aperçoit que celui-ci dépend aussi de l'écart-type du rendement du marché. Auparavant, on a supposé qu'il était constant. Cependant, en réalité l'écart-type du marché peut varier à travers le temps. Cela ne signifie pas nécessairement que le modèle CAPM doit être complètement remis en question. Si l'on compare le bêta de deux actifs différents pour lesquels on a utilisé le même intervalle de temps, cette façon de faire sera adéquate puisque l'écart-type du marché sera le même dans les deux cas. Cependant si l'on compare les bêtas d'une même compagnie ou de compagnies différentes à partir d'intervalles de temps différents, alors il faudra bien être conscient que les bêtas peuvent être affectés par des écart-types du rendement du marché différents à travers le temps, ce qui n'aurait rien à voir avec les causes fondamentales du risque de l'actif.

Une autre mise en garde est que, en théorie, le portefeuille du marché sur lequel on base le rendement du marché devrait inclure tous les actifs risqués possibles tels que les obligations, les options financières et réelles, les actions, l'immobilier, et autres. Souvent, pour simplifier le calcul, on représentera le rendement du marché par l'indice Dow-Jones ou S&P/TSX qui en fait ne regroupe qu'une partie de tous les actifs risqués possibles.

D'autre part, ce modèle ne prend pas en considération le risque dû à l'incertitude sur l'inflation future. D'ailleurs, il est souvent plus facile d'étudier les rendements nominaux plutôt que les rendements réels et en faisant cela on présume que l'inflation fût constante dans le passé et continuera à être au même niveau dans le futur.

3:4 - LE NIVEAU DE RISQUE (BETA) ENDOGÈNE À LA FIRME

4.1 - Résumé de l'article: "The value of real and financial risk management"[3]

Nous avons vu précédemment que dans un marché concurrentiel, tous les actifs du marché se retrouveront sur la ligne des actifs du marché (security market line). En fait, une firme a la possibilité de choisir parmi les projets ou l'amalgame de projets mis à sa disposition qui se retrouvent sur ou sous la courbe d'efficacité. Une fois que la firme connait la pente de la ligne des actifs du marché, déterminée par le taux de rendement du marché et le rendement sans risque, la firme choisira celui qu'elle exécutera afin d'optimiser la valeur de la firme. Cet amalgame de projets optimal sera le point sur la courbe d'efficacité qui est tangent à la ligne des actifs du marché. Donc, à l'optimum, tous les amalgames de projets finalement choisis par chacune des firmes seront sur la ligne des actifs du marché. On peut toutefois bien comprendre qu'un changement dans la pente de la ligne des actifs du marché changera l'amalgame de projets devant être choisi pour chaque firme.

Ensuite, la firme peut à l'aide de dérivés financiers se déplacer sur la ligne des actifs du marché et ainsi choisir le niveau de risque (son bêta) qu'elle désire. Donc, la firme a la possibilité par l'entremise des dérivés financiers de choisir son niveau de risque. Son bêta est donc endogène.

C'est dans cette perspective que l'article démontre, tout d'abord, comment il peut avoir des conflits parmi les gestionnaires qui pourraient empêcher la firme d'atteindre ce point optimal et ainsi de maximiser la valeur de l'entreprise. Par exemple, prenons une firme ayant deux gestionnaires, le premier se préoccupant uniquement de diminuer le niveau de risque de la firme (en gardant les flux monétaires constant), et le deuxième se préoccupant

---

[3] BOYER, M., BOYER, M.M. AND GARCIA, R. (2005), "The value of real and financial risk management", Scientific Series, December 2005, 2005s-38. Available at CIRANO: https://www.cirano.qc.ca/files/publications/2005s-38.pdf
Voir aussi CH23, p. 523

uniquement d'augmenter les flux monétaires (en gardant le niveau de risque constant). Donc, en principe, les deux gestionnaires essaient d'augmenter la valeur de l'entreprise. Cependant, il se pourrait que leurs décisions soient incompatibles pour atteindre le point optimal sur la courbe d'efficacité, tel qu'illustré dans le graphique suivant où A_0 représente le point optimisant la valeur de la firme :

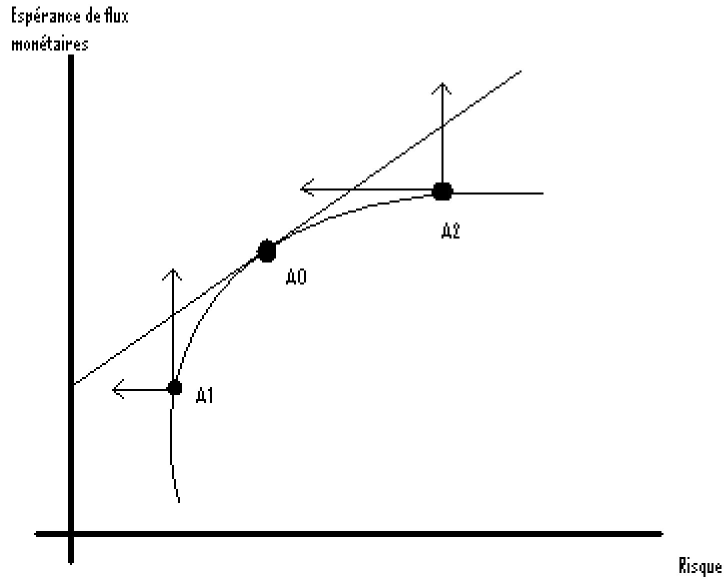


FIGURE 7. IMPOSSIBILITÉ DE REJOINDRE LE POINT OPTIMAL A0 DÛ AUX CONFLITS ENTRE GESTIONNAIRES.

Ainsi, si la firme se retrouve en A_1 et qu'elle s'aperçoit qu'elle optimiserait la valeur de la firme en se rendant au point A_0, alors, pour se faire, le gestionnaire se préoccupant de diminuer le niveau de risque devra aller à l'encontre de cet objectif et laisser l'entreprise augmenter le niveau de risque pour permettre à l'autre gestionnaire d'augmenter les flux monétaires et d'atteindre le point optimal A_0. De la même manière, si la firme est au point A_2, le gestionnaire se préoccupant d'augmenter le flux monétaire empêchera la firme d'atteindre le point optimal A_0 s'il maintient son objectif. Donc, on peut voir que lorsqu'une firme n'est pas à son point optimal sur la ligne des actifs du marché, cela se produisant particulièrement après le changement de la pente de la ligne, la firme doit s'assurer que tous ces gestionnaires se coordonnent pour établir la meilleure manière d'atteindre le point optimal sur la ligne des actifs du marché qui maximisera la valeur de la firme. Ce changement dans les objectifs des gestionnaires afin de se coordonner peut toutefois être très compliqué, l'article démontre alors que l'utilisation de dérivés financiers permet d'atteindre le point optimisant la valeur de la firme sans avoir à changer les objectifs des gestionnaires. Voyons maintenant comment les auteurs s'y prennent pour le démontrer.

Tout d'abord, la courbure de la frontière d'efficacité peut être bien différente d'une firme à l'autre. Une firme ayant une frontière d'efficacité ayant une courbure très prononcée, donc très concave, sera peu influencée par un changement de la ligne des actifs du marché. En effet, cette firme changera peu son amalgame de projets choisis pour atteindre le nouveau point optimal de sa frontière d'efficacité. Par contre, une firme ayant une frontière d'efficacité moins courbée, donc faiblement concave, sera beaucoup plus influencée par un changement de la ligne des actifs du marché. Elle aura à se rendre à un nouveau point optimisant sa valeur plus éloigné de celui où elle était précédemment. Ainsi, son nouvel amalgame de projets choisis sera très différent de celui avant le changement du marché. En sachant cela, les auteurs cherchent à mesurer la concavité de la courbe d'efficacité de chaque firme. Donc, à partir d'une série de données temporelles des points optimaux choisis par plusieurs firmes, c'est-à-dire leurs flux monétaires et leur niveau de risque choisis à travers le temps, les auteurs de l'article établissent premièrement une mesure de variation de position du point optimal choisi par la firme. Ensuite, ils régressent cette variation de position sur la variation du prix du risque du marché. Le prix du risque du marché influence la pente de la ligne des actifs du marché, et il est donné par :

(3.17)

$$\text{Variation du prix du risque du marché} = \frac{\text{rendement du marché} \; - \; \text{rendement d'un actif sans risque}}{\text{Écart-type du rendement du marché}}$$

On obtient alors un coefficient de régression positif, donc plus le prix du risque du marché varie, plus la position du point optimal de la firme variera aussi. Ce coefficient de régression est alors une mesure de flexibilité et par le fait même une mesure de concavité de la frontière d'efficacité de la firme. Alors, plus le lien positif est fort entre la variation de position de la firme et la variation du prix du risque du marché, plus la flexibilité de la firme est grande et moins la frontière d'efficacité est concave.

Ensuite, pour chaque firme, les auteurs prennent cette mesure de flexibilité et la régressent à son tour sur le nombre de dérivés financiers utilisés par la firme afin de se couvrir (*Hedging)* contre le risque. On trouve alors une relation positive entre ces deux éléments que l'on sépare d'ailleurs d'une industrie à l'autre. Ainsi, plus une firme, dont la frontière d'efficacité est faiblement concave, est flexible alors la firme aura tendance à utiliser davantage des dérivés financiers pour se couvrir contre le risque. L'interprétation est qu'une firme ayant une frontière d'efficacité faiblement concave, sur laquelle son point optimisant sa valeur se déplace beaucoup lorsque le prix du risque du marché varie, aura tendance à faire face à davantage de conflits de coordination entre les gestionnaires, tel que l'exemple présenté plus haut. Alors, l'utilisation de dérivés financiers lui permettra d'éviter ces conflits entre gestionnaires. Pour le démontrer, prenons le graphique suivant :

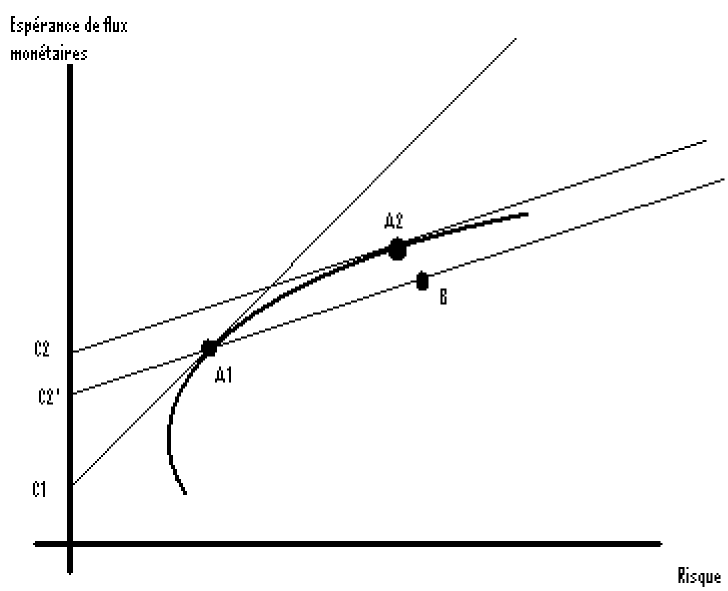


FIGURE 11. POUR REJOINDRE LE NOUVEAU POINT OPTIMAL A2, IL FAUT TOUT D'ABORD PASSER PAR LE POINT B AFIN D'ÉVITER LES CONFLITS ENTRE GESTIONNAIRES.

Initialement, la firme optimise sa valeur et se situe au point A_1. Notons qu'à ce moment sa valeur est de C_1 et ainsi la ligne des actifs du marché est en fait une ligne d'iso-valeur pour la firme. La firme pourrait utiliser des dérivés financiers pour se déplacer à tout endroit voulu sur cette ligne des actifs du marché sans affecter la valeur de la firme. Survient alors un changement du prix du risque du marché qui change la pente de la ligne des actifs du marché. Sans que la firme ne change quoi que ce soit et en demeurant au point A_1, la valeur de la firme augmente à $C_2{}'$. Cependant si la firme réussit à passer au point A_2, la firme augmenterait sa valeur à C_2. Cependant, passer directement de A_1 vers A_2 est impossible pour une firme ayant deux gestionnaires voulant maintenir leurs objectifs respectifs tel que précédemment mentionné et se diriger vers le nord-ouest du graphique. Alors, la firme utilisera des dérivés financiers lui permettant de se déplacer de A_1 vers B, tout en demeurant sur la même ligne d'iso-valeur C_2'. Une fois rendu au point B, la firme peut se rendre au point A_2 et maximiser sa valeur, sans que les gestionnaires aient à changer leurs objectifs.

Donc, de cette manière, les auteurs concluent que particulièrement pour les firmes ayant une courbe d'efficacité faiblement concave, l'utilisation de dérivés financiers permet d'éviter des conflits de coordination des gestionnaires et ainsi d'optimiser la valeur de la firme beaucoup plus facilement et rapidement lorsque survient un changement dans le prix du risque du marché. Donc, indirectement, les dérivés financiers augmentent la valeur de la firme. Et bref, la firme détermine elle-même son niveau de risque qu'elle juge préférable afin d'optimiser la valeur de la firme le plus facilement possible.

3:5 - STRUCTURE DU CAPITAL

5.1 - Le coût du capital

5.1.1 - Taux d'actualisation moyen pour l'ensemble des projets d'une firme

Le coût du capital d'une firme est le rendement espéré de l'ensemble des actifs composant la firme. C'est un élément essentiel à l'évaluation de leurs projets puisque c'est aussi le taux d'actualisation moyen que la firme doit utiliser. Ainsi, une firme œuvrant dans un domaine risqué devra utiliser un taux d'actualisation plus élevé, ce qui fera en sorte que la firme investira principalement dans des projets à court terme, donnant de forts revenus dans un avenir rapproché. Donc, la valeur actualisée nette (VAN), qui est souvent le critère principal d'évaluation des projets, est très sensible au taux d'actualisation utilisé. Comme nous le verrons plus tard, il est souvent préférable d'utiliser un taux d'actualisation spécifique au projet et aussi spécifique aux différents flux monétaires composant le projet, c'est ce qui est appelé la valeur actualisée nette optimisée (VAN-O). Mais, premièrement, voyons comment l'on peut déterminer facilement et rapidement le taux d'actualisation moyen qu'une firme devrait utiliser pour évaluer un de ses projets typiques.

Lorsqu'on nous demande d'estimer rapidement le coût du capital de la firme, plusieurs répondront tout d'abord que c'est le coût d'opportunité. Donc, le coût du capital serait déterminé par la meilleure alternative possible. Cependant, cette définition, bien qu'intuitivement juste, est difficilement mesurable de façon rigoureuse. Alors, le modèle CAPM offre la meilleure manière de mesurer le coût du capital moyen pour l'ensemble des projets d'une firme. Donc, à partir des rendements historiques de la firme et du marché, on pourra trouver le bêta de la firme. Comme vu précédemment, on multiplie ce bêta par la prime de risque du marché et on additionne ce résultat au rendement sans risque. On trouve alors le rendement moyen que la firme aura à l'avenir à condition que l'échantillon historique choisi soit bien représentatif des anticipations futures. Ce rendement moyen est le coût du capital moyen. Donc, le bêta de la firme est une mesure du coût du capital moyen. Si l'échantillon historique est trop petit ou non représentatif, on peut utiliser le bêta de l'industrie à laquelle la firme appartient pour déterminer son coût du capital.

Une autre manière équivalente de déterminer le coût du capital d'une firme est la méthode de la somme pondérée des rendements de chaque élément composant la firme. Cette méthode est connue en anglais sous le nom de *Weighted average cost of capital* (WACC). Avec cette méthode, le coût du capital est le rendement exigé par les créanciers de la dette additionné au rendement attendu sur l'équité, où chacun des rendements est pondéré selon la proportion de la valeur de la firme que la dette et l'équité représentent respectivement. Notons que la valeur de la firme est égale à la dette additionnée à l'équité.

Par exemple, prenons une firme quelconque qui est financée avec 2000$ de dette (D) et avec 8000$ par l'émission d'actions, c'est-à-dire l'équité (E). Si la firme doit donner un rendement (R_d) de 5% aux créanciers de la dette et de 15% aux détenteurs d'actions (R_e), alors le coût moyen du capital sera de 13% tel que calculé par la formule suivante :

(3.18)

$$WACC = \left(\frac{D}{D+E} \times R_d\right) + \left(\frac{E}{D+E} \times R_e\right) = \left(\frac{2000}{2000+8000} \times 5\%\right) + \left(\frac{8000}{2000+8000} \times 15\%\right) = 13\%$$

Cette firme utilisera donc, en moyenne, un taux d'actualisation de 13% pour évaluer les projets auxquels elle participe présentement. Notons tout d'abord qu'en théorie et dans un marché concurrentiel le résultat de 13% donné par le WACC devrait être égal au rendement de l'actif calculé avec le CAPM par l'entremise du bêta. Dans ce cas, on peut séparer le bêta de la firme en deux nouveaux bêtas, celui de la dette et celui de l'équité, où chacun sera bien entendu situé sur la ligne des actifs du marché et respectera l'équation suivante :

(3.19)

$$\beta_{firme} = \left(\frac{D}{D+E} \times \beta_d\right) + \left(\frac{E}{D+E} \times \beta_e\right)$$

Tout d'abord, si l'on sait que le rendement de la dette est de 5%, que et celui sur l'équité est de 15%, que le rendement sans risque (R_z) est de 2% et que le rendement du marché (R_m) est de 10%, alors, par le modèle CAPM, on peut calculer β_d et β_e :

(3.20)

$$\beta_d = \frac{(R_d - R_z)}{(R_m - R_z)} = \frac{5-2}{10-2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

(3.21)

$$\beta_e = \frac{(R_e - R_z)}{(R_m - R_z)} = \frac{15-2}{10-2} = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

Et ensuite, on peut calculer le β_{firme} :

(3.22)

$$\beta_{firme} = \left(\frac{2000}{2000+8000} \times 0{,}375\right) + \left(\frac{8000}{2000+8000} \times 1{,}625\right) = 1{,}375$$

Et après, on calcule le rendement de la firme avec le modèle CAPM :

(3.23) $$R_{firme} = \beta_{firme} \times (R_m - R_z) + R_z = 1{,}375 \times (10\% - 2\%) + 2\% = 13\%$$

On trouve donc un rendement de la firme de 13%, tel que précédemment calculé. Donc, le modèle WACC est compatible avec le modèle CAPM. Voici comment tous ces éléments sont situés sur la ligne des actifs du marché :

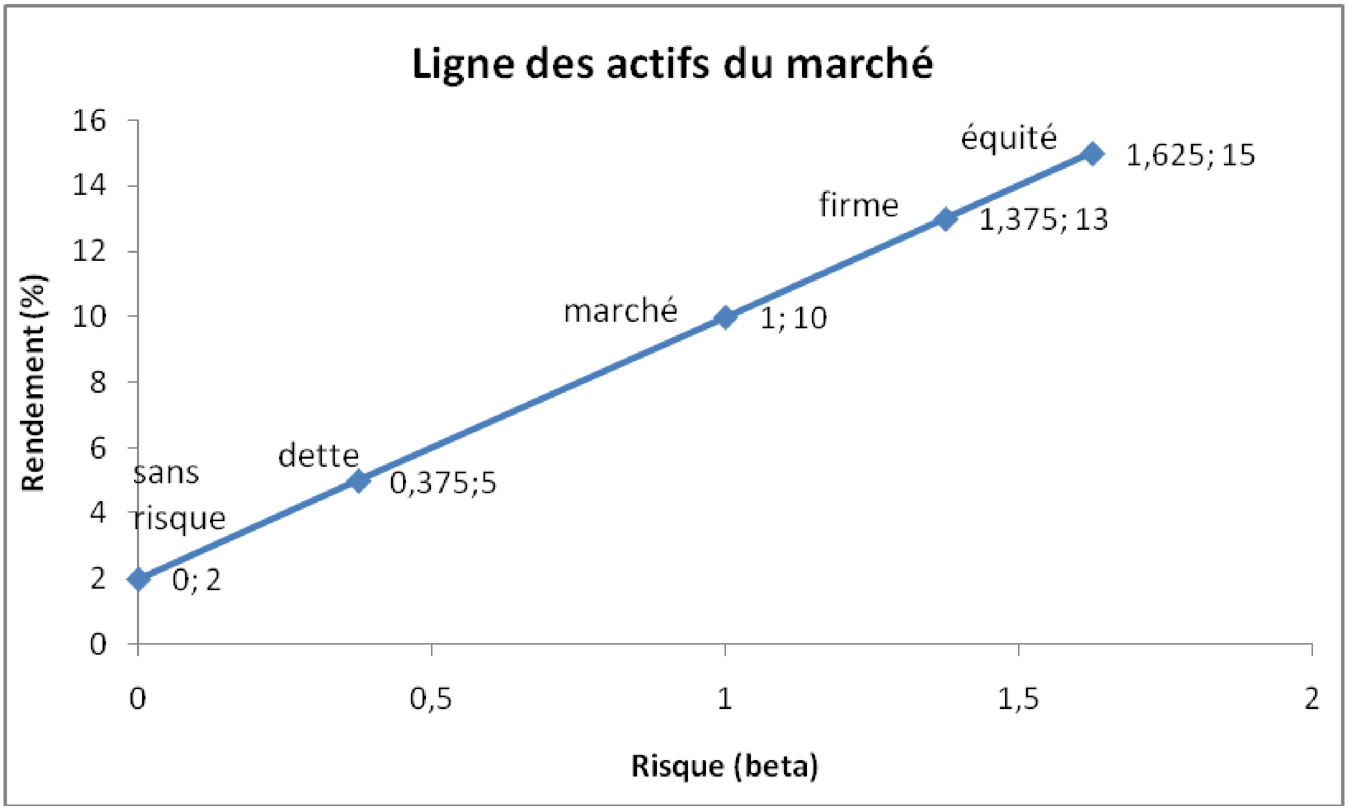


FIGURE 12. LIGNE DES ACTIFS DU MACHÉ.

Alors, le bêta de la firme est de 1,375 et son rendement est de 13%. Donc, son taux d'actualisation moyen utilisé pour les projets présentement en cours sera de 13%. Nous avons calculé ce taux d'actualisation dans l'éventualité où la firme est financée par 20% de dette et 80% en équité. Il est important de mentionner que dans un monde sans taxe, la détermination du taux d'actualisation n'est pas influencée par la méthode de financement de la firme. Donc, les trois synonymes que sont le taux d'actualisation moyen, le rendement de la firme et le coût du capital, demeureront inchangés à 13% et avec un bêta de 1,375 peu importe la méthode de financement de la firme. Voyons comment cela est possible.

Prenons la même firme qui décide d'emprunter 2000$ supplémentaires à une banque pour l'achat d'une machine. Sa dette est maintenant de 4000$ et son équité est inchangée à 8000$. Les créanciers de la dette exigeront maintenant un rendement plus élevé puisque la dette de la firme est plus grande et qu'ainsi la probabilité qu'elle ne puisse pas la rembourser augmente. Alors, par exemple le rendement demandé sur la dette pourrait augmenter de 5% à 7%. Ce chiffre peut sembler être déterminé de façon aléatoire, mais c'est en fait ce qui se produira afin que tous les actifs demeurent sur la ligne des actifs du marché comme nous le verrons. De leur côté, les détenteurs d'actions exigeront eux aussi un rendement plus élevé puisque la firme est maintenant plus endettée et que la probabilité de faire faillite est plus grande. Supposons alors que le rendement sur l'équité passe de 15% à 16%. Comme la dette et l'équité demeurent sur la même ligne des actifs du marché, nous pouvons déterminer leurs nouveaux bêtas respectifs avec le modèle CAPM.

(3.24)

$$\beta'_d = \frac{(R_d - R_z)}{(R_m - R_z)} = \frac{7-2}{10-2} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

(3.25)

$$\beta'_e = \frac{(R_e - R_z)}{(R_m - R_z)} = \frac{16-2}{10-2} = \frac{14}{8} = 1{,}75$$

Avec ces bêtas, on peut calculer le bêta de la firme :

(3.26)

$$\beta_{firme} = \left(\frac{D}{D+E} \times \beta'_d\right) + \left(\frac{E}{D+E} \times \beta'_e\right) = \left(\frac{4000}{4000+8000} \times 0{,}625\right) + \left(\frac{8000}{4000+8000} \times 1{,}75\right) = 1{,}375$$

Alors, le bêta de la firme est de 1,375, ce qui est exactement le même qu'avant que la firme eut fait un emprunt supplémentaire. Et donc, avec le modèle CAPM, si le bêta de la firme est inchangé, alors le rendement attendu de la firme sera aussi inchangé à 13%, ce qui prouve que l'endettement supplémentaire n'aura pas affecté le taux d'actualisation moyen utilisé par la firme. Cela est intuitif puisque le taux d'actualisation moyen dépend du risque moyen des projets dans lesquels la firme est impliquée et non pas de la manière dont la firme est financée. Voyons comment cela se reflète sur le graphique de la ligne des actifs du marché :

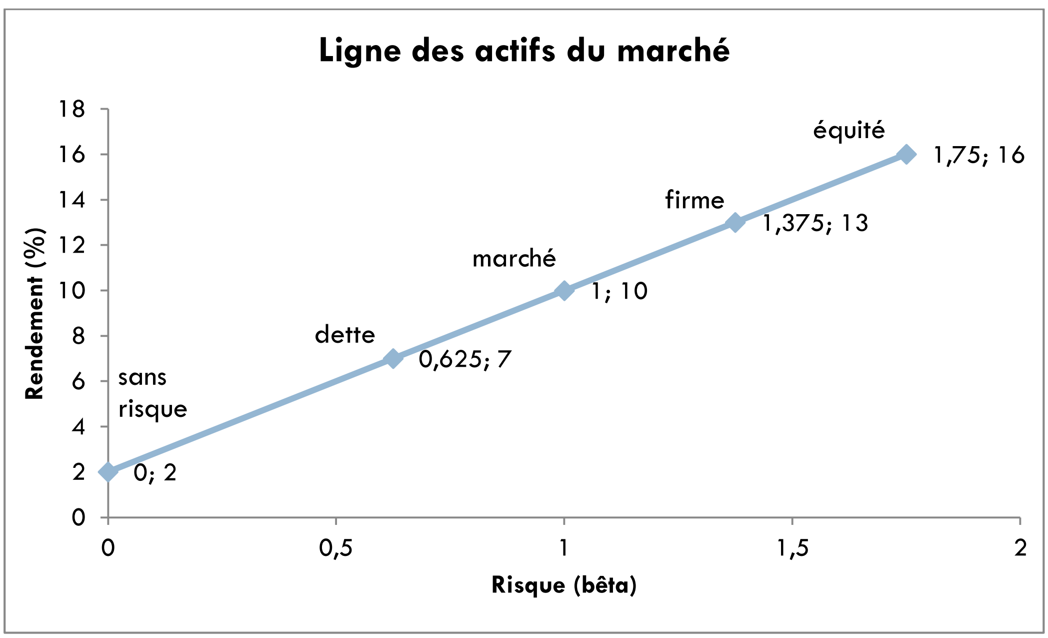


FIGURE 13. LIGNE DES ACTIFS DU MACHÉ APRÈS ENDETTEMENT SUPPLÉMENTAIRE.

Donc, le risque et le rendement de la dette et de l'équité augmentent chacun, mais puisque la proportion de la dette est plus grande, le rendement et le risque de la firme demeurent inchangés. Ainsi, même si la firme décidait d'émettre de nouvelles actions, afin de rembourser complètement sa dette, et donc d'augmenter son équité, alors les détenteurs des actions exigeraient un rendement de 13% sur l'équité, c'est-à-dire le même rendement qu'auparavant pour la firme dans son ensemble. Alors, le coût du capital, ou le taux d'actualisation moyen, ne dépend aucunement de la proportion de la valeur de la firme provenant de l'endettement ou de l'émission d'action. Ce principe fut démontré par Franco Modigliani et Merton Miller en 1958 dans leur article "*The Cost of Capital, corporation finance and the* *theory of investment* disant principalement que, dans un marché concurrentiel et sans taxe, l'utilisation de différentes méthodes de financement de la firme ne changera rien à la valeur de celle-ci.

Cependant, en réalité le profit des firmes est taxé. Cela affecte le coût du capital de la firme. En effet, lorsqu'une firme paye les intérêts sur une dette, elle diminue son profit et donc paye moins de taxe. On dit alors que les intérêts sur la dette sont une dépense déductible d'impôt. Alors, pour un dollar supplémentaire d'intérêt sur la dette que la firme doit payer, son profit après taxe sera en fait diminué que de $(1 - t)$, où (t) est le pourcentage de taxe payé sur le profit. Alors que si elle se finance en émettant de nouvelles actions, donc en augmentant son équité, le rendement que les actionnaires exigent provient des dividendes qui sont payés entièrement après les taxes sur le profit de la firme. Donc, le financement par la dette augmentera le coût du capital dans une proportion moindre que par l'émission d'actions. En incluant le pourcentage de taxe que le gouvernement impose sur les profits des firmes, la formule du WACC devient donc :

(3.27)

$$WACC = \left(\frac{D}{D+E} \times R_d\right)(1-t) + \left(\frac{E}{D+E} \times R_e\right)$$

Bien sûr, cette formule affecte seulement les firmes ayant des profits suffisants pour devoir payer des taxes. Mais comme une firme sans profits est vouée à disparaître, on peut conclure que cette formule s'applique à toutes les firmes, mêmes si à l'occasion et temporairement ses profits sont nuls.

Alors, le principe de Modigliani et Miller disant que le coût du capital de la firme n'est pas affecté par la méthode de financement ne tient plus lorsque nous incluons les taxes. En fait, en tenant compte des taxes, une firme pourrait même diminuer son coût du capital en empruntant afin de racheter ses propres actions émises. Ceci est vrai, mais seulement jusqu'à un certain ratio de dette versus équité. Si la firme devient de plus en plus financée par la dette, alors le rendement sur la dette, ainsi que celui sur l'équité augmenteront, car la firme devient de plus en plus propice à faire faillite. Cependant, plus la firme s'endette, plus le taux d'intérêt augmentera rapidement et plus la firme devra faire face à des coûts administratifs d'une détresse financière. La firme cherche donc le niveau d'endettement optimal qui minimisera son coût du capital. Alors, elle continuera de se financer par la dette jusqu'à ce que le bénéfice marginal de la diminution du coût du capital due aux taxes soit égal au coût marginal de l'augmentation du coût du capital due aux coûts de détresse financière. Ceci est possible puisque l'augmentation des rendements sur la dette et sur l'équité, à mesure que la dette augmente, ne se fait pas de façon linéaire mais plutôt de manière exponentielle. Bref, si l'on part d'une firme étant financée entièrement par l'équité, elle pourra diminuer son coût du capital en s'endettant afin de racheter ses propres actions puisque les taxes font que l'effet de la dette sur le coût du capital est moindre que celui de l'équité. Cependant, plus la firme s'endette, plus l'augmentation marginale des rendements exigés sur la dette et l'équité croîtra rapidement, puisque la probabilité de faillite de la firme s'accroit aussi de plus en plus rapidement. Donc, la firme doit choisir le niveau de dette optimal afin de diminuer son coût du capital et de maximiser sa valeur. Voyons quelques graphiques afin de bien visualiser ces effets.

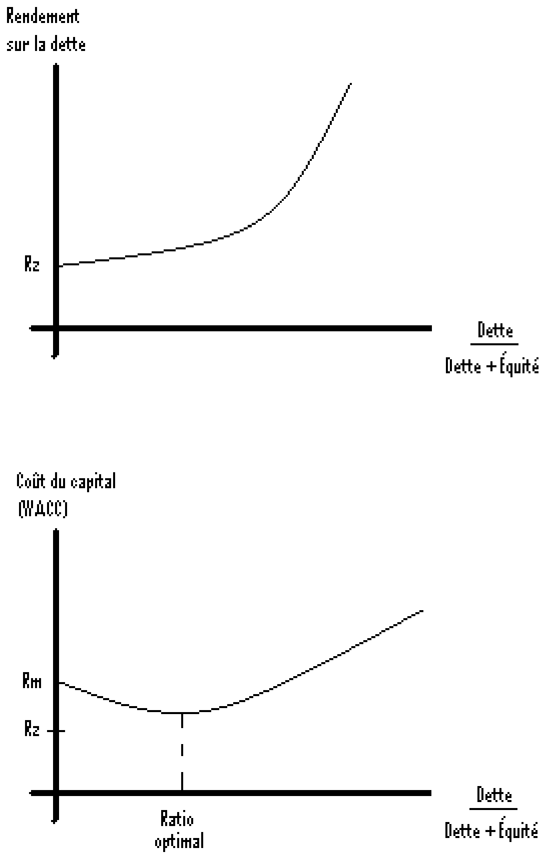


FIGURE 14. DIFFÉRENTS GRAPHIQUES AFIN DE VISUALISER LE RATIO OPTIMAL DE DETTE VERSUS ÉQUITÉ EN PRÉSENCE DE TAXE.

C'est pour ces raisons qu'une firme aura tendance à s'endetter afin de racheter ses actions lorsque l'économie dans son ensemble est vigoureuse et moins risquée ou s'il s'installe une plus grande tolérance au risque. De cette façon, un gestionnaire pourra aussi augmenter la valeur des actions de la firme.

Dans un monde imparfait avec de l'information asymétrique et des *Agency costs*, d'autres facteurs peuvent influencer la structure de capital d'une firme. Par exemple, la loi du moindre effort fera en sorte que souvent les gestionnaires décideront de se financer par la dette plutôt que par l'émission d'actions puisque cette forme de financement est beaucoup plus facile et moins coûteuse. D'autre part, le niveau de dette pourra influencer les décisions d'un gestionnaire quant aux choix des projets à effectuer. Par exemple, si la firme est déjà très endettée, un gestionnaire aura tendance à choisir un projet plus risqué, même s'il peut avoir une valeur présente négative, parce que si le projet s'avère ne pas être rentable alors les créanciers de la dette absorberont presque tous les effets malheureux de ce projet non rentable alors que si le projet s'avère rentable, tous les effets positifs seront majoritairement absorbés par les détenteurs d'actions. En effet, puisque la firme est déjà très endettée, le prix de l'action est sûrement très bas, puisqu'il y a déjà une forte possibilité de faillite. Alors, si le projet s'avère déficitaire, cela pourrait causer la faillite de la firme. Ainsi, les créanciers de la dette perdront leur prêt tandis que les détenteurs d'actions ne perdront que très peu puisque le prix de l'action était déjà très bas. D'un autre côté, si le projet s'avère rentable, les créanciers de la dette seront généralement indifférents mais les détenteurs d'actions seront contents puisque le prix de l'action augmentera face à cette sortie possible de détresse financière. Bref, un gestionnaire au service des actionnaires d'une firme fortement endettée aura tendance à jouer le *tout pour le tout* pour se sortir de ces difficultés.

Méthodes d'Actualisation en Présence de Risque

CHAPTER 4

Les références aux ouvrages et articles cités dans ce chapitre sont disponibles à la fin du tome 2.

Dans ce chapitre on comparera deux méthodes d'actualisation : le taux d'actualisation ajusté au risque et l'équivalent certain, toutes deux basées sur le modèle CAPM. Nous allons aussi voir qu'il est préférable d'actualiser séparément chacun des flux monétaires composant un projet selon leur niveau de risque respectif, c'est ce que nous appellerons la valeur actualisée nette optimisée. De plus, dans certains cas, ces méthodes d'actualisation donnent des résultats différents et parfois même invraisemblables dans un monde pratique en présence d'imperfections et de distorsions. Nous allons donc émettre quelques mises en garde. Cependant, afin de déterminer la valeur présente d'un projet, ces méthodes d'actualisation demeurent des outils mathématiques rigoureux qui évitent la subjectivité des gestionnaires.

4:1 - DIFFÉRENTES MÉTHODES D'ACTUALISATION DE LA VALEUR D'UN PROJET

Jusqu'à présent, remarquez que lorsque l'on mentionnait le risque d'une firme, on parlait du risque moyen que représente l'ensemble des projets composant la firme. Ce taux, déterminé par les modèles CAPM et WACC, n'est en fait qu'une moyenne du risque de l'entreprise pondérée selon l'importance de chacun des projets composant la firme. Cependant, pour faire une évaluation adéquate d'un projet, celui-ci doit être actualisé à un taux spécifique selon le risque qu'il comporte. Plus le projet est risqué, plus le taux d'actualisation sera élevé et ainsi, les flux monétaires dans un avenir lointain n'auront que très peu d'importance. Puisqu'il est facile de calculer le niveau de risque agrégé de la firme avec les modèles CAPM et WACC, alors nous trouvons le taux d'actualisation moyen utilisé pour les projets que la firme effectue présentement. Donc, si la firme désire évaluer un projet potentiel, le taux d'actualisation moyen est seulement recommandé si ce projet comporte le même niveau de risque que la moyenne des projets que la firme réalise présentement. Nous voyons donc que déterminer le taux d'actualisation à partir des modèles CAPM et WACC n'est qu'un moyen rapide d'approximer le taux à utiliser. Cependant, il existe quelques méthodes permettant de déterminer le taux d'actualisation du projet, taux déterminé selon les caractéristiques propres du projet e non celles de la firme dans son ensemble. Premièrement, comme on l'a vue, à partir du modèle CAPM et si le projet comporte le même risque que ceux composant la firme, on peut utiliser le **taux d'actualisation ajusté au risque**, ou en anglais le *risk ajusted discount rate* (RADR). Deuxièmement, on peut pousser ce concept un peu plus loin et utiliser un taux d'actualisation ajusté selon le risque de chacun des flux monétaires du projet. Ce principe est en fait l'essentiel de ce que l'on appelle la **valeur actualisée nette optimisée** (VAN-O). De cette façon, en combinant les méthodes RADR et VAN-O, nous obtiendront un taux d'actualisation ajusté au risque *de chacun des flux monétaires*. Enfin, une autre méthode est le principe de **l'équivalent certain** (EC) dans lequel on remplace chacun des flux monétaires risqués du projet par un montant sans risque qui lui serait équivalent en termes de préférence, ensuite on actualise ce montant au taux de rendement sans risque. Voyons ces méthodes plus en détails.

4:2 - TAUX D'ACTUALISATION AJUSTÉ AU RISQUE (RAROC)

Cette méthode consiste simplement à actualiser les flux monétaires au taux de rendement de la firme tel que déterminé à partir du modèle CAPM. Bien entendu, cette méthode simpliste demande des hypothèses fortes pour demeurer adéquate. Il faut tout d'abord que le risque du projet que l'on désire évaluer soit le même que le risque moyen de la firme tel que déterminé par le modèle CAPM basé sur un échantillon des rendements passés. Ensuite, il faut que les risques des flux monétaires composant le projet soient aussi tous égaux au risque déterminé par le modèle CAPM. Autrement dit, il faut que les coûts comportent le même niveau de risque que les revenus et de plus que tous aient le même risque que la moyenne des projets présents et passés composant la firme. Comme vous pouvez imaginer, ces hypothèses sont rarement complètement respectées, cependant cette méthode demeure un moyen rapide d'estimer la valeur présente d'un projet, particulièrement à un stade initial où l'on ne connaît pas encore le risque approprié de chacun des flux monétaires. Voyons mathématiquement comment cette méthode fonctionne lorsqu'on utilise le modèle CAPM pour la déterminer.

Tout d'abord définissons le rendement du projet par :

(4.1)

$$R_{j,t} = \frac{V_{j,t}}{V_{j,t-1}} - 1$$

Où V représente la valeur du projet définie par l'ensemble des flux monétaires du projet à travers le temps.

Souvenons-nous du modèle CAPM :

(4.2)

$$E\left[R_{j,t}\right] = R_z + \beta_j(R_m - R_z) = R_z + \frac{cov\left[R_{j,t}, R_{m,t}\right]}{\sigma_m^2}(R_m - R_z)$$

Alors, si l'on prend l'espérance de la valeur future du projet, on peut égaliser ces deux équations du rendement :

(4.3)

$$E\left[R_{j,t}\right] = \frac{E[V_{j,t}]}{V_{j,t-1}} - 1 = R_z + \beta_j(R_m - R_z) = R_z + \frac{cov\left[R_{j,t}, R_{m,t}\right]}{\sigma_m^2}(R_m - R_z)$$

Que l'on peut ensuite réarranger pour donner la valeur présente du projet à partir de l'espérance de la valeur future que l'on actualise au taux de risque déterminé par le modèle CAPM :

(4.4)

$$V_{j,t-1} = \frac{E[V_{j,t}]}{1 + R_z + \beta_j(R_m - R_z)} = \frac{E[V_{j,t}]}{1 + R_z + \frac{cov\left[R_{j,t}, R_{m,t}\right]}{\sigma_m^2}(R_m - R_z)}$$

Et de la même façon, de manière générale si l'on désire l'évaluer à n périodes plus tôt :

(4.5)

$$V_{j,t-n} = E\left[V_{j,t}\right]\left[\frac{1}{\left(1 + E\left[R_{j,t}\right]\right)\left(1 + E\left[R_{j,t-1}\right]\right)\left(1 + E\left[R_{j,t-2}\right]\right) \dots \left(1 + E\left[R_{j,t-n}\right]\right)}\right]$$

Et si l'on présume que l'espérance du rendement du projet sera la même pour toute les périodes futures et donc, que le taux de rendement sans risque ainsi que la covariance entre le rendement de l'actif et celui du marché demeurent constants, alors:

(4.6)

$$V_{j,t-n} = \frac{E[V_{j,t}]}{[1 + R_z + \beta_j(R_m - R_z)]^n} = \frac{E[V_{j,t}]}{\left[1 + R_z + \frac{cov[R_{j,t}, R_{m,t}]}{\sigma_m^2}(R_m - R_z)\right]^n}$$

De façon littérale, on pourrait réécrire cette équation de la méthode RADR par :

(4.7)

$$\text{Valeur au temps } t-n \text{ du projet} = \frac{\text{l'espérance de la somme des flux monétaires au temps } t}{(1 + \text{taux sans risque} + \text{prime de risque de la firme})^n}$$

Donc, cette méthode actualise tous les flux monétaires composant le projet au taux de risque de la firme déterminé par le modèle CAPM.

Si l'hypothèse disant que le projet évalué doit avoir le même risque que l'ensemble des projets de la firme est trop forte et nous empêche d'évaluer de façon adéquate le projet, il existe une alternative. Afin de déterminer le risque plus représentatif du projet, on pourrait plutôt utiliser le modèle CAPM à partir d'un échantillon différent qui pourrait être par exemple, les rendements des projets semblables, même ceux d'autres firmes, si on les connait. Donc, le modèle RADR peut être une excellente méthode d'actualisation des flux monétaires du projet si le taux d'actualisation, tel que déterminé par le modèle CAPM, provient d'un échantillon de projets représentatifs à celui que l'on désire évaluer et si tous les flux monétaires comportent le même risque.

Une autre mise en garde très importante afin de bien utiliser la méthode RADR concerne la covariance entre le rendement du projet et celui du marché. En théorie, cette covariance devrait être déterminée au même moment que les flux monétaires du projet que l'on veut actualiser. Alors, en théorie on devrait déterminer une covariance entre le rendement futur du projet et le rendement futur du marché. On peut alors estimer cette covariance en se basant sur nos prédictions de ces rendements futurs. Cependant, cela entraîne un problème de circularité dans la formule du RADR. En effet, si l'on cherche la covariance entre le rendement du projet et celui du marché, on doit connaître la valeur du projet maintenant afin d'estimer son rendement futur. Cependant, la valeur du projet maintenant est exactement ce que l'on cherche à déterminer par cette méthode.

Pour remédier à ce problème de circularité et à celui d'incertitude de nos prédictions futures, on peut utiliser plutôt la covariance entre les rendements passés du projet et les rendements passés du marché. Il peut être facile de déterminer cette covariance si le projet (ou le flux monétaire) est simplement le prix d'un bien, ainsi on connaîtra bien l'historique du prix de ce bien. Cependant, déterminer cette covariance des rendements passés peut être beaucoup plus difficile, voire impossible, si l'on a un projet tout nouveau et jamais réalisé. À ce moment, si possible, on peut utiliser des projets lui ressemblant comme valeur proxy.

De plus, si le rendement du marché varie peu et/ou que le rendement du projet varie beaucoup, cela résulterait en une prime de risque élevée pour ce projet. Ceci est tout-à-fait normal. Cependant, cette méthode de calcul du RADR, basée sur le modèle CAPM, pourrait donner une prime de risque très élevée résultant en une valeur présente du projet très minime, qui en fait pourrait même être beaucoup trop minime pour que celle-ci semble vraisemblable. Il faut donc être bien prudent dans ces cas.

Aussi, si la covariance entre le rendement du projet et le rendement du marché est négative, alors la prime de risque du projet sera négative, ce qui pourrait alors entraîner que la valeur actualisée d'un revenu soit plus grande que la valeur espérée future, ce qui semble absurde. En fait ces résultats aux allures douteuses, deviennent vraisemblables dans un contexte général du modèle CAPM, lorsque l'on a la possibilité de transiger, sans friction, tous les flux monétaires composant le projet tel qu'un actif individuel à la bourse. Ce principe n'est évidement pas observé de façon parfaite en réalité, mais il demeure tout de même préférable pour les firmes de détenir un projet ayant des revenus négativement corrélés au marché puisque ceux-ci permettront à la firme de diminuer son exposition aux risques systématique et systémique.

Comme vous voyez, la méthode de calcul RADR à partir du modèle CAPM est truffée d'obstacles et d'inconvénients et donne parfois des résultats qui semblent invraisemblables en pratique. C'est pour ces raisons que plusieurs gestionnaires estimeront directement la prime de risque du projet plutôt que de tenter de la calculer par le modèle CAPM qui à son tour se base sur des prévisions de rendements futurs. Donc, pour actualiser les flux monétaires d'un projet, l'estimation directe de la prime de risque sera une méthode très rapide et souvent jugée plus adéquate que celle des calculs basés sur le modèle CAPM. Cependant, laisser aux gestionnaires le loisir d'estimer la prime de risque pourra entraîner des différences d'opinions, même minimes, qui pourraient avoir une grande influence sur la valeur présente du projet. Donc, certains gestionnaires seront tentés d'estimer une prime de risque qui sera dans leurs intérêts. C'est pour cette raison que malgré toutes les embûches possibles, la méthode RADR calculée à partir du modèle CAPM peut demeurer une façon rigoureuse de déterminer la valeur présente d'un projet.

4:3 - ÉQUIVALENT CERTAIN (EC)

Une autre méthode d'évaluer et d'actualiser la valeur d'un projet est celle de l'équivalent certain. Le principe est de déterminer le montant sans risque qu'un agent serait prêt à accepter plutôt que de tenter sa chance entre diverses possibilités de gain et ensuite actualiser cet équivalent certain au taux sans risque. Ce principe suppose que les agents ont une fonction d'utilité concave et qu'ils sont averses au risque. Donc, l'équivalent certain est le montant sans risque qu'un agent serait indifférent à accepter à la place d'une espérance de gain comportant un risque.

Par exemple, avec l'aide de la Figure 8, prenons un agent ayant une fonction d'utilité concave telle que dessinée. Il vient de gagner à la loterie et on lui donne l'option de recevoir sans risque 13 millions$ ou encore tenter sa chance une seule fois dans un jeu lui donnant soit 10 millions$ ou 30 millions$ avec chacune une probabilité de 50%, donc une espérance de gain de 20 millions$. L'agent ayant cette fonction d'utilité sera indifférent entre les deux options puisque les 13 millions$ lui procurent la même utilité que l'utilité espérée qu'il aurait en jouant le jeu. On peut voir, sur l'axe vertical que l'utilité de 13 millions$ est exactement à mi-chemin entre l'utilité de 10 millions$ et de 30 millions$ puisque chacun a une probabilité de 50%. Sur l'axe horizontal, la différence entre le gain espéré et l'équivalent certain représente la prime de risque associée à ce jeu.

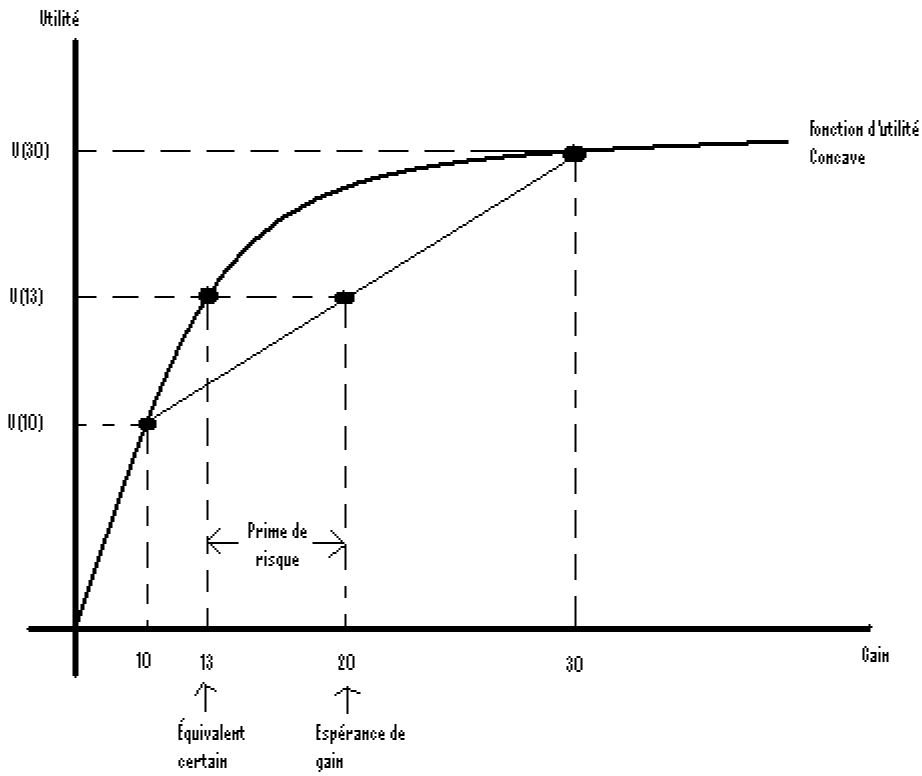


FIGURE 8. ÉQUIVALENT CERTAIN SUR GRAPHIQUE DE LA FONCTION D'UTILITÉ.

Si nous changeons les probabilités de gain à 75% de chance d'avoir 30 millions$ et 25% de chance d'obtenir 10 millions$, alors l'équivalent certain augmentera jusqu'à 17 millions$ dans ce cas, tel que l'on peut voir sur la Figure 9.

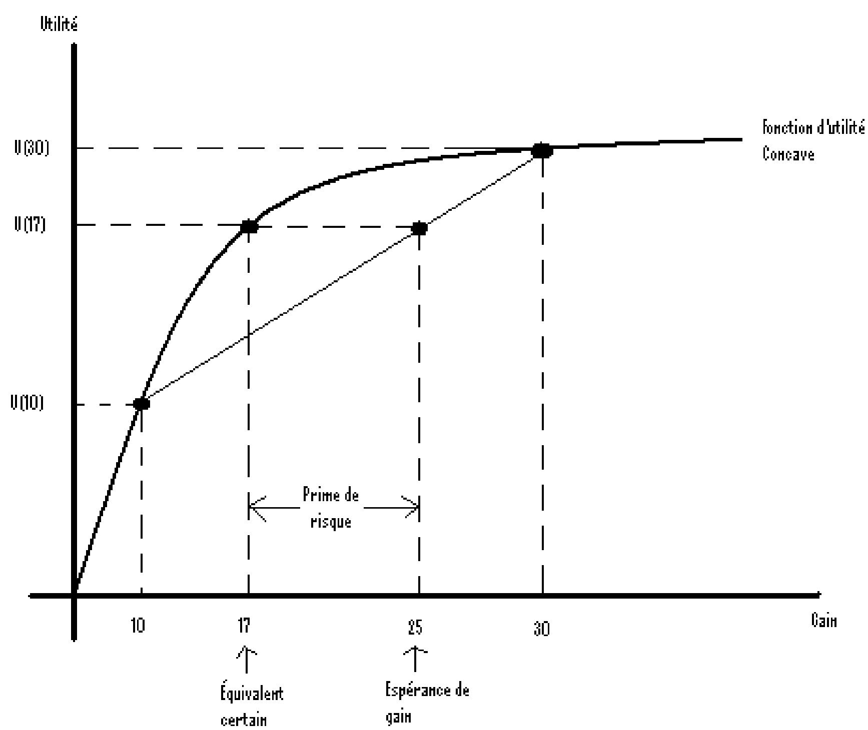


FIGURE 9. ÉQUIVALENT CERTAIN SUR GRAPHIQUE DE LA FONCTION D'UTILITÉ AVEC NOUVELLE PROBABILITÉ DE GAIN.

Puisque l'équivalent certain est un montant sans risque dont l'utilité est équivalente à celle d'une espérance de gain risqué, alors on peut actualiser l'équivalent certain au taux sans risque pour déterminer la valeur actuelle d'une espérance de gain futur. Bien entendu, cette méthode s'applique aussi aux pertes. Cependant, encore une fois, pour être appliquée à l'évaluation de projet, cette méthode demande premièrement une analyse rigoureuse des possibilités et des probabilités des flux monétaires afin de trouver leur espérance et deuxièmement une façon adéquate de trouver l'équivalent certain selon les préférences des agents impliqués. Pour remédier à ces problèmes, le meilleur moyen d'y parvenir est lorsqu'il existe un marché pour les contrats à terme (*forward contract*). En effet, on peut, par exemple, payer aujourd'hui une quantité de pétrole que l'on se fera livrer à une date précise dans le futur. Alors, le prix de cette transaction sera l'équivalent certain actualisé du prix espéré à cette date de livraison en prenant en considération les dividendes de convenance (*convenience dividends*). Ceux-ci représentent tous les coûts et les avantages de ne pas avoir en sa possession ce pétrole dès maintenant, tel que l'entreposage ou l'opportunité de le raffiner. Aussi, il existe parfois un marché pour les contrats « futures » (*future contracts*) où par exemple, on s'entend maintenant pour une date de livraison future ainsi que le montant payé lors de la livraison. Nous obtenons ainsi l'équivalent certain que l'on peut actualiser au taux sans risque.

S'il n'existe pas de marché pour les contrats à l'avance ou futurs, ou si l'on ne connaît pas bien la courbe d'utilité de l'agent (ce qui est fort probable), on peut utiliser le modèle CAPM pour déterminer l'équivalent certain.

Continuons avec l'exemple du pétrole, en définissant tout d'abord le rendement du prix (P) du pétrole par :

(4.8)

$$R_{p,t} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Souvenons-nous que par le modèle CAPM, on peut trouver l'espérance de rendement:

(4.9) $$E\left[R_{p,t}\right] = E[R_z]_t + \beta_p E[R_m - R_z]_t = E[R_z]_t + \frac{cov\left[R_{p,t}, R_{m,t}\right]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t$$

Alors, si l'on prend l'espérance du rendement du prix du pétrole, on peut égaliser ces deux équations du rendement :

(4.10)

$$E\left[R_{p,t}\right] = \frac{E[P_t]}{P_{t-1}} - 1 = E[R_z]_t + \frac{cov\left[R_{p,t}, R_{m,t}\right]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t$$

Puisque le prix du pétrole aujourd'hui ($t-1$) est connu, on peut utiliser les propriétés de la covariance pour obtenir :

(4.11)

$$cov\left[R_{p,t}, R_{m,t}\right] = cov\left[\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, R_{m,t}\right] = cov\left[\frac{P_t}{P_{t-1}}, R_{m,t}\right] = \frac{cov\left[P_t, R_{m,t}\right]}{P_{t-1}}$$

Et ensuite l'insérer dans l'équation précédente :

(4.12)

$$\frac{E[P_t]}{P_{t-1}} = 1 + E[R_z]_t + \frac{\frac{cov\left[P_t, R_{m,t}\right]}{P_{t-1}}}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t$$

Que l'on peut réarranger pour donner :

(4.13)

$$E[P_t] = (1 + E[R_z]_t)\, P_{t-1} + \frac{cov\left[P_t, R_{m,t}\right]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t$$

Et encore réarranger pour obtenir l'équivalent certain de l'espérance du prix du pétrole (tout le numérateur) actualisé au taux sans risque :

(4.14)

$$P_{t-1} = \frac{E[P_t] - \dfrac{cov\left[P_t, R_{m,t}\right]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t}{1 + E[R_z]_t}$$

De façon littérale et simple, on pourrait réécrire l'équation de l'équivalent certain par :

(4.15)

$$\text{Valeur d'un actif au temps } t-1 = \frac{\text{Espérance de la valeur de l'actif au temps } t \;-\; \text{prime de risque de l'actif}}{1 \;+\; \text{taux sans risque}}$$

Pour déterminer l'équivalent certain de l'espérance du prix du pétrole à plusieurs périodes dans le futur, alors il faudra soustraire une prime de risque basée sur la covariance du prix et du rendement du marché à chacune des périodes, ainsi pour 2 périodes, on aura :

(4.16)

$$P_{t-2} = \frac{E[P_t] - \dfrac{cov\left[P_t, R_{m,t}\right]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_t - \dfrac{cov\left[P_t, R_{m,t-1}\right]}{\sigma_m^2} E[R_m - R_z]_{t-1}}{(1 + E[R_z]_t)(1 + E[R_z]_{t-1})}$$

Alors, dans un cas général, où l'on suppose que la prime du rendement du marché reste constante :

(4.17) $$E[R_m - R_z]_{t-1} = E[R_m - R_z]_t \quad \forall t$$

Et que le taux sans risque demeure aussi constant :

(4.18) $$E[R_z]_{t-1} = E[R_z]_t \quad \forall t$$

Nous pourrions trouver l'équivalent certain actualisé de l'espérance du prix P_t à n périodes dans le futur de la façon suivante:

(4.19)

$$P_{t-n} = \frac{E[P_t] - \left(cov\left[P_t, R_{m,t}\right] + cov\left[P_t, R_{m,t-1}\right] + \cdots + cov\left[P_t, R_{m,t-n}\right]\right) \dfrac{E[R_m - R_z]}{\sigma_m^2}}{(1 + E[R_z])^n}$$

Et si l'on présume que la covariance entre le prix et le rendement du marché est constante pendant toutes les périodes que l'on actualise, par exemple, si l'on prenait la covariance historique et que l'on suppose qu'elle restera ainsi dans le futur, alors on peut actualiser notre espérance de prix de la manière suivante :

(4.20)

$$P_{t-n} = \frac{E[P_t] - n \times \ cov[P_t, R_m] \frac{E[R_m - R_z]}{\sigma_m^2}}{(1 + E[R_z])^n}$$

Comme pour la méthode RADR, notons qu'il peut être difficile de déterminer la covariance entre le prix futur et le rendement du marché futur. Alors, si possible, on pourra l'estimer à partir d'un échantillon historique représentatif ou de nos anticipations futures du prix et du rendement du marché.

Il est extrêmement important de noter que pour calculer l'équivalent certain d'un flux monétaire nous avons besoin de la covariance entre la **valeur nominale** de ce flux et le rendement du marché, tandis que pour la méthode RADR, nous prenions la covariance entre le **rendement du flux monétaire** et le rendement du marché. De cette façon, nous évitons le problème de circularité qui faisait défaut dans la méthode RADR.

De plus, pour donner des résultats acceptables, il faut que les prix dans l'échantillon déterminant la covariance soit de même magnitude que le prix espéré que l'on veut actualiser. Il faut donc utiliser les mêmes unités de mesures. Par exemple, on ne peut pas déterminer la covariance à partir du prix d'un baril de pétrole et ensuite vouloir actualiser le prix d'un cargo rempli de pétrole à partir de cette covariance. Il faut équivaloir les unités de mesures avant de faire ces calculs. On ne rencontrait pas ce problème dans la méthode RADR puisque l'on utilisait alors le rendement.

Souvent, on utilisera la méthode de l'équivalent certain de la façon suivante, premièrement on régressera le prix nominal d'un actif sur les rendements passés du marché :

(4.21) $$E[P_t] = \alpha + \gamma_0 R_{m,t} + \gamma_1 R_{m,t-1} + \gamma_2 R_{m,t-2} + \cdots + \gamma_n R_{m,t-n}$$

Où

(4.22)

$$\gamma_n = \frac{cov\left[P_t, R_{m,t-n}\right]}{\sigma_m^2}$$

Alors, si l'on suppose une prime de risque du marché constante, l'équivalent certain serait :

(4.23)

$$P_{t-n} = \frac{E[P_t] - (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n) E[R_m - R_z]}{(1 + E[R_z])^n}$$

Notons que $E[P_t]$ est déterminé par la régression (4.21). Cependant, si l'on cherche à actualiser une espérance de prix plus éloigné dans le futur, on peut remplacer les rendements du marché dans le futur par leurs espérances. Par exemple, pour déterminer l'espérance du prix dans 3 périodes, nous aurions :

(4.24) $$E[P_{t+3}] = \alpha + \gamma_0 E\left[R_{m,t+3}\right] + \gamma_1 E\left[R_{m,t+2}\right] + \gamma_2 E\left[R_{m,t+1}\right] + \gamma_3 R_{m,t} + \gamma_4 R_{m,t-1} + \cdots + \gamma_n R_{m,t-n}$$

D'autre part, comme nous le verrons dans la section suivante, il est de loin préférable de déterminer l'équivalent certain séparément pour chacun des flux monétaires d'un projet en prenant soin d'appliquer la prime de risque spécifique à ce flux monétaire. Ensuite, on peut additionner ces équivalents certains pour déterminer celui de l'ensemble du projet. Si cela est impossible, on peut tout de même déterminer directement l'équivalent certain du projet à partir du risque moyen de projets semblables, cependant le résultat ne sera pas tout-à-fait exact si les flux monétaires n'ont pas tous ce même niveau de risque.

Encore ici, la méthode de l'équivalent certain basée sur le modèle CAPM n'est pas parfaite et peut parfois donner des résultats qui semblent invraisemblables. Cependant, si on laisse au gestionnaire la liberté d'estimer son équivalent certain, qui se fera souvent dans ses intérêts personnels, plusieurs opinions divergeront et entreront en conflits quant à savoir la nature de la fonction d'utilité de tous et chacun. Alors, la méthode de l'équivalent certain basée sur le modèle CAPM demeure une méthode rigoureuse d'actualisation afin de déterminer la valeur présente d'un projet.

4:4 - COMPARAISON RADR VS EC

En général, plus les données s'éloignent d'un cas typique ou plus l'on cherche à actualiser une valeur lointaine, alors les résultats deviennent de moins en moins fiables en pratique, voire parfois invraisemblables, et aussi, de plus en plus divergents entre les deux méthodes de calcul.

Pour mieux visualiser la façon de calculer ces deux méthodes et leurs résultats, nous avons préparé deux fichiers Excel. Dans le premier cas, nous avons l'historique fictif du prix d'un bien ainsi que du rendement du marché. À partir de ces données, nous pouvons actualiser l'espérance du prix futur de ce bien à différentes périodes avec les méthodes EC et RADR. Notez que vous pouvez changer les valeurs dans les cellules rosés, c'est-à-dire l'historique du prix du bien et du rendement du marché, l'espérance du prix que l'on veut actualiser ainsi que le rendement sans risque. En changeant ces valeurs, vous pourrez observer leur effet sur les deux méthodes EC et RADR. Vous pouvez aussi analyser la mathématique se cachant derrière chaque cellule. De plus, les calculs seraient les mêmes si nous avions l'espérance des prix futurs et des rendements futurs plutôt que leur historique. D'autre part, vous pouvez observer que si l'on multiplie tous les prix historiques ainsi que ceux espérés par le même nombre, les deux méthodes donneront les mêmes montants qu'au préalable multipliés par ce nombre. Cependant, si l'on garde les prix historiques inchangés et que l'on multiplie seulement l'espérance du prix que l'on veut actualiser, alors la méthode RADR donnera des résultats qui auront été multipliés par ce nombre, mais la méthode EC donnera des résultats n'ayant pas de relation avec ceux au préalable. C'est ce qu'on expliquait au préalable à propos de l'utilisation des mêmes unités de mesure.

- **Consulter les annexes A1, A2, et A3 en fin de chapitre**

Dans le deuxième cas, nous avons l'historique quotidien pour 124 jours du début de l'année 2007 pour le prix d'un baril de pétrole au New York Mercantile Exchange (NYME), le prix d'un baril de Brent au marché de Londres et l'indice du marché que l'on représente par le Dow Jones. Encore une fois, on peut voir la différence entre la méthode EC et RADR. Notez, que dans ce cas, vous pouvez changer les valeurs des cellules en roses, c'est-à-dire, le rendement sans risque et de l'espérance du prix à actualiser afin d'observer leurs effets.

- **Consulter l'annexe B**

Alors, avec ces deux cas, vous pouvez remarquer que les méthodes EC et RADR ne donnent pas exactement les mêmes résultats, souvent ces résultats sont même très différents. Il semble difficile de rendre un jugement quant à savoir laquelle des méthodes est la meilleure. Chacune peut donner des résultats plausibles, mais peut aussi rendre des résultats moins fiables. Il faut donc analyser les résultats avec précaution. Par exemple, si la covariance entre le prix et le rendement du marché est négative, il sera alors fort possible que la méthode EC donne une valeur actualisée plus élevée que celles espérées dans le futur. Aussi, si la covariance entre le rendement du prix et le rendement du marché est négative, alors la méthode RADR donne une valeur actualisée plus élevée que celles espérées dans le futur, tel que pour le prix du baril de Brent dans le deuxième fichier Excel. Ces résultats, à première vue invraisemblables, sont dus au modèle CAPM qui dit que l'actif ayant une corrélation négative avec le rendement du marché est considéré moins risqué puisqu'il permet une diversification qui diminuera le risque total d'un portefeuille.

Cette théorie est adéquate dans un cas général où toute diversification et toute utilisation de dérivés financiers est possible, mais elle demeure parfois difficile à accepter lorsqu'on veut calculer de façon unique la valeur d'un flux monétaire composant un projet. Cependant, même avec leurs imperfections, ces méthodes demeurent tout de même une façon rigoureuse d'actualiser un flux monétaire. Pour contourner, toutes ces imperfections ou simplement accélérer le processus, plusieurs gestionnaires seront tentés d'établir eux-mêmes un équivalent certain et une prime de risque pour la méthode RADR, cependant cette façon de faire laisse une grande place à différentes interprétations de la fonction d'utilité et du niveau de risque, et donc à un jugement des gestionnaires dans leurs propres intérêts.

4:5 - EC ET RADR DANS LE CAS D'UN ARBRE BINOMIAL AVEC PROBABILITÉ

Les explications de cette section sont inspirées du chapitre 19 du livre *Valuation and Capital Budgeting* (2006) de Gordon Sick, cependant, nous allons privilégier la méthode RADR, qui est beaucoup plus intuitive et suggérer d'utiliser la méthode EC seulement dans des cas bien particuliers plutôt qu'en tout temps comme semble le vouloir Gordon Sick.

Un arbre binomial avec probabilité est simplement la représentation du prix futur d'un actif à travers plusieurs périodes avec la probabilité que le prix augmente ou baisse d'un certain pourcentage à chaque période. Pour le visualiser, prenons l'exercice #19.1 tiré du livre de Gordon Sick.

Une industrie tente de déterminer le moment idéal pour produire et vendre un seul bien. Elle peut le faire aujourd'hui (période 0) ou soit attendre une ou deux périodes. Après ces deux périodes, il sera impossible de le faire. Le coût de production, qui est payé à la période où le bien est vendu, est de 100$ et demeure constant peu importe la période où l'on désire le produire. Le prix auquel l'industrie peut vendre ce bien est aujourd'hui de 110$ (P_0). À chaque période suivante, le prix peut soit augmenter de 15% (u) ou diminuer de 15% (d). De plus, à partir du modèle CAPM, on sait que le rendement du prix du bien sera en moyenne de 10% (RADR). Puisque le prix présent doit être égal à l'espérance du prix futur actualisé selon son niveau de risque, cela nous permet alors de déterminer la probabilité que le prix monte (π) à chaque période de la façon suivante :

(4.25)

$$P_0 = \frac{P_0\pi(1+u) + P_0(1-\pi)(1+d)}{1+RADR}$$

Que l'on peut réarranger pour donner :

(4.26)

$$\pi = \frac{RADR - d}{u - d}$$

Et ainsi obtenir :

(4.27)

$$\pi = \frac{0{,}10 - (-0{,}15)}{0{,}15 - (-0{,}15)} = \frac{0{,}25}{0{,}30} = 0{,}833$$

Notons, que si l'on avait connu cette probabilité de hausse, nous aurions pu calculer le RADR si nous ne le connaissions pas déjà.

Donc, à chaque période, il y a 83,3% de chance que le prix monte de 15% et 16,7% de chance que le prix baisse de 15%. Ainsi, voici l'arbre binomial du prix du bien selon leur probabilité pour deux périodes futures.

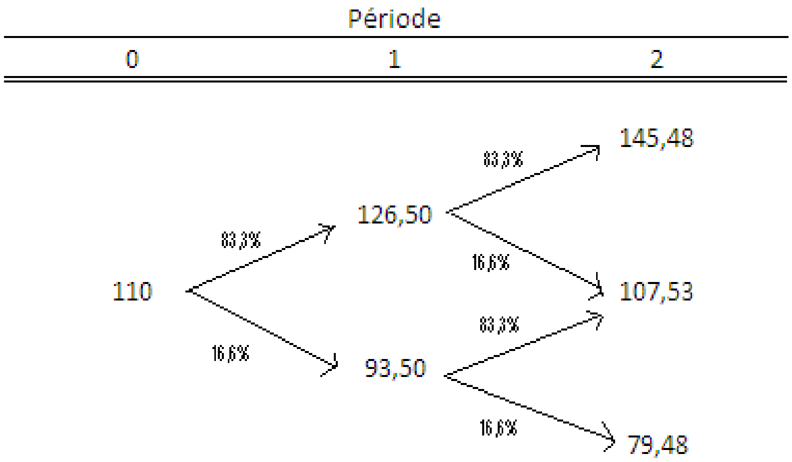


FIGURE 10. ARBRE BINOMIAL DU PRIX AVEC LEURS PROBABILITÉS RÉELLES.

Notons que l'on peut actualiser au taux RADR les prix de la période t selon leurs probabilités pour obtenir le prix de la période $t-1$. Ainsi :

(4.28)

$$110 = \frac{0{,}833 \times 126{,}50 + 0{,}166 \times 93{,}50}{1 + 0{,}10}$$

Et si l'on soustrait le coût de 100$, nous obtenons un arbre binomial de la valeur nette selon sa probabilité à chaque période :

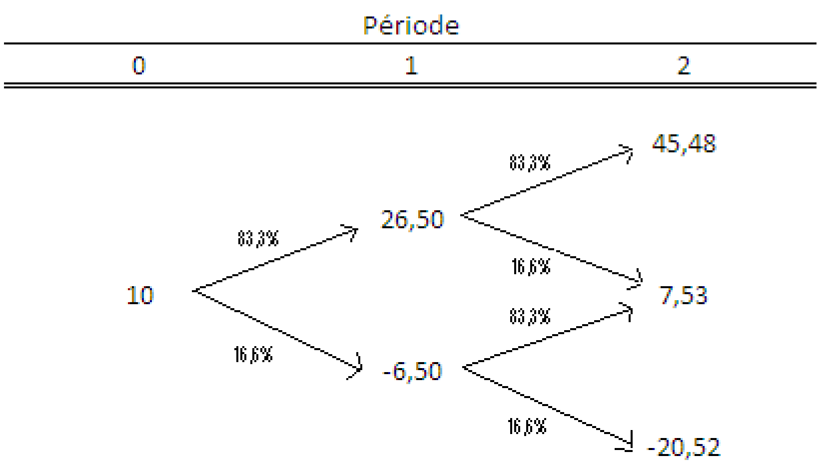


FIGURE 11. ARBRE BINOMIAL DE LA VALEUR NETTE AVEC LEURS PROBABILITÉS RÉELLES.

Cependant, nous ne pouvons pas actualiser ces valeurs nettes selon ces probabilités puisqu'elles incluent deux flux monétaires ayant un risque différent. Selon la méthode VAN-O, le revenu de la vente du bien devrait être actualisé au taux RADR de 10% et le coût de production au taux sans risque (R_Z) que l'on suppose être 2%. Alors, on peut construire un arbre binomial qui donne sur la ligne du haut la valeur présente à cette période si l'on produit et vend le bien et sur la ligne du bas la valeur espérée présente si l'on attend une période pour le produire et le vendre.

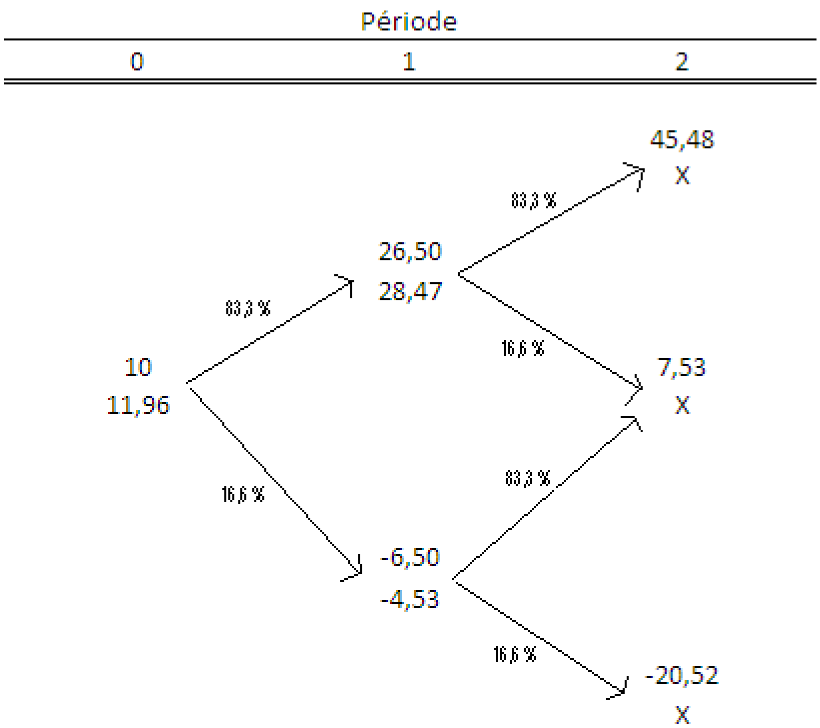


FIGURE 12. ARBRE BINOMIAL DE LA VALEUR NETTE ET DE VALEUR NETTE ESPÉRÉE AVEC LEURS PROBABILITÉS RÉELLES.

Où

(4.29)

$$11{,}96 = \frac{0{,}833 \times 126{,}50 + 0{,}166 \times 93{,}50}{1 + 0{,}10} - \frac{100}{1 + 0{,}02}$$

(4.30)

$$28{,}47 = \frac{0{,}833 \times 145{,}48 + 0{,}166 \times 107{,}53}{1 + 0{,}10} - \frac{100}{1 + 0{,}02}$$

(4.31)

$$-4{,}53 = \frac{0{,}833 \times 107{,}53 + 0{,}166 \times 79{,}48}{1 + 0{,}10} - \frac{100}{1 + 0{,}02}$$

Donc, puisque la valeur présente nette espérée (11,96) est plus grande que la valeur nette aujourd'hui (10), il serait préférable d'attendre. On peut faire ce choix à chaque période.

Cependant, cette méthode devient impraticable et inexacte lorsqu'on considère que la valeur nette est de zéro, si l'on décide de ne pas produire le bien, plutôt que négative. En effet, l'option de ne pas produire le bien si l'on a un prix plus petit que le coût est tout à fait légitime. Dans ce cas, cette méthode d'actualisation de chacun des flux monétaires selon leurs niveaux de risque ne fonctionnera pas. Il faut plutôt déterminer une nouvelle probabilité de hausse du prix que l'on appellera la probabilité risque-neutre (π') tel que :

(4.32)

$$\pi' = \frac{R_z - d}{u - d} = \frac{0{,}02 - (-0{,}15)}{0{,}15 - (-0{,}15)} = \frac{0{,}17}{0{,}30} = 0{,}566$$

Ainsi, nous pourrons déterminer l'espérance de la valeur nette future que l'on actualisera au taux sans risque tout en remplaçant les valeurs nettes négatives par zéro. Ainsi, voici un arbre binomial plus véridique représentant sur la ligne du haut la valeur nette à cette période, sur la ligne du milieu la valeur nette espérée actualisée à cette période au taux sans risque et sur la ligne du bas la valeur optimale parmi les deux précédentes. Ainsi, à chaque période on peut soit décider de produire et vendre si la valeur de la ligne du haut est plus grande que celle espérée de la ligne du milieu. Notons que pour la valeur nette espérée que l'on actualise au taux sans risque, on prend la valeur optimale pour chacune des possibilités neutres au risque de la période suivante. Alors,

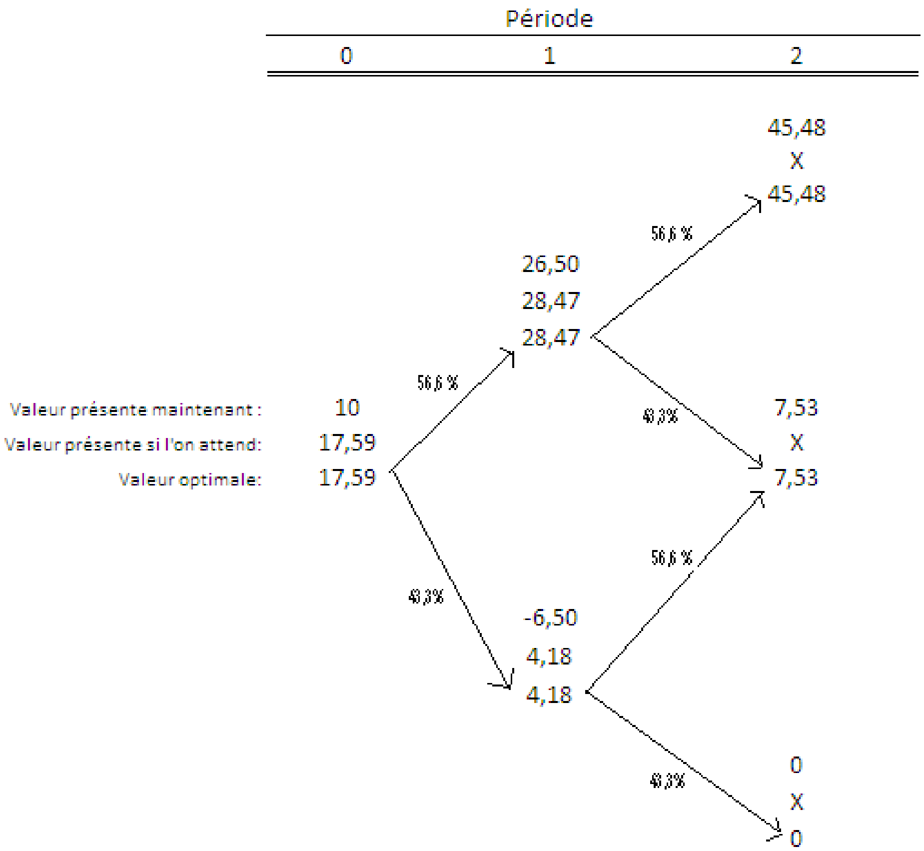


FIGURE 13. ARBRE BINOMIAL DE LA VALEUR NETTE ET VAN ESPÉRÉ AVEC LEURS PROBABILITÉS NEUTRES AU RISQUE PUISQU'ON A L'OPTION DE NE PAS PRODUIRE SI LA VALEUR NETTE ÉTAIT NÉGATIVE.

Où

$$17{,}59 = \frac{0{,}566 \times 28{,}47 + 0{,}433 \times 4{,}18}{1 + 0{,}02}$$

(4.33)

$$28{,}47 = \frac{0{,}566 \times 45{,}48 + 0{,}433 \times 7{,}53}{1 + 0{,}02}$$

(4.34)

$$4{,}18 = \frac{0{,}566 \times 7{,}53 + 0{,}433 \times 0}{1 + 0{,}02}$$

En résumé, il est préférable et plus intuitif de séparer chacun des flux monétaires et de les actualiser selon leurs niveaux de risque (RADR) propre et selon leurs probabilités réelles. Cependant, lorsqu'on a le choix de ne pas produire lorsque la valeur nette est négative, on peut remplacer celle-ci par zéro et alors il faut actualiser les valeurs présentes au taux sans risque selon les probabilités risque-neutre afin d'obtenir des valeurs présentes espérées exactes. Toutefois, cette dernière façon devient beaucoup plus compliquée voire même impraticable s'il existe plus d'un flux monétaire risqué.

4:6 - APPENDIX

Annexe A1

On peut changer les valeurs dans les cellules en rose,
et ainsi voir l'effet sur la valeur espérée actualisée
selon les deux méthodes, et cela pour différents nombres de périodes.

Rendement sans risque: 0,03

période	Prix ($) P	Rendement du prix Rp	Rendement du marché Rm
0	9	0,125	0,12
-1	8	0,14285714	0,04
-2	7	-0,125	-0,05
-3	8	0,33333333	0,2
-4	6	-0,14285714	-0,02
-5	7	0,16666667	0,15
-6	6	X	X
moyenne:	7,5	0,08333333	0,07333333
σ^2:	0,91666667	0,02821476	0,00818889
σ:	0,95742711	0,16797249	0,09049248

Cov(P,Rm):	0,04666667
Corr(P,Rm):	0,53862756
facteur EC:	0,24694708
Cov(Rp,Rm):	0,0141369
Corr(Rp,Rm):	0,93004439
facteur RADR:	0,07480859

Espérance du prix à actualiser : 10

nombre de périodes	selon la méthode : EC	RADR
1	9,46898341	9,05134167
2	8,96041647	8,1926786
3	8,4734419	7,41547332
10	5,60342093	3,69087714
100	-0,7646074	0,00046913
1000	-3,4469E-11	5,1637E-43

Annexe A2

On peut voir l'effet de changer
un seul prix de l'échantillon.

Rendement sans risque: 0,03

période	Prix ($) P	Rendement du prix Rp	Rendement du marché Rm
0	9	0,125	0,12
-1	8	0,14285714	0,04
-2	7	0,16666667	-0,05
-3	**6**	0	0,2
-4	6	-0,14285714	-0,02
-5	7	0,16666667	0,15
-6	6	X	X
moyenne:	7,16666667	0,07638889	0,07333333
σ^2:	1,13888889	0,01283088	0,00818889
σ:	1,06718737	0,11327349	0,09049248

Cov(P,Rm):	0,00444444
Corr(P,Rm):	0,04602188
facteur EC:	0,02351877
Cov(Rp,Rm):	0,0011045
Corr(Rp,Rm):	0,10775164
facteur RADR:	0,00584469

Espérance du prix à actualiser : 10

nombre de périodes	selon la méthode : EC	RADR
1	9,68590411	9,65395687
2	9,3816217	9,31988832
3	9,08684758	8,99737999
10	7,26593741	7,03159002
100	0,39795356	0,29548498
1000	-1,9666E-12	5,074E-15

Annexe A3

On peut voir que si le prix est plus volatile,
et surtout s'il est corrélé négativement avec le marché,
on obtient des résultats qui semblent invraisemblables.

Rendement sans risque: 0,03

période	Prix ($) P	Rendement du prix Rp	Rendement du marché Rm
0	8	-0,2	0,12
-1	10	0,42857143	0,04
-2	7	0,4	-0,05
-3	5	-0,28571429	0,2
-4	7	0,75	-0,02
-5	4	-0,33333333	0,15
-6	6	X	X
moyenne:	6,83333333	0,1265873	0,07333333
σ^2:	3,80555556	0,17379519	0,00818889
σ:	1,95078332	0,41688751	0,09049248

Cov(P,Rm): -0,08944444
Corr(P,Rm): -0,50667777

facteur EC: -0,47331524

Cov(Rp,Rm): -0,0341164
Corr(Rp,Rm): -0,90434024

facteur RADR: -0,18053456

Espérance du prix à actualiser : 10

nombre de périodes	selon la méthode : EC	RADR
1	10,1682672	11,7721092
2	10,3182491	13,8582556
3	10,4508681	16,3140899
10	10,9628491	51,1143494
100	2,98312202	121738620
1000	7,0308E-11	7,1496E+71

Annexe B

À partir de 124 données journalières du prix du baril de pétrole
et de l'indice du marché Dow Jones,

On peut établir les calcul des méthodes EC et RADR afin d'actualiser
un prix espéré du baril de pétrole à différentes périodes.

On observe que la covariance entre le rendement du prix de Brent
et le rendement du marché est négative.
cela résulte en une valeur présentes plus grandes que le prix espéré futur,
lorsque calculé à partir du modèle RADR.

	Prix d'un baril de pétrole et son rendement					
	NYME		Brent		Marché	
date	Prix	Rendement	Prix	Rendement	Dow Jones	Rendement
juil 03, 2007	71,41	0,00422	74,26	0,01866	13577,3	0,00309
juil 02, 2007	71,11	0,00908	72,9	0,00942	13535,43	0,00946
juin 29, 2007	70,47	0,01235	72,22	0,00361	13408,62	-0,00102
juin 28, 2007	69,61	0,00913	71,96	0,00167	13422,28	-0,00041
juin 27, 2007	68,98	0,01770	71,84	0,00602	13427,73	0,00675
juin 26, 2007	67,78	-0,01525	71,41	0,00070	13337,66	-0,00108
juin 25, 2007	68,83	-0,00029	71,36	-0,00944	13352,05	-0,00061
juin 22, 2007	68,85	0,00732	72,04	0,00320	13360,26	-0,01370
juin 21, 2007	68,35	-0,00219	71,81	0,01786	13545,84	0,00418
juin 20, 2007	68,5	-0,00940	70,55	-0,02245	13489,42	-0,01071
juin 19, 2007	69,15	0,00130	72,17	-0,00221	13635,42	0,00165
juin 18, 2007	69,06	0,01499	72,33	0,00977	13612,98	-0,00194
juin 15, 2007	68,04	0,00621	71,63	0,00632	13639,48	0,00633
juin 14, 2007	67,62	0,02191	71,18	0,02802	13553,72	0,00529
juin 13, 2007	66,17	0,01239	69,24	0,00992	13482,35	0,01409
juin 12, 2007	65,36	-0,00865	68,56	-0,00421	13295,01	-0,00968
juin 11, 2007	65,93	0,01775	68,85	-0,01699	13424,96	0,00004
juin 08, 2007	64,78	-0,03212	70,04	-0,03206	13424,39	0,01188
juin 07, 2007	66,93	0,01455	72,36	0,01203	13266,73	-0,01477
juin 06, 2007	65,97	0,00518	71,5	0,00196	13465,67	-0,00955
juin 05, 2007	65,63	-0,00816	71,36	0,00649	13595,46	-0,00591
juin 04, 2007	66,17	0,01659	70,9	0,03277	13676,32	0,00060
juin 01, 2007	65,09	0,01671	68,65	0,00689	13668,11	0,00297
mai 31, 2007	64,02	0,00867	68,18	0,00798	13627,64	-0,00040
mai 30, 2007	63,47	0,00443	67,64	-0,02409	13633,08	0,00826
mai 29, 2007	63,19	-0,02168	69,31	-0,01994	13521,34	0,00104
mai 25, 2007	64,59	0,01525	70,72	-0,01723	13507,28	0,00492
mai 24, 2007	63,62	-0,02273	71,96	0,01338	13441,13	-0,00625
mai 23, 2007	65,1	0,00293	71,01	0,01370	13525,65	-0,00106
mai 22, 2007	64,91	-0,02023	70,05	0,00777	13539,95	-0,00022
mai 21, 2007	66,25	0,02033	69,51	0,00361	13542,88	-0,00101
mai 18, 2007	64,93	0,00154	69,26	0,00261	13556,53	0,00592
mai 17, 2007	64,83	0,03612	69,08	0,03367	13476,72	-0,00080
mai 16, 2007	62,57	-0,00934	66,83	0,00135	13487,53	0,00775

	Prix d'un baril de pétrole et son rendement					
	NYME		Brent		Marché	
date	Prix	Rendement	Prix	Rendement	Dow Jones	Rendement
mai 15, 2007	63,16	0,00975	66,74	0,01336	13383,84	0,00278
mai 14, 2007	62,55	0,00321	65,86	0,01043	13346,78	0,00154
mai 11, 2007	62,35	0,00808	65,18	0,00851	13326,22	0,00841
mai 10, 2007	61,85	0,00504	64,63	0,01780	13215,13	-0,01106
mai 09, 2007	61,54	-0,01156	63,5	-0,00079	13362,87	0,00404
mai 08, 2007	62,26	0,01269	63,55	0,01356	13309,07	-0,00029
mai 07, 2007	61,48	-0,00662	62,7	-0,03746	13312,97	0,00365
mai 04, 2007	61,89	-0,02119	65,14	0,00447	13264,62	0,00176
mai 03, 2007	63,23	-0,00862	64,85	-0,01098	13241,38	0,00223
mai 02, 2007	63,78	-0,01009	65,57	-0,02715	13211,88	0,00577
mai 01, 2007	64,43	-0,02052	67,4	0,00253	13136,14	0,00561
avr 30, 2007	65,78	-0,01008	67,23	-0,00074	13062,91	-0,00442
avr 27, 2007	66,45	0,02105	67,28	-0,00341	13120,94	0,00118
avr 26, 2007	65,08	-0,00383	67,51	0,00104	13105,5	0,00119
avr 25, 2007	65,33	0,01919	67,44	-0,00736	13089,89	0,01049
avr 24, 2007	64,1	-0,01883	67,94	0,01707	12953,94	0,00267
avr 23, 2007	65,33	0,02785	66,8	0,00693	12919,4	-0,00328
avr 20, 2007	63,56	0,02831	66,34	0,00257	12961,98	0,01197
avr 19, 2007	61,81	-0,02106	66,17	0,01659	12808,63	0,00037
avr 18, 2007	63,14	0,00000	65,09	-0,01884	12803,84	0,00241
avr 17, 2007	63,14	-0,00770	66,34	-0,01133	12773,04	0,00413
avr 16, 2007	63,63	0,00000	67,1	-0,02443	12720,46	0,00859
avr 13, 2007	63,63	-0,00376	68,78	0,01460	12612,13	0,00471
avr 12, 2007	63,87	0,03049	67,79	-0,01181	12552,96	0,00547
avr 11, 2007	61,98	0,00097	68,6	0,01419	12484,62	-0,00710
avr 10, 2007	61,92	-0,03641	67,64	-0,02184	12573,85	0,00109
avr 05, 2007	64,26	-0,00217	69,15	0,01557	12560,2	0,00241
avr 04, 2007	64,4	-0,00294	68,09	0,00132	12530,05	0,00158
avr 03, 2007	64,59	-0,02181	68	-0,01364	12510,3	0,01034
avr 02, 2007	66,03	0,00136	68,94	0,00686	12382,3	0,00226
mars 30, 2007	65,94	-0,00242	68,47	0,01905	12354,35	0,00045
mars 29, 2007	66,1	0,03104	67,19	0,01572	12348,75	0,00393
mars 28, 2007	64,11	0,01794	66,15	0,02957	12300,36	-0,00782
mars 27, 2007	62,98	0,01959	64,25	-0,00279	12397,29	-0,00576
mars 26, 2007	61,77	0,01146	64,43	0,02108	12469,07	-0,00096
mars 23, 2007	61,07	0,01428	63,1	0,02485	12481,01	0,00159
mars 22, 2007	60,21	0,05669	61,57	0,02310	12461,14	0,00109
mars 21, 2007	56,98	0,01010	60,18	0,00116	12447,52	0,01297
mars 20, 2007	56,41	-0,00424	60,11	-0,00628	12288,1	0,00507
mars 19, 2007	56,65	-0,00719	60,49	-0,00722	12226,17	0,00956
mars 16, 2007	57,06	-0,00800	60,93	0,00877	12110,41	-0,00405
mars 15, 2007	57,52	-0,01083	60,4	-0,00805	12159,68	0,00217
mars 14, 2007	58,15	0,00207	60,89	-0,01024	12133,4	0,00476
mars 13, 2007	58,03	-0,01544	61,52	0,01535	12075,96	-0,01970
mars 12, 2007	58,94	-0,01865	60,59	0,00564	12318,62	0,00345
mars 09, 2007	60,06	-0,02547	60,25	-0,01067	12276,32	0,00127

	Prix d'un baril de pétrole et son rendement					
	NYME		Brent		Marché	
date	Prix	Rendement	Prix	Rendement	Dow Jones	Rendement
mars 08, 2007	61,63	-0,00356	60,9	-0,00376	12260,7	0,00560
mars 07, 2007	61,85	0,01962	61,13	0,02430	12192,45	-0,00124
mars 06, 2007	60,66	0,01016	59,68	-0,00167	12207,59	0,01304
mars 05, 2007	60,05	-0,02485	59,78	-0,03456	12050,41	-0,00526
mars 02, 2007	61,58	-0,00629	61,92	0,01210	12114,1	-0,00983
mars 01, 2007	61,97	0,00308	61,18	0,03014	12234,34	-0,00279
févr 28, 2007	61,78	0,00521	59,39	-0,01476	12268,63	0,00429
févr 27, 2007	61,46	0,00081	60,28	-0,00099	12216,24	-0,03293
févr 26, 2007	61,41	0,01875	60,34	-0,00066	12632,26	-0,00120
févr 23, 2007	60,28	0,00000	60,38	0,03002	12647,48	-0,00304
févr 22, 2007	60,28	0,01481	58,62	0,01524	12686,02	-0,00411
févr 21, 2007	59,4	0,01852	57,74	0,03273	12738,41	-0,00377
févr 20, 2007	58,32	-0,01785	55,91	-0,01532	12786,64	0,00149
févr 16, 2007	59,38	0,02521	56,78	0,04664	12767,57	0,00020
févr 15, 2007	57,92	-0,00138	54,25	-0,01453	12765,01	0,00182
févr 14, 2007	58	-0,01662	55,05	-0,01907	12741,86	0,00688
févr 13, 2007	58,98	0,02112	56,12	0,01081	12654,85	0,00815
févr 12, 2007	57,76	-0,03508	55,52	-0,02954	12552,55	-0,00225
févr 09, 2007	59,86	0,00167	57,21	-0,00052	12580,83	-0,00449
févr 08, 2007	59,76	0,03481	57,24	-0,01902	12637,63	-0,00231
févr 07, 2007	57,75	-0,01969	58,35	0,00534	12666,87	0,00004
févr 06, 2007	58,91	0,00375	58,04	-0,01074	12666,31	0,00036
févr 05, 2007	58,69	-0,00542	58,67	0,03056	12661,74	0,00065
févr 02, 2007	59,01	0,02895	56,93	0,00335	12653,49	-0,00159
févr 01, 2007	57,35	-0,01410	56,74	0,00389	12673,68	0,00412
janv 31, 2007	58,17	0,01999	56,52	0,03346	12621,69	0,00786
janv 30, 2007	57,03	0,05592	54,69	-0,00037	12523,31	0,00260
janv 29, 2007	54,01	-0,02474	54,71	-0,01049	12490,78	0,00030
janv 26, 2007	55,38	0,03533	55,29	-0,00683	12487,02	-0,00124
janv 25, 2007	53,49	-0,01383	55,67	0,01016	12502,56	-0,00944
janv 24, 2007	54,24	0,01175	55,11	0,02188	12621,77	0,00702
janv 23, 2007	53,61	0,04891	53,93	-0,00755	12533,8	0,00454
janv 22, 2007	51,11	-0,01674	54,34	0,03920	12477,16	-0,00703
janv 19, 2007	51,98	0,02910	52,29	0,02872	12565,53	-0,00019
janv 18, 2007	50,51	-0,03423	50,83	-0,00703	12567,93	-0,00073
janv 17, 2007	52,3	0,02089	51,19	-0,00176	12577,15	-0,00043
janv 16, 2007	51,23	-0,03267	51,28	0,02663	12582,59	0,00211
janv 12, 2007	52,96	0,02023	49,95	-0,03348	12556,08	0,00328
janv 11, 2007	51,91	-0,03781	51,68	-0,00825	12514,98	0,00585
janv 10, 2007	53,95	-0,03055	52,11	-0,00515	12442,16	0,00206
janv 09, 2007	55,65	-0,00767	52,38	-0,00833	12416,6	-0,00055
janv 08, 2007	56,08	-0,00373	52,82	0,00000	12423,49	0,00206
janv 05, 2007	56,29	0,01150	52,82	-0,03225	12398,01	-0,00662
janv 04, 2007	55,65	-0,04562	54,58	-0,03620	12480,69	0,00049
janv 03, 2007	58,31		56,63		12474,52	

	Prix d'un baril de pétrole et son rendement					
	NYME		Brent		Marché	
	Prix	Rendement	Prix	Rendement	Dow Jones	Rendement
moyenne	61,7096	0,00182274	63,42008	0,00233698	12862,8671	0,00070485
σ^2	22,3028281	0,00037826	41,9894331	0,00030044	238328,459	4,3046E-05
σ	4,72258701	0,01944892	6,47992539	0,01733321	488,188958	0,00656097
Cov with Rm	0,00027957	5,7815E-06	0,00069925	-1,704E-05		
Corr with Rm	0,0090787	0,04567696	0,01658821	-0,1510593		
facteur RADR		8,1238E-05		-0,00023944		
		8,1898E-05		-0,00024138		
facteur EC	0,00392835		0,00982531			
	0,00395262		0,00990949			

	journalier	annuel
Rendement sans risque	0,0001	0,02531384

Espérance du prix à actualiser: 72

	Valeur présente du prix espéré selon			
nombre de périodes	NYME		Brent	
	EC	RADR	EC	RADR
1	71,9849	71,9870	71,9830	72,0100
2	71,9738	71,9739	71,9660	72,0201
3	71,9666	71,9609	71,9489	72,0301
10	71,8888	71,8696	71,8299	72,1005
100	70,8947	70,7070	70,3109	73,0111
1000	61,5941	60,0660	56,2583	82,7739

Arbitrage, Additivité et Évaluation de Projets : La Valeur Actualisée Nette Optimisée (VAN-0)

CHAPTER 5

Ce chapitre est basé sur l'article publié par Marcel BOYER et Éric GRAVEL (2006) sous le titre « Évaluation de Projets : La Valeur Actuelle Nette Optimisée (VAN-O) » dans Assurances et Gestion des Risques 74(2), juillet 2006, 163-185.

5:1 - INTRODUCTION

Cette étude vise à clarifier les fondements de l'actualisation des flux monétaires (cash flows) définissant et caractérisant un projet d'investissement dans un contexte où plusieurs sources de risque sont présentes et affectent de manière différente ces flux monétaires. Nous montrons que :

- La prise en compte du risque systémique non-diversifiable d'un projet d'investissement doit se faire par (i) la décomposition des flux monétaires en un nombre variable de composantes correspondant aux diverses sources ou types de risque présents dans le projet considéré et (ii) le calcul de la valeur actualisée de chacune des composantes ainsi obtenues à l'aide d'un taux d'actualisation approprié incluant une prime de risque spécifique à la composante considérée. La valeur du projet est alors obtenue en prenant la somme des valeurs présentes des diverses composantes.

- Alternativement, les différentes composantes de flux monétaires peuvent être corrigées pour leur risque respectif afin d'obtenir l'équivalent certain de chacune des composantes. La valeur du projet est alors obtenue en prenant la somme des équivalents certains actualisée au *taux sans risque, identique, unique et observable,* correspondant au taux de préférence temporelle et donc au taux de substitution entre consommation future et consommation présente, toutes deux considérées comme certaines.

De manière générale, cette approche à l'évaluation d'un projet (à laquelle nous associerons le sigle VAN-O pour « Valeur Actualisée Nette Optimisée »[4]) mènera à une valeur calculée pour le projet qui sera différente de la valeur obtenue par l'approche usuelle de la valeur actualisée nette (VAN) qui actualise à un taux unique corrigé pour le risque l'espérance des flux financiers associés au projet. L'approche VAN-O, qui s'appuie sur des fondements analytiques plus rigoureux, pourra dans certains cas entraîner des changements importants dans le choix des investissements, d'où l'importance pour les entreprises et organisations, tant publiques que privées, de bien comprendre les fondements et les enjeux des méthodes VAN-O et VAN afin de pouvoir la mettre en application aussi rigoureusement que possible. L'incohérence entre ces méthodes ou approches à l'évaluation de projets vient du fait que la VAN actualise la séquence de flux monétaires caractérisant un projet à *un seul taux* composé d'un premier élément représentant le taux de préférence temporelle (le taux sans risque) et d'un second élément représentant une prime pour le risque, que ce risque provienne d'une source unique ou de plusieurs sources ou facteurs.

[4] En anglais, O-NPV pour "*Optimized Net Present Value*."

Nous montrons dans ce rapport que la méthode VAN telle qu'utilisée et appliquée dans la plupart des entreprises et organisations pour le choix des investissements viole certains principes fondamentaux de la création de valeur telles le principe d'additivité et le principe d'absence d'arbitrage.[5] Ce faisant,

- nous analysons l'intérêt de séparer les rôles et effets respectifs de la préférence temporelle, présente même en contexte de certitude, et de l'aversion aux risques, qui se traduit par une prime de risque associée au taux d'actualisation;
- nous définissons un taux d'actualisation « effectif » sensible aux différentes sources d'incertitude et à la structure du projet (dans ce cas, une prime de risque est associée à chaque source de risque);
- nous présentons les concepts fondamentaux de la finance moderne (notamment le principe d'additivité et le principe d'absence d'arbitrage) qui nous permettent d'inférer une prime de risque d'une source particulière à l'aide, entre autres, des prix d'actifs transigés sur des marchés réels et effectifs;
- nous montrerons comment appliquer en pratique cette « valeur actualisée nette optimisée » (VAN-O) pour améliorer et rendre le processus de choix des investissements plus rigoureux et plus efficient;
- nous montrerons les liens entre deux formes particulières de la VAN-O, celle de l'actualisation à taux différents des différentes composantes des flux monétaires associés à un projet et celle de la détermination d'équivalents certains pour ces différentes composantes des flux monétaires, tous actualisés au même taux dans risque.[6]

5:2 - VAN, VOR, PRINCIPE D'ABSENCE D'ARBITRAGE, PRINCIPE D'ADDITIVITÉ ET ÉQUIVALENT CERTAIN

Une part importante des publications discutant d'investissement en incertitude comparent la méthodologie de la valeur actualisée nette (VAN) telle qu'utilisée dans la plupart des organisations à la méthodologie de la valeur options réelles (VOR) en mettant uniquement l'emphase sur l'incapacité de la VAN de tenir compte de la flexibilité de gestion présente dans plusieurs projets d'investissement.

Mais peu d'auteurs mettent directement en évidence les faiblesses fondamentales de la VAN en ce qui a trait à l'actualisation des flux monétaires en incertitude. Bien qu'ignorer la flexibilité dans les projets puisse mener au rejet de projets à valeur positive ou au mauvais choix d'alternatives mutuellement exclusives, une méthode d'actualisation inadéquate peut aussi mener à des choix d'investissement ou de projets qui ne maximisent pas la valeur de l'entreprise ou de l'organisation.

À l'aide de trois exemples simplifiés mais convaincants nous montrons, à partir des implications du principe d'absence d'arbitrage et du principe d'additivité comment la VAN telle qu'appliquée dans la grande majorité des entreprises peut mener à des décisions d'investissement erronées et ce, indépendamment de la prise en compte de la flexibilité et des options réelles. Dans les cas où la valeur de la flexibilité de gestion en présence d'investissements irréversibles (tous les investissements réels ont un certain degré d'irréversibilité) est importante et peut changer la décision relative à un projet ou à un ensemble de projets, l'utilisation d'une méthode d'actualisation inappropriée aura des effets encore plus défavorables sur la valeur de l'organisation.

[5] Notons que les organisations appliquent la VAN à taux unique car c'est typiquement cette méthode qui est enseignée dans les écoles de commerce. En effet, on y met surtout l'emphase sur la « mécanique » de l'actualisation sans aborder la notion de risque de façon suffisamment rigoureuse.
[6] Ces deux formes sont théoriquement équivalentes mais peuvent exiger différents efforts dans des cas particuliers.

2.1 - Le principe d'absence d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage peut être définie comme une stratégie d'investissement à coût nul (sans sortie nette de fonds) qui promet un rendement positif dans certains états de la nature tout en présentant une probabilité nulle de perte. Le principe d'absence d'arbitrage stipule que sur des marchés développés et peuplés d'agents rationnels les opportunités d'arbitrage devraient être rares et de courte durée, voire à toutes fins utiles inexistantes. En effet, si une opportunité d'arbitrage devait surgir, les agents l'exploiteraient immédiatement et la feraient ainsi disparaître rapidement.

2.2 - Le principe d'additivité

Le principe d'additivité stipule que la valeur d'un portefeuille de projets indépendants doit être égale à la somme des valeurs de ses projets constituants. Ainsi, on doit pouvoir décomposer l'évaluation d'une séquence de flux monétaires en une somme d'évaluations de ses différentes composantes.

2.3 - L'équivalent certain

L'équivalent certain se définit comme étant un montant qui rend un individu indifférent entre participer à une loterie (investissement risqué) ou recevoir ledit montant avec certitude. Dans le cas où l'individu a de l'aversion pour le risque, l'équivalent certain est toujours inférieur à la valeur espérée de la loterie. La prime de risque est égale à la différence entre la valeur espérée de la loterie et l'équivalent certain.

Par exemple, si nous supposons que la valeur espérée du prix de l'or dans un an est égale à 300$ l'once et qu'un individu est indifférent entre recevoir dans un an une once d'or ou 250$ avec certitude, nous pouvons dire que pour cette personne, l'équivalent certain d'une once d'or est de 250$ et que la prime de risque de l'or est égale à 50$. Aussi, le prix d'un contrat à terme reflète le consensus du marché de l'équivalent certain d'un actif. Aujourd'hui, l'investisseur marginal (ou investisseur représentatif) devrait être indifférent entre : (1) recevoir à l'échéance du contrat une somme égale au prix du contrat (fixé aujourd'hui) ou (2) l'actif couvert par le contrat.

5:3 - LA MÉTHODOLOGIE DE LA VALEUR ACTUALISÉE NETTE

Pour rappeler les principales étapes de la VAN, prenons pour illustrer plus concrètement notre propos le cas d'une firme qui a en $t = 0$ l'opportunité de développer un réservoir de gaz naturel. Supposons qu'à la prochaine période $(t = 1)$, le réservoir considéré permettra d'extraire et de vendre x unités de gaz à un coût total égal à C. De plus, posons les hypothèses suivantes

- L'unique source d'incertitude est le prix du gaz de la prochaine période (P_1);
- Si la firme décide de développer le réservoir, elle doit en extraire le gaz en $t = 1$ (aucune flexibilité opérationnelle).

Pour déterminer la valeur actualisée des flux monétaires $(VAFM)$ provenant du projet décrit ci-haut, la firme utilisant la VAN procéderait selon les étapes suivantes :

- Estimation de la valeur anticipée des flux monétaires nets V_1 en $t = 1$; puisque P_1 est la seule source d'incertitude, on a :

$$V_1 = x.E_0[P_1] - C \tag{5.1}$$

- Détermination un taux d'actualisation r_p « approprié » pour le projet ; par exemple, en utilisant un modèle tel le modèle d'équilibre des actifs financiers à un seul facteur de risque représenté par le portefeuille de marché (MEDAF ou CAPM), on a :

$$r_p = r_f + \beta_p(E[r_m] - r_f) \tag{5.2}$$

où r_f, $E[r_m]$ et β_p sont respectivement le taux de rendement sans risque, le taux de rendement anticipé du portefeuille de marché et le bêta du projet (ou d'un projet semblable) mesurant le niveau de risque systémique du projet.

- Actualisation de la valeur anticipée des flux monétaires au taux r_p pour obtenir la valeur actualisée des flux monétaires, i.e. :

$$VAFM = V_1 \cdot \left(1 + r_p\right)^{-1} = (x.E_0[P_1] - C) \cdot \left(1 + r_p\right)^{-1}. \tag{5.3}$$

Avec la VAN, le décideur actualise la valeur anticipée des flux monétaires nets du projet à un taux d'actualisation qui reflète à la fois le « risque » des flux monétaires et le taux de préférence temporelle.

Dans la prochaine section, nous contrasterons, à l'aide de trois exemples simplifiés mais particulièrement révélateurs, la méthodologie de la VAN à une méthodologie construite à partir des implications des principes d'additivité et d'absence d'arbitrage. Le principe d'additivité des valeurs permet de désagréger la valeur espérée des flux monétaires en ses différentes composantes. Chacune de ces différentes composantes peut être évaluée par la méthode décrite ci-dessus. Le principe d'additivité stipule alors que la somme des valeurs des différentes composantes doit être égale à la valeur globale du projet.

5:4 - LACUNES DE LA MÉTHODOLOGIE DE LA VALEUR ACTUALISÉE NETTE

4.1 – Exemple 1

Reprenons l'exemple précédent en faisant l'hypothèse que la firme doit choisir entre deux projets. Le projet 1, dit à coût faible, permet de produire[7] $x = 250\ mmcf$ de gaz à un coût total de $C = 150\ K\$$ et le projet 2, dit à coût élevé, permet de produire $x = 500\ mmcf$ de gaz à un coût de $C = 400\ K\$$. De plus, nous supposons que :

- le prix anticipé du gaz est de $E_0[P_1] = \$1{,}00/mcf$;
- il existe un contrat à terme permettant d'acheter ou de vendre en $t = 1$ une unité (*mcf*) de gaz à un prix de $0,90 / *mcf*;
- le prix observé d'un bon du trésor permettant de recevoir $1,00 en $t = 1$ est égal à $0,95 impliquant un taux sans risque de 5,26 %,
- la prime de risque sur le marché est égale à $\left(E[r_m] - r_f\right) = 10{,}67\ \% - 5{,}26\ \% = 5{,}41\ \%$
- le bêta de la firme (projet) est égal à 1,8.

[7] Les quantités de gaz naturel se mesurent en milliers de pieds cubes (*mcf*) ou en millions de pieds cubes (*mmcf*).

Ainsi, le taux d'actualisation donné par le MEDAF (équation (5.2)) est de 15%. Si la firme utilise la VAN avec un taux d'actualisation de 15% pour évaluer ses projets gaziers, elle trouvera les valeurs suivantes, égales par construction :

$$(5.4) \qquad Projet\ 1: \quad VAFM = (x.E_0[P_1] - C)\cdot\left(1 + E[r_p]\right)^{-1}$$

$$= [(250\ mmcf \cdot \$1.00\ /mcf)\ - \$150K]\cdot(1.15)^{-1} = \$86.96K$$

$$(5.5) \qquad Projet\ 2: \quad VAFM = (x.E_0[P_1] - C)\cdot\left(1 + E[r_p]\right)^{-1}$$

$$= [(500\ mmcf \cdot \$1.00\ /mcf)\ - \$400K]\cdot(1.15)^{-1} = \$86.96K$$

Définissons le facteur d'actualisation comme suit :

(5.6)

$$FA = \frac{VAFM}{V_1}$$

Puisque les valeurs actualisées des flux monétaires (86,96$) et les valeurs anticipées des flux monétaires (100K$) des deux projets sont égales, on obtient un même facteur d'actualisation égal à 0,87 pour les deux projets.

En examinant (5.1), on constate que la valeur espérée des flux monétaires du projet peut se décomposer en deux parties soit:

- la partie « revenus » qui est égale à $x.E_0[P_1]$;
- la partie « coûts » qui est égale à C.

Tel que mentionné ci haut, le principe d'additivité des valeurs veut (exige) qu'on puisse évaluer séparément chaque composante et additionner les valeurs obtenues pour déterminer la valeur globale du projet. Comparons la valeur actualisée des flux monétaires des projets 1 et 2, telles qu'obtenues ci-dessus, à leurs valeurs calculées à partir du principe d'additivité des valeurs en décomposant les flux monétaires en une composante « revenus » et une composante « coûts ».

Pour trouver la valeur de la composante « revenus », il faut déterminer la valeur d'une unité de gaz en $t = 1$. Nous savons par hypothèse qu'il existe présentement un contrat à terme permettant d'acheter ou de vendre à la prochaine période 1 *mcf* de gaz à un prix de $0,90 / *mcf*. L'hypothèse d'absence de possibilités d'arbitrage implique qu'à la période actuelle, $t = 0$, la valeur (VG) de recevoir 1 *mcf* de gaz à la période prochaine, $t = 1$, devrait être égale au coût en $t = 0$ de la transaction suivante :

- Acheter un contrat à terme (position longue) pour 1 *mcf* de gaz;
- Acheter un (ou une fraction) bon du trésor qui garantira en $t = 1$ les fonds nécessaires à l'achat du *mcf* de gaz au prix spécifié par le contrat à terme.

Puisque la transaction ci-dessus nous permet de recevoir avec certitude 1 *mcf* de gaz en $t = 1$, la valeur VG de recevoir 1 unité de gaz en $t = 1$ devrait être égale au coût de la transaction ci-dessus qui en $t = 0$ est égale au prix de 0,90 bons du trésor:

$$VG = 0.90\ \times \$0.95 = \$0.855/mcf$$

Pour sa part, en raison du fait que le coût C sera encouru avec certitude, la valeur VC de chaque unité (en \$) de la composante « coût » est égale à la valeur en $t = 0$ du déboursé en $t = 1$ de $\$1$ sans risque, i.e. $VC = \$0{,}95$. Pour les deux projets nous avons donc les valeurs V suivantes :

(5.7)
$$Projet\ 1: \quad V = x \cdot VG - C \cdot VC$$
$$= (250\ mmcf \cdot \$0.855/mcf) - (150K \cdot \$0.95) = \$71.25K$$

(5.8)
$$Projet\ 2: \quad V = x \cdot VG - C \cdot VC$$
$$= (500\ mmcf \cdot \$0.855/mcf) - (400K \cdot \$0.95) = \$47.5K$$

Rappelons qu'avec la VAN, le facteur d'actualisation défini par (5.6) était égal pour les deux projets. Cela signifie que chaque dollar de revenus nets était actualisé au même taux $r = 15\%$, soit $(1 + r)^{-1} = 0{,}87$. Pour ce qui est de la deuxième méthode d'évaluation, basée sur les principes d'additivité et d'absence d'arbitrage, nous pouvons définir le facteur d'actualisation comme suit :

(5.9)
$$FA = \frac{V}{V_1}$$

ce qui nous donne un facteur de $(1 + r)^{-1} = 0{,}713$ ou $r = 40{,}35\%$ pour le projet à coûts faibles et de $(1 + r)^{-1} = 0{,}475$ ou $r = 110{,}53\%$ pour le projet à coûts élevés. Par conséquent, pour que l'évaluation des projets 1 et 2 respecte les principes d'additivité et d'absence d'arbitrage, il faut que les revenus nets du projet 1 soient actualisés à un taux plus faible (40,35%) que celui des revenus nets du projet 2 (110,53%). Voyons pourquoi.

Pour les projets considérés, la seule source d'incertitude est le prix du gaz naturel qui a une valeur espérée de \$1,00 / *mcf*. Supposons qu'à $t = 1$, le prix du gaz peut prendre avec probabilité 0,5 chacune des valeurs suivantes: $P_1 = \$1{,}25/mcf$ ou $P_1 = \$0{,}75/mcf$ d'où $E_0[P_1] = \$1{,}00/\ mcf$. Voyons comment un niveau d'incertitude absolue de $\pm\$0{,}25$ pour le prix du gaz affecte les flux monétaires nets de chaque projet:

$Projet\ 1$:

$(250\ mmcf * \$1.25/mcf) - \$150K = \$162.5K$

$(250\ mmcf * \$0.75/mcf) - \$150K = \$37.5K$

$Projet\ 2$:

$(500\ mmcf * \$1.25/mcf) - \$400K = \$225K$

$(500\ mmcf * \$0.75/mcf) - \$400K = -\$25K$

Si nous calculons pour chaque projet le niveau d'incertitude absolue des flux monétaires nets, nous obtenons $\pm\$62{,}5K$ pour le projet 1 à coût faible et $\pm\$125K$ pour le projet 2 à coût élevé. Ainsi, pour une même valeur anticipée des flux monétaires nets (\$100K), la volatilité des flux monétaires nets du projet 2 est beaucoup plus grande que celle du projet 1, ce qui justifie d'utiliser un facteur d'actualisation plus faible (taux d'actualisation plus élevé) pour les flux monétaires nets du projet 2.

En effet, si on suppose que l'investisseur a de l'aversion pour le risque et qu'il choisira l'alternative qui lui donne l'utilité espérée la plus grande, il préférera réaliser le projet 1. Voici pourquoi. Si $u(x)$ représente le niveau d'utilité de x dollars, l'utilité espérée des deux projets s'écrit comme suit :

$$u(projet\ 1) = 0.5 * u(37.5) + 0.5 * u(162.5)$$

$$u(projet\ 2) = 0.5 * u(-25.0) + 0.5 * u(225.0)$$

et la différence de l'utilité espérée des deux projets se dénote :

$$u(projet\ 1) - u(projet\ 2) = 0.5\left[\left(u(37.5) - u(-25.0)\right) + \left(u(162.5) - u(225.0)\right)\right]$$

Puisque l'utilité de l'investisseur augmente avec le niveau de richesse, le terme 1 de l'expression ci-dessus est plus grand que zéro et le terme 2 est plus petit que zéro. Cependant, puisque l'investisseur a de l'aversion pour le risque, sa fonction d'utilité est strictement concave (utilité marginale décroissante), le terme 1 sera en valeur absolue plus grand que le terme 2. Par conséquent l'investisseur qui a de l'aversion pour le risque préféra le projet 1, ce qui invalide la conclusion de la VAN qui attribue la même valeur aux deux projets.

Malgré la simplicité de l'exemple, il est intéressant de constater que la VAN telle qu'appliquée dans beaucoup d'entreprises n'est pas en mesure de capter les différences qui existent entre deux projets ayant la même valeur espérée des flux monétaires nets mais avec des volatilités différentes. En utilisant un seul taux d'actualisation pour certaines classes de projets (projets gaziers par exemple), il est fort probable que l'entreprise prendra des décisions qui sont en définitive destructrices de valeur.

Dans l'exemple présent, la méthode usuelle de la VAN surestime la valeur des deux projets en actualisant les coûts (extraction ou production) comme si ces coûts étaient incertains plutôt que certains. Puisque la firme doit extraire le gaz, selon l'hypothèse simplificatrice que nous avons posée, elle devra encourir les coûts avec certitude et aucune prime de risque ne doit leur être appliquée; les coûts doivent par conséquent être actualisés au taux sans risque (5,26%).

Il est très difficile voire impossible de trouver un taux d'actualisation approprié pour chaque profil de projet permettant d'appliquer de manière cohérente la méthode usuelle de la VAN. Une méthodologie d'actualisation des flux monétaires en incertitude inspirée des principes d'additivité et d'absence d'arbitrage, la méthode VAN-O, nous permet de contourner ce problème en décomposant les flux monétaires des divers projets en composantes correspondant aux différentes sources de risque et en déterminant une prime de risque appropriée pour chaque composante ou source de risque. Ainsi, tous les projets sont évalués de manière cohérente à partir des mêmes primes de risque appliquées à leurs différentes composantes.

4.2 – Exemple 2

L'exemple suivant inspiré de SICK (2005) nous permettra de montrer qu'en situation d'incertitude, il est impossible de trouver, pour des flux monétaires nets à composantes de risque différentes, un taux d'actualisation approprié, unique et indépendant des différents états de la nature. Ce constat implique que la méthodologie de la VAN sera de manière générale très difficile, voire à toutes fins utiles impossible, à utiliser d'une manière qui soit cohérente avec la maximisation de la valeur de l'entreprise ou de l'organisation. Par contre la VAN-O pourra toujours être utilisée de manière cohérente avec cet objectif.

Prenons le cas d'une firme qui peut investir $K = \$190$ millions de dollars pour développer une mine d'or, qui lui permettrait d'extraire $Q = 1$ million d'onces d'or à un coût d'extraction de $E = \$100$ l'once. De plus, supposons que le prix de l'or est présentement égal à $S = \$300$ l'once. Pour évaluer ce projet, nous pouvons utiliser le principe d'évaluation qui veut que si nous devions entreprendre ce projet maintenant et si la mine était par la suite gérée de façon optimale, c'est-à-dire en appliquant le principe d'Hotelling pour déterminer le rythme d'extraction, alors la VAN du projet serait[8] :

$$(5.10) \qquad VPN = (S - E).Q - K$$

Par conséquent, si la décision de développer la mine devait être prise aujourd'hui, la VAN serait égale à :

$$VPN = (300 - 100) * 1\,000\,000 - 190\,000\,000 = \$10\,000\,000$$

Supposons que d'une période à l'autre, le prix de l'once d'or peut augmenter de $u = 20\%$ avec une probabilité de $\pi = 75\%$ ou diminuer de $d = 20\%$ avec une probabilité de $1 - \pi$. L'évolution du prix peut être représentée de la façon suivante (tableau 1) :

0	1	2
		$ 432
	$ 360	
$ 300		$ 288
	$ 240	
		$ 192

TABLEAU 1. ÉVOLUTION DU PRIX DE L'OR

Notons qu'à chaque t, le prix de l'or doit être égal à la valeur espérée du prix de la période suivante actualisé au taux d'actualisation ajusté pour le risque. Ainsi, le taux d'actualisation ajusté pour le risque sous-jacent au tableau 1 doit être $r_{or} = 10\%$, comme le veut la condition de cohérence suivante :

(5.11)

$$S = \frac{\pi(1+u)S + (1-\pi)(1-d)S}{1+r} \Rightarrow r = \pi(u+d) - d = 0.75(0.4) - 0.2 = 0.1$$

En utilisant (5.10) pour déterminer la VAN de la mine, nous avons les trois possibilités suivantes pour la VAN d'un projet d'investissement à réaliser en $t = 2$: $142M, $-2M, $-98M. Si nous raisonnons en termes de VAN conventionnelle, nous actualisons la valeur espérée de la mine à un taux de 10% (taux d'actualisation ajusté pour le risque de l'or puisque la seule source de risque est le prix de l'or) pour déterminer la valeur du projet en $t = 0$. Cela nous donnerait (tableau 2):

0	1	2
		$142 000 000
	$96 363 636	
$60 330 579		-$2 000 000
	-$23 636 364	
		-$98 000 000

TABLEAU 2. VALEUR ACTUALISÉE DE LA MINE EN $t = 0$ SELON LA VAN EN UTILISANT UN TAUX D'ACTUALISATION DE 10%

[8] Le principe d'Hotelling veut que la valeur actualisée de la mine est donnée par (5.10) sous l'hypothèse qu'elle est opérée et gérée de manière optimale: la valeur actualisée d'une once d'or extraite en $t = t_1$ doit, par le principe d'arbitrage, être la même que celle d'une once d'or extraite en toute autre période t. Ainsi, toute once d'or extraite dans le plan optimal d'extraction doit avoir la même valeur actualisée que la valeur $(S - E)$ de l'once d'or extraite en période présente, d'où l'expression (5.10).

ce qui est équivalent à

$$VPN = \frac{\pi^2 * 142\,000\,000 - 2\pi(1-\pi) * 2\,000\,000 - (1-\pi)^2 * 98\,000\,000}{(1+r)^2} = \$60\,330\,579$$

Si nous procédons comme dans l'exemple 1 en évaluant séparément les composantes « revenus » et « coûts » de la formule d'Hotelling, nous obtenons pour la valeur des revenus V_T donnés par le produit de la vente de 1 million d'onces d'or au prix observé en $t = 2$ (tableau 3):

0	1	2
$300 000 000	$360 000 000 $240 000 000	$432 000 000 $288 000 000 $192 000 000

TABLEAU 3. VALEUR ACTUALISÉE DE 1 MILLION D'ONCES D'OR REÇUES EN $t = 2$

Par ailleurs, puisque les valeurs de l'investissement K et du coût d'extraction E sont par hypothèse connues avec certitude, nous pouvons en déterminer les valeurs actualisées en utilisant le taux sans risque que nous supposerons égal à $r_f = 6\%$. Ainsi, la valeur actualisée des coûts V_c est égale à :

(5.12)

$$V_c = \frac{290\,000\,000}{(1.06)^2} = \$258\,098\,968$$

Selon le principe d'additivité des valeurs, la valeur V_{mine} en $t = 0$ de la mine d'or est égale à :

(5.13) $$V_{mine} = V_r - V_c = \$300\,000\,000 - \$258\,098\,968 = \$41\,901\,032$$

Avec la méthode VAN, nous avons appliqué un même taux d'actualisation aux revenus et aux coûts même si les deux composantes ne représentent pas le même niveau de risque et cette procédure nous a donné une VAN de $60 330 579. Avec la VAN-O, nous utilisons un taux d'actualisation différent pour chaque source de risque selon la nature et le niveau (quantité) de risque encouru, déterminé en utilisant le modèle MÉDAF si ce modèle est pertinent dans le cas du problème considéré. Une fois encore, la VAN surestime la valeur du projet en actualisant les coûts (investissement et extraction) comme incertains plutôt que comme certains.

Voyons maintenant s'il est possible de trouver un taux d'actualisation unique permettant de réconcilier la VAN et la méthode VAN-O basée sur le principe d'additivité. Pour ce faire, considérons le tableau 4 où chaque entrée est égale à V_{mine} à chaque période t pour tous les états de la nature possibles (niveau du prix de l'or):

0	1	2
$41 901 032	$86 415 094 -$33 584 906	$142 000 000 -$2 000 000 -$98 000 000

TABLEAU 4. VALEUR ACTUALISÉE DE LA MINE À CHAQUE PÉRIODE, CALCULÉE SELON LES PRINCIPE D'ADDITIVITÉ ET D'ABSENCE D'ARBITRAGE (VAN-O)

Calculons en $t = 1$ pour un prix de l'or de $360, le taux d'actualisation nous permettant de réconcilier la VAN et le tableau 4. Nous avons :

(5.14)

$$\$86\,415\,094 = \frac{0.75 * \$142\,000\,000 - 0.25 * 2\,000\,000}{1 + R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{0.75 * \$142\,000\,000 - 0.25 * 2\,000\,000}{\$86\,415\,094} - 1 = 22.66\%$$

En $t = 0$, on trouve :

(5.15)

$$\$41\,901\,032 = \frac{0.75 * \$86\,415\,094 - 0.25 * 33\,584\,906}{1 + R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{0.75 * \$86\,415\,094 - 0.25 * 33\,584\,906}{\$41\,901\,032} - 1 = 34.64\%$$

Ainsi, il n'existe pas de taux d'actualisation unique permettant de concilier les deux méthodes, ce qui rend difficile voire impossible l'application cohérente de la VAN pour maximiser la valeur de l'organisation.

Voyons pourquoi le taux d'actualisation varie selon l'état de la nature (prix de l'or). Supposons que nous ayons utilisé le MÉDAF (équation (5.2)) pour déterminer le taux d'actualisation ajusté pour le risque de l'or. Supposons que la prime de risque du marché est égale à 8%, ce qui nous donne le *bêta* du prix de l'or β_{or} :

$$r_{or} = r_f + \beta_{or}\left(E[r_m] - r_f\right) \Rightarrow \beta_{or} = \frac{r_{or} - r_f}{\left(E[r_m] - r_f\right)} = \frac{0.04}{0.08} = 0.5$$

Pour déterminer le *bêta* du projet, nous utilisons le fait que le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des *bêtas* de ses composantes, le poids d'un *bêta* étant égal à la proportion de l'actif correspondant dans le portefeuille. Considérant que

(5.16) $$V_{mine} = V_r - V_c$$

nous avons

(5.17)

$$\beta_{mine} = \beta_r \frac{V_r}{V_{mine}} + \beta_c \frac{V_c}{V_{mine}}$$

Puisque $\beta_T = \beta_{or}$ et $\beta_c = 0$ (coûts certains) nous avons l'expression suivante pour β_{mine}:

(5.18)

$$\beta_{mine} = \beta_{or} \frac{V_r}{V_{mine}}$$

Comme le rapport V_T/V_{mine} varie en fonction de la période et de l'état de la nature, le taux d'actualisation devient variable, rendant difficile et même impossible l'application de la méthode usuelle de la VAN si l'objectif du choix des investissements est de maximiser la valeur de l'organisation. En effet, nous pouvons vérifier que la différence de taux d'actualisation des expressions (5.14) et (5.15), soit $22.66\% - 34.64\% = -11.98\%$, est égale à la différence des *bêtas* des états de la nature correspondants, obtenus de l'expression (5.18), multipliée par la prime de risque du marché de 8%, soit

$$\left[0.5\left(\frac{300}{41.901032}\right) - 0.5\left(\frac{360}{86.415094}\right)\right] * 8\% = 11.98\%$$

4.3 – Exemple 3

Nous prenons maintenant le cas d'une firme qui veut évaluer le projet suivant : investir K millions de dollars pour acquérir un actif lui permettant de produire annuellement pendant T années une quantité Q (par exemple : kWh d'électricité) à un coût unitaire constant de c. De plus, nous supposons qu'une proportion w de la production est destinée à un marché où le prix est fixe (électricité patrimoniale) et égal à P^f, tandis que le surplus est écoulé sur un marché où le prix P_T est volatil. Par conséquent, à chaque t, le profit (flux monétaires nets) généré par l'actif s'écrit comme suit :

$$(5.19) \qquad \pi_t = (w * P^f + (1 - w) * P_t - c)\, Q$$

L'hypothèse implicite derrière la formulation ci-dessus est qu'il est impossible d'interrompre la production même si (5.19) devient négatif; supposons de plus que la firme n'a pas l'option de reporter l'investissement.

Supposons que le prix sur le marché volatil suit un mouvement Brownien géométrique (MBG) et que le prix est présentement égal à P_0. Nous allons faire l'analyse de ce projet en temps continu.

Ainsi, le prix suit la dynamique suivante :

$$(5.20) \qquad dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dz$$

où $dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$, avec ε_t distribué selon $N(0,1)$. Dans l'expression (5.20), le paramètre α caractérise l'évolution anticipée (moyenne) du prix et σ caractérise sa variabilité ou volatilité. Pour illustrer le phénomène MBG, réécrivons (5.20) sous une forme en temps discret; nous avons :

$$(5.21) \qquad P_{t+\Delta t} - P_t = \alpha P_t \Delta t + \sigma P_t \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

où Δ représente un intervalle de temps (par exemple : $\Delta t = {}^{1}/_{12}$ si l'intervalle est de 1 mois). Nous pouvons réécrire (5.21) comme suit [9]:

$$(5.22) \qquad P_{t+\Delta t} = P_t(1 + \alpha \Delta t) + P_t(\sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t})$$

Puisque ε_t est distribué selon $N(0,1)$, l'espérance mathématique au temps t du prix au temps $t + \Delta t$ est égale à :

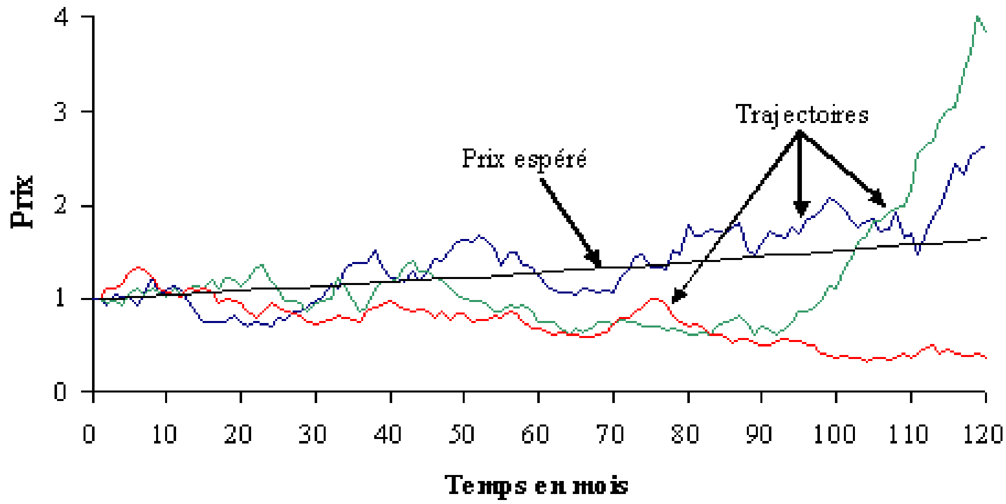
$$(5.23) \qquad E_t[P_{t+\Delta t}] = P_t(1 + \alpha \Delta t)$$

On a donc :

$$(5.24) \qquad P_{t+\Delta t} = E_t[P_{t+\Delta t}] + P_t(\sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t})$$

[9] Notons : dt est équivalent à dire que Δt tend vers zéro.

Le graphique 1 illustre trois exemples de trajectoires générées par l'équation (5.24) avec un paramètre de tendance $\alpha = 0.05$ (on anticipe que le prix augmentera en moyenne de 5% par année) et un paramètre de volatilité $\sigma = 0.25$ (c'est-à-dire une volatilité de 25% par année) avec $P_0 = \$1$ et $\Delta t = 1/12$.



GRAPHIQUE 1. TRAJECTOIRES GÉNÉRÉES PAR UN MOUVEMENT BROWNIEN GÉOMÉTRIQUE

Pour ce qui suit, nous utilisons le MÉDAF comme modèle d'équilibre pour le taux de rendement espéré r_i d'un actif (ou variable d'état) quelconque. Le MÉDAF (équation (5.2)) peut s'exprimer comme suit :

(5.25)

$$r_i = r_f + \frac{\rho_{im}\sigma_i}{\sigma_m}\left(E[r_m] - r_f\right)$$

où r_f, $E[r_m]$, ρ_{im}, σ_i et σ_m sont respectivement le taux de rendement sans risque, le taux de rendement espéré du portefeuille de marché, le coefficient de corrélation entre le rendement de l'actif (ou de la variable d'état) et le rendement du marché, l'écart type du rendement de l'actif et l'écart type du rendement du portefeuille de marché. Notons que $\frac{\rho_{im}\sigma_i}{\sigma_m}$ est le β_i de l'actif.[10]

Si le prix de marché volatil est présentement égal à P_0 et si ce prix évolue selon le processus décrit en (5.20), nous pouvons démontrer qu'à la période 0, le prix anticipé de la période *t* est égal à :

(5.26) $$E_0[P_t] = P_0 e^{\alpha t}$$

---

[10] Alternativement on peut écrire le MÉDAF (5.25) à N facteurs comme suit, où $ER_t = r_i$ et V_i est la valeur de la firme: $V_i ER_i = V_i r_f + \sum_{j=1}^{N} V_i \beta_{ij}(ER_j - r_f) = V_i r_f + \sum_{j=1}^{N} \frac{Cov(cf_i, R_j)}{\sigma_j^2}(ER_j - r_f)$. Cette expression peut également s'écrire comme suit : $V_i ER_i = V_i r_f + \sum_{i=1}^{N} \rho_{ij}\sigma_i \frac{(ER_j - r_f)}{\sigma_j}$, où σ_i mesure la volatilité des flux financiers de la firme, σ_j mesure la volatilité du rendement du *j*-ième facteur de risque, $\rho_{ij}\sigma_i$ est une mesure du risque du projet *i* associé au facteur *j* et $\frac{(ER_j - r_f)}{\sigma_j}$ est le prix du risque y correspondant. Pour une analyse de la valeur de la gestion des risques basée sur une telle approche, voir BOYER, M., BOYER, M.M. and GARCIA, R. (2005) “The value of real and financial risk management”, Scientific Series, December 2005, 2005s-38. Available at CIRANO: https://www.cirano.qc.ca/files/publications/2005s-38.pdf

Dans ce cas, si la firme utilise la VAN, elle calculera la *VAFM* en sommant la séquence des flux monétaires nets anticipés et actualisés. Puisque le prix sur le marché volatil est la seule source d'incertitude et que son *bêta* est égal à β_P, elle utilisera r_P (déterminé par (5.25)) comme taux d'actualisation, ce qui donne :

(5.27)

$$VAFM = Q\int_0^T wP^f + (1-w)E_0[P_t] - c)e^{-r_P t}dt$$

$$= Q\int_0^T (wP^f + (1-w)P_0 e^{\alpha t} - c)e^{-r_P t}dt$$

$$= \frac{QwP^f(1-e^{-r_P T})}{r_P} + \frac{Q(1-w)P_0(1-e^{-(r_P-\alpha)T})}{r_P-\alpha} - \frac{Qc(1-e^{-r_P T})}{r_P}$$

Valeur actualisée des revenus marché prix fixe | Valeur actualisée des revenus marché prix volatil | Valeur actualisée coûts de production

Si la firme utilise plutôt la VAN-O, elle procédera comme suit :

- désagréger la séquence des flux monétaires (5.19) en ses différentes composantes; Dans le cas considéré, (5.19) se décompose en trois composantes de flux monétaires qui sont :
    - la séquence des coûts de production;
    - la séquence des revenus sur le marché à prix fixe;
    - la séquence des revenus sur le marché à prix volatil.
- corriger pour le risque chacune des séquences composantes en déterminant les équivalents certains respectifs à chaque période de chacune des séquences;
- additionner à chaque période les équivalents certains des trois séquences pour obtenir l'équivalent certain des flux monétaires nets du projet à chaque moment ou période *t*;
- actualiser l'équivalent certain des flux monétaires nets du projet à chaque moment ou période *t* au taux sans risque et faire la somme ou l'intégrale sur l'ensemble des moments ou périodes pour déterminer la valeur actualisée du projet.

Puisque les coûts seront déboursés avec certitude (par hypothèse) et que les revenus sur le marché à prix fixe seront aussi réalisés avec certitude (par hypothèse), les équivalents certains pour ces deux séquences sont respectivement, Q_C et $Q_w P^f$. Pour la séquence des revenus sur le marché à prix volatil, nous pouvons démonter à l'aide du principe d'absence d'arbitrage (voir HULL 2003) que l'équivalent risco-neutre du processus de prix P_T a la forme suivante :

(5.28) $$dP_t = (\alpha - \lambda_P\sigma)P_t dt + \sigma P_t dz$$

où σ et λ_P sont respectivement la volatilité et le « *market price of risk* » du processus de prix P_T, qui s'exprime comme suit :

(5.29)

$$\lambda_P = \frac{r_P - r_f}{\sigma}$$

Si nous supposons que le MÉDAF est le modèle d'équilibre pertinent pour le taux de rendement espéré, nous avons :

(5.30)

$$r_P - r_f = \frac{\rho_{P_m}\sigma}{\sigma_m}(E[r_m] - r_f)$$

En combinant (5.29) et (5.30), on obtient :

(5.31)

$$\lambda_P = \frac{\rho_{P_m}}{\sigma_m}(E[r_m] - r_f)$$

Ainsi, à chaque période $t > 0$, l'équivalent certain $EC_0[P_T]$ du prix P_T est donné par:

(5.32) $$EC_0[P_T] = P_0 e^{(\alpha - \lambda_P \sigma)t} = P_0 e^{\left(r_f - (r_P - \alpha)\right)t}$$

Pour déterminer la *VAFM* à partir de la méthode VAN-O, on procède donc comme suit :

(5.33)

$$VAFM = \int_0^T \overbrace{\left(wQP^f + (1-w)QP_0 e^{\left(r_f - (r_P - \alpha)\right)t} - Qc\right)}^{\text{équivalent certain des flux monétaires nets}} e^{-r_f t} dt$$

$$= \underbrace{\frac{wQP^f\left(1 - e^{-r_f T}\right)}{r_f}}_{\substack{\text{composante revenus} \\ \text{marché à prix fixe}}} + \underbrace{\frac{(1-w)QP_0\left(1 - e^{-(r_P - \alpha)T}\right)}{r_P - \alpha}}_{\substack{\text{composante revenus} \\ \text{marché à prix volatil}}} - \underbrace{\frac{Qc\left(1 - e^{-r_f T}\right)}{r_f}}_{\substack{\text{composante coûts} \\ \text{de production}}}$$

En comparant les expressions (5.27) et (5.33), on note qu'elles se différencient par le fait qu'une prime de risque est appliquée par la méthode usuelle de la VAN aux coûts de production et aux revenus du marché à prix fixe même si ces derniers sont certains.

Pour illustrer les écarts potentiels entre les deux méthodes, considérons les valeurs suivantes des paramètres:

$Q = 250,\ \ c = 0.5\$,\ \ w = 0.75,\ \ P^f = 1\$,\ \ P_0 = 1\$$

$r_f = 0.02,\ \ r_m - r_f = 0.08,\ \ \sigma_m = 0.15,\ \ \alpha = 0.05,\ \ \sigma = 0.25,\ \ T = 10$

Le tableau 5 présente les écarts entre les deux méthodes en fonction du coefficient de corrélation ρ_{P_m} entre le prix volatil et le taux de rendement sur le marché.

	Coefficient de corrélation				
	0	0.25	0.5	0.75	1.00
A. VAN-O (33)	1 295.34$	1 181.17$	1 089.69$	1 015.94$	956.09$
B. VAN (27)	1 295.34$	1 099.10$	941.24$	813.44$	709.26$
Différence A-B	0$	82.07$	148.45$	202.50$	246.83$

TABLEAU 5. ÉCART ENTRE LA VAN-O ET LA VAN EN FONCTION DU COEFFICIENT DE CORRÉLATION ρ_{P_m}

On remarque qu'il n'y a pas de différence entre les deux méthodes quand le niveau de risque systémique est nul (le projet a un risque de marché nul) car dans ce cas $r_P = r_f$ et tout est actualisé au taux sans risque. Pour les autres cas, la différence augmente avec le niveau de risque de marché (coefficient de corrélation plus élevé). L'erreur de valorisation engendrée par la méthode VAN vient de l'utilisation de r_P à la place de r_f pour l'actualisation des coûts et des revenus du marché à prix fixe. Dans ce cas-ci, la méthode VAN sous-estime la valeur du projet étant donné que le revenu net partiel certain donné à chaque période t par $Q(P^f - c)$ est positif. Dans les deux premiers exemples, le revenu net partiel certain correspondant était de $-C$ et donc négatif.

4.4 – Commentaires

Nous avons montré à l'aide de trois exemples représentatifs que la méthode usuelle de la VAN comporte de sérieuses lacunes et qu'une méthode VAN-O basée sur le principe d'additivité et le principe d'absence d'arbitrage est plus adéquate pour des projets à sources de risque multiples. Or tous les projets réels sont à toutes fins utiles des projets à sources de risque multiples.

La méthode VAN-O consiste à désagréger les revenus nets selon les différentes sources de risque présentes et à évaluer séparément chacune des composantes comme si elles représentaient des projets séparés. Quoique très simplifiés, les exemples analysés donnent une bonne idée des erreurs qu'on peut faire en appliquant la méthode usuelle de la VAN. Ils montrent également la marche à suivre pour appliquer la méthode VAN-O à des projets d'envergure.

5:5 - APPLICATION AUX INVESTISSEMENTS PUBLICS

Précédemment, à l'aide de trois exemples, nous avons argumenté que si plusieurs sources de risque sont présentes, l'utilisation d'un taux d'actualisation unique qui combine prime de risque et préférence temporelle (le taux sans risque) viole certains principes fondamentaux de création de valeur. Ce faisant, nous avons démontré qu'une méthodologie adéquate consiste à décomposer les flux monétaires du projet par source de risque et de calculer la valeur présente nette des diverses composantes après avoir tenu compte de leur risque non-diversifiable propre.

Quoique les exemples de ce texte portent typiquement sur des investissements du secteur privé, les mêmes idées s'appliquent aux analyses coûts-bénéfices du secteur public. En effet, dans une étude préparée pour le Commissariat Général du Plan (CGP), GOLLIER (2005) démontre à l'aide d'un modèle d'optimisation inter-temporel en incertitude, le bien-fondé de la méthodologie dans un contexte de maximisation de la richesse collective.

Le texte de Gollier s'inscrit dans le processus de révision par le CGP du taux d'actualisation utilisé pour l'évaluation de projets publics en France. Le document fournit une réponse au débat entourant la détermination d'un taux unique d'actualisation applicable à un éventail de projets de niveaux de risques différents. Comme nous, l'auteur propose un taux d'actualisation unique (taux reflétant la préférence temporelle) mais appliqué à des flux monétaires préalablement ajustés pour le risque (équivalents certains).

L'objectif de Gollier est aussi de proposer une méthodologie d'évaluation de projets à des décideurs du secteur public qui doivent souvent concilier des intérêts conflictuels. L'emphase est mise sur le développement d'une méthodologie rigoureuse et cohérente avec la maximisation du bien-être collectif et qui évite la tentation des ajustements ad-hoc.

En prenant l'exemple du développement durable, on démontre qu'il est possible avec ce modèle de fournir une réponse aux inquiétudes que suscite le calcul économique chez les défenseurs de projets à bénéfices éloignés dans le temps, notamment les projets de développement durable et les projets liés aux changements climatiques. Selon l'auteur, la réponse se trouve dans la détermination du taux de préférence temporelle qui «*…reflète l'effort que la société est prête à fournir afin d'améliorer le bien-être futur…* ». Gollier montre que le taux d'actualisation socialement efficace se décompose en trois composantes:

- le taux de préférence pur pour le présent, qui a un rôle analogue au taux sans risque constant utilisé dans nos exemples;
- l'effet richesse qui augmente la valeur d'un dollar aujourd'hui si les agents anticipent une hausse future de la richesse; il conviendra alors d'utiliser un taux d'actualisation plus élevé pour les périodes éloignées;
- l'effet incertitude ou l'effet précaution qui augmente la valeur d'un dollar demain d'autant plus que l'incertitude macroéconomique sur l'avenir est grande (équivalent certain de la richesse future plus faible); il conviendra alors d'utiliser un taux d'actualisation plus faible pour les périodes éloignées.

Tel que mentionné, le taux de préférence temporelle reflète l'effort que nous sommes prêts à fournir aujourd'hui pour le bien-être des générations futures et rien ne contraint ce taux à être constant. Le niveau du taux de préférence temporelle dépendra de la richesse anticipée des générations futures et du niveau d'incertitude entourant cette richesse. Par conséquent, la structure à terme de ce taux n'est pas nécessairement plate. En effet, si on anticipe que la croissance de la richesse diminuera dans le temps ou que l'incertitude entourant cette croissance augmentera, le taux de préférence temporelle sera une fonction décroissante du temps.

5:6 - CONCLUSIONS

Nous avons montré dans cet article à l'aide d'exemples simples et révélateurs que la méthode de la valeur actualisée nette VAN telle qu'utilisée couramment dans les entreprises privées et publiques viole plusieurs principes de la création de valeur. Ainsi, une application systématique de cette méthode dans l'évaluation et le choix de projets amènera les gestionnaires d'entreprise à commettre deux types d'erreur : d'abord, à accepter des projets qui réduiront la valeur de l'entreprise et à l'inverse à rejeter des projets qui augmenteraient cette valeur; ensuite, à faire le mauvais choix de projet en présence de projets mutuellement exclusifs.[11]

[11] L'application systématique et usuelle de la VAN néglige en plus une autre source de création valeur, à savoir les options réelles qui apparaissent dans pratiquement tous les projets, en particulier ceux (i) à caractère irréversible (lorsqu'il y a un coût significatif à changer d'idée et faire marche arrière), (ii) où une certaine flexibilité de gestion existe dans la réalisation du projet, (iii) en présence d'un environnement futur incertain. En plus des deux types d'erreur mentionnés ci-dessus, deux autres types d'erreur spécifiques sont couramment commises: d'abord, on néglige systématiquement d'évaluer ces options réelles qui sont des sources de valeur au même titre que les flux financiers; ensuite on néglige la conception optimisée d'un projet en y incorporant le cas échéant des options réelles qui peuvent faire la différence entre la maximisation de la valeur de l'entreprise

En effet, en présence de multiples sources de risque différentes les unes des autres, de toute évidence la situation la plus courante et présente à toutes fins utiles dans tous les projets, la méthode usuelle de la VAN ne respecte ni le principe d'additivité ni le principe d'absence d'arbitrage. Or ces deux principes sont les fondements mêmes de la finance moderne. Plutôt que de s'aventurer dans une discussion académique hermétique à une majorité de gestionnaires, nous avons « prouvé » nos avancées par des exemples qui viennent contredire la proposition à l'effet que la prise en compte correcte de ces multiples sources de risque ne changerait pas les décisions de l'entreprise, une proposition trop souvent véhiculée de manière plus ou moins explicite par ceux-là mêmes qui ont la responsabilité de mettre en place des processus de décision rigoureux et efficaces en matière de choix de projets. Rien n'est à la fois plus candide, plus réconfortant et plus faux.

et une gestion simplement satisfaisante. Pour une introduction aux options réelles, voir BOYER, M., CHRISTOFFERSEN, P., LASSERRE, P., ET PAVLOV, A., (2003): http://www.cirano.qc.ca/pdf/publication/2003RB-01.pdf et https://www.cirano.qc.ca/files/publications/2003RB-02.pdf (English version)

5:7 - RÉFÉRENCES

BORISON, ADAM (2003), “Real Options Analysis. Where are the Emperor’s Clothes?” *Working Paper,* Stanford University.

BOYER, MARCEL, BOYER, M. MARTIN, AND GARCIA, RENÉ (2005), “The Value of Real and Financial Risk Management”, CIRANO 2005s-38.

BOYER, MARCEL, CHRISTOFFERSEN, PETER, LASSERRE, PIERRE, AND PAVLOV, ANDREY (2003), « Création de valeur, gestion de risque et options réelles », CIRANO 2003RB-01 (English version 2003RB-02).

GOLLIER, CHRISTIAN (2005), « Comment intégrer le risque dans le calcul économique ?», Université de Toulouse (IDEI et LERNA).

HULL, JOHN C. 2003. *Options Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. 744p.

ROSS, STEPHEN A. 2004. *Neoclassical Finance*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 102 pages.

ROSS, STEPHEN. 1978. “A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams”, *The Journal of Business,* 51(3), 453-475.

SAMIS, MICHAEL, DAVID LAUGHTON AND RICHARD POULIN. 2003. “Risk Discounting: The Fundamental Difference Between the Real Options and Discounted Cash Flow Project Valuation Methods”, *Kuiseb Minerals Consulting Working Paper*.

SALAHOR, G. 1998. “Implications of Output Price Risk and Operating Leverage for the Evaluation of Petroleum Development Projects”, *The Energy Journal* 19(1): 13-46.

SICK, GORDON. 1995. “Real Options”, in R. Jarrow et al., Eds., *Handbooks in Operations Research & Management Science*, Vol. 9: 631-691.

SICK, GORDON. 2005. *Valuation and Capital Budgeting*, University of Calgary (en préparation).

VARIAN, HAL R. 1987. ”The Arbitrage Principle in Financial Economics”. *Journal of Economic Perspectives,* 1(2), 55-72.

Prix de transfert : Efficacité organisationnelle et prise en compte des risques dans les firmes multidivisionnelles

CHAPTER 6

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Nicolas Marchetti et David Jarry. Il est basé sur le cahier « Prix de transfert : Efficacité organisationnelle et prise en compte des risques dans les firmes multidivisionnelles » CIRANO 2007RP-11.

Le groupe Westdeutsches Erdgas (WE) présenté dans ce chapitre est purement fictif.

6:1 - INTRODUCTION GÉNÉRALE

Au sein d'entreprises multidivisionnelles intégrées, il est généralement indispensable que différentes unités ou divisions s'échangent des biens et des services. Les prix auxquels ces biens et services sont échangés sont appelés **prix de transfert**, ou encore **prix de cession interne**. Les prix de transfert tiennent une place prépondérante et croissante dans la problématique de gestion des compagnies pour deux raisons principales.

Premièrement, en interne, les prix de transfert sont particulièrement importants, car ils permettent d'obtenir une évaluation financière des différentes divisions et de leurs dirigeants et ainsi de mesurer leurs performances relatives. De plus, la valorisation individuelle des différentes divisions améliore la responsabilisation et donc la motivation des dirigeants et gestionnaires quant à la bonne performance de leur division. L'utilisation de prix de transfert adéquats leur donne en effet un incitatif concret d'optimisation de leurs décisions stratégiques et économiques puisque les répercussions de ces décisions deviennent alors mesurables économiquement. Il est courant par ailleurs que la rémunération des dirigeants soit fonction de la performance de leur division.

Deuxièmement, dans le cadre des opérations internationales, les prix de transfert peuvent également avoir une importance capitale puisqu'ils sont à l'origine du calcul des bénéfices imposables des différentes divisions et filiales. Les entreprises peuvent, sous certains contrats et limites, se « jouer » de la fiscalité en modifiant les prix de transfert afin d'associer les profits réels de certaines divisions à d'autres divisions localisées dans des pays où les impôts sur les bénéfices sont moins importants.

En définitive, que ce soit pour des raisons fiscales ou de performance de la firme, la problématique de la fixation des prix de transfert ne peut pas être ignorée. **Mais comment définir le niveau de ces prix de transfert ?**

Le présent rapport s'articule autour de trois axes principaux. Nous reprenons dans la section 1, une présentation détaillée des recherches réalisées depuis de plus de 50 ans en matière de prix de transfert et de performance organisationnelle. Au sein de la section 2, nous présentons l'intégration du risque dans les prix de transfert. Finalement, à la section 3, nous présentons un cas illustratif d'intégration et partage de risques entre deux divisions d'une firme. Le lecteur sera sans doute amené à se poser la question suivante**: parmi toutes les méthodes énoncées, laquelle choisir?** Comme nous le mentionnons dans la dernière section de ce rapport, la détermination optimale des prix de transfert est unique à chaque firme. Ainsi, il est important pour chacune d'elle de bien comprendre les contraintes fiscales, juridiques et financières qui s'imposent à l'entreprise pour ainsi déterminer une politique de prix de transfert optimale à l'entreprise. La Direction de la Recherche de Westdeutsches Erdgas dispose également, à la fin de ce rapport, d'une bibliographie conséquente lui permettant d'orienter des recherches futures en la matière.

6:2 – PRIX DE TRANSFERT ET PERFORMANCE ORGANISATIONNELLE

Dans la mesure où les prix de transfert affectent les incitations auxquelles les gestionnaires de division font face et dans la mesure où ces incitations peuvent augmenter la performance des divisions, l'ensemble de la firme devient plus profitable. En jouant un rôle important dans l'évaluation de la performance des différentes divisions, les prix de transfert peuvent être des facteurs puissants de performance globale. Mais il faut que ceux-ci soient fixés de manière adéquate pour qu'ils aient l'effet désiré de motivation et d'optimisation dans l'utilisation des ressources.

Quelle que soit la méthode utilisée, les prix de transfert ne peuvent satisfaire l'ensemble des acteurs de l'entreprise, les intérêts de chacun de ces acteurs étant souvent contradictoires et l'optimum global n'est pas toujours la somme des optimums locaux.

Afin de bien cerner l'importance de la politique des prix de transfert en matière de performance organisationnelle il est nécessaire de connaître l'univers dans lequel ces derniers évoluent à savoir la firme multidivisionnelle. Ce point est abordé dans la sous-section qui suit. Nous présentons ensuite en détail dans la sous-section 2.2 les objectifs qui sont traditionnellement assignés aux prix de transfert.

2.1 - Prix de transfert et firmes multidivisionnelles

Analyser l'outil que constituent les prix de transfert en matière de performance organisationnelle implique de s'intéresser à la forme d'organisation dans laquelle ils s'expriment à savoir la forme multidivisionnelle. Ainsi, au sein de cette sous-section nous revenons dans un premier paragraphe sur l'historique de la création des firmes multidivisionnelles en insistant sur les avantages et inconvénients qui caractérisent ce type d'organisation. Nous présentons dans un second paragraphe les particularités des entreprises multidivisionnelles en réseau comme Westdeutsches Erdgas.

2.1.1 - L'organisation multidivisionnelle

Les formes d'organisations industrielles ont évolué de façon constante depuis l'émergence de l'entreprise industrielle. Ainsi, on trouve au début du 19ème des productions manufacturières généralement de petite taille. Des innovations majeures, comme le chemin de fer, le bateau à vapeur ou encore le télégraphe, permettent de développer les relations commerciales. À la fin du 19ème les grandes entreprises font leur apparition et vendent des produits sur des marchés tant nationaux qu'internationaux. La production de masse se généralise permettant de fabriquer en quantité des produits de qualité supérieure à des prix plus bas.

Ces changements technologiques se sont accompagnés de changements stratégiques et organisationnels particulièrement profonds. Le champ et la complexité croissante des échanges ont tôt fait de dépasser l'aptitude des propriétaires à gérer seul leurs activités. Le propriétaire n'étant plus directement responsable de la supervision des activités il est devenu nécessaire de créer des systèmes d'échange d'informations qui permettent de contrôler et d'évaluer les responsables affectés aux taches anciennement tenues par les propriétaires. On retrouve dans cette idée de contrôle et d'évaluation un des facteurs de création des prix de transfert. Il manque cependant la notion d'échange intra-firme pour que cet outil fasse réellement son apparition. En effet, la décentralisation n'est pas de mise à cette époque et les firmes sont pour la plupart dirigées de façon centralisée et organisées selon des lignes fonctionnelles.

Un changement radical à lieu au début des années 1920 avec l'introduction de la firme multidivisionnelle. Au sein de ce type d'organisation, les cadres qui contrôlent les divisions indépendantes sont responsables de leurs performances. Ils doivent rendre des comptes à leurs supérieurs hiérarchiques, qui les évaluent, coordonnent leurs activités et élaborent la stratégie de la firme. Les premières firmes à adopter ce mode organisationnel sont General Motors, Du Pont, Sears Roebuck et Standard Oil of New Jersey.

Au cours du 20ème siècle, les firmes du monde entier ont ainsi exploité de façon croissante les avantages de la forme multidivisionnelle en poussant à l'intégration, tant horizontale que verticale, en amont et en aval. Cette intégration croissante a eu pour conséquence directe l'incorporation au sein de la firme des transactions entre clients et fournisseurs qui, antérieurement, avaient lieu sur le marché : les prix de transfert étaient nés.

La forme multidivisionnelle constitue aujourd'hui le modèle dominant d'organisation. Mais quels sont les avantages et les principales difficultés rencontrés dans la conception et la gestion des opérations réalisées au sein de ce type d'organisation ?

Sans entrer dans le détail, la firme multidivisionnelle permet d'une part l'amélioration de l'information et des incitations et d'autre part le renforcement de la coordination et du contrôle. Mais ces objectifs ne sont pas atteints sans difficultés : des problèmes de management peuvent survenir fréquemment. Il est par exemple complexe de définir le champ d'orientation et le rôle précis de chaque division et de rendre compte de leur relation. De plus, bien que la décentralisation de l'autorité facilite le bon usage de l'information, le fait même que la direction générale ne dispose pas aisément de l'information exacerbe le problème de l'aléa moral. En conséquence, des systèmes d'incitation doivent être mis en place, engendrant des coûts supplémentaires.

Enfin, et c'est sans doute à la fois un problème supplémentaire et une solution à l'ensemble des problèmes de la firme multidivisionnelle: s'il faut fixer les prix de transfert pour les transactions entre divisions. Nous allons voir dans la suite de cette section comment ces prix de transfert doivent être fixés.

2.1.2 - Westdeutsches Erdgas et le modèle multidivisionnel

Les prix de transfert sont généralement considérés comme le fruit de la conjonction de deux phénomènes :

- Un certain niveau d'intégration verticale ;

- Un souci de décentralisation.

Dans le cadre de cette organisation, les firmes créent ce que l'on appelle des centres de profits ou divisions. DEAN (1955) définit les centres de profit comme des entités:

- possédant une indépendance opérationnelle dans la prise de décision qui affecte ses profits ;
- ayant accès aux ressources et aux marchés avec une liberté d'approvisionnement en interne comme en externe ;
- possédant une vision claire des coûts et des profits générés dans le cadre de leurs activités ;
- enfin, se fixant comme objectif la recherche du profit.

Dans la réalité, très rares sont les organisations dont les centres de profits ou divisions possèdent ces quatre caractéristiques. Comme nous le verrons, il n'est parfois d'ailleurs pas optimal de laisser autant de liberté à ces divisions. Le plus souvent, comme le note SALOMONS (1965), le système de prix de transfert est mis en place sur des pseudo-centres de profit, c'est-à-dire des centres dont les responsables ne maîtrisent pas la totalité des éléments composant leur compte de résultat. Qu'en est-il dans une entreprise comme Westdeutsches Erdgas ?

L'organisation multidivisionnelle constitue une référence naturelle pour les entreprises qui souhaitent (ou doivent pour des raisons juridiques) quitter la culture administrative pour entrer dans la culture de gestion. Westdeutsches Erdgas fait partie de ces entreprises qui évoluent dans un environnement en pleine mutation. Elle est tenue de s'adapter pour gagner en performance dans un univers toujours plus concurrentiel.

Comme nous l'avons souligné dans le paragraphe précédent, le modèle multidivisionnel est attractif mais non sans dangers. Décomposer l'entreprise en centres de profit et/ou de coût indépendants permet de retrouver les avantages de la PME tout en conservant les gains liés à la grande entreprise en termes d'économies d'échelle. Grâce à cette organisation, on dispose d'un responsable pour chaque centre. Ce responsable est théoriquement libre de prendre des décisions opérationnelles, et ce, plus près du terrain.

Cependant, dans la plupart des cas, les centres de profit ne disposent pas de la liberté nécessaire pour permettre au mécanisme de fonctionner de manière optimale. Pour DEARDEN (1976) :

« LA DÉCENTRALISATION PAR CENTRES DE PROFIT NE PEUT ÊTRE MENÉE À BIEN QUE S'IL EST POSSIBLE DE DIVISER L'ENTREPRISE EN UNITÉS VÉRITABLEMENT EN MESURE DE MAÎTRISER LEUR DÉVELOPPEMENT. C'EST-À-DIRE DONT LES RESPONSABLES PEUVENT TOTALEMENT ORCHESTRER LA PRODUCTION, LE MARKETING ET LA RECHERCHE ET LE DÉVELOPPEMENT. SI POUR UNE RAISON OU POUR UNE AUTRE, LA RESPONSABILITÉ DANS UN OU PLUSIEURS DE CES DOMAINES LEUR ÉCHAPPE, LE SYSTÈME N'EST PLUS VIABLE »

Ces propos doivent à notre sens être nuancés. En effet, même s'il ne semble pas possible d'atteindre le niveau de décentralisation « optimal » au sens de Dearden dans des entreprises comme Westdeutsches Erdgas, une forme de décentralisation peut être envisagée avec profit.

En effet, Westdeutsches Erdgas est une « **entreprise de réseaux** » mais également une « **entreprise en réseaux** ». Comme nous allons le montrer dans les lignes qui suivent, ces deux particularités font qu'une forte interdépendance et une forme de centralisation sont susceptibles de subsister lors du glissement d'une culture administrative vers une culture de gestion.

Les entreprises en réseaux sont une forme d'organisation visant à développer des avantages en termes de coûts et de stratégies par la recherche de coopération ou d'alliances.

Les entreprises de réseaux peuvent être définies de différentes façons. Retenons ici celle proposée par CURIEN (1992). Une entreprise de réseau est caractérisée par l'existence de trois structures d'activités stratifiées :

- en amont, les infrastructures avec des investissements et des coûts fixes importants qui se traduisent par des économies d'échelle et des économies d'envergure ;
- au centre, des services de coordination et de contrôle ayant pour objet d'optimiser les infrastructures ;
- en aval, les services « finals » d'utilisation destinés à répondre aux besoins de la clientèle.

Ces entreprises en réseaux se caractérisent par :

- de fortes indivisibilités à la fois techniques et organisationnelles ;
- des externalités de production et de consommation qui peuvent être négatives ou positives. À titre d'illustration d'externalité positive de consommation, on voit apparaître des effets de club lorsqu'un grand nombre d'usagers utilise un réseau augmentant ainsi la valeur de la connexion.

On comprend à la lecture de ces quelques lignes que « l'acquisition » des divers avantages de la firme multidivisionnelle n'est pas chose facile dans une entreprise comme Westdeutsches Erdgas: l'interdépendance entre divisions et les externalités diverses sont autant d'obstacles qu'il va falloir surmonter pour parvenir à une organisation multidimensionnelle optimale. La fixation des prix de transfert devra cependant tenir compte des spécificités de l'entreprise.

2.2 - Objectifs des prix de transfert en matière d'organisation

Les prix de transfert sont considérés dans la littérature comme un outil de gestion de la décentralisation. La littérature attribue aux prix de transfert trois objectifs, parfois contradictoires :

- l'allocation des ressources : coordonner les décisions des divisions afin d'atteindre les buts de l'organisation (on peut parler de congruence) ;
- la mesure de la performance et la motivation ;
- l'aide à la décision en matière de tarification et d'investissement.

Ces objectifs naissent naturellement de la forme décentralisée de l'organisation dont le processus repose sur la délégation de l'autorité, l'allocation des ressources et la mesure de la performance.

La délégation de l'autorité n'est pas un phénomène organisationnel récent. Déjà en 1953 dans *The Company Organisation Structure*, on pouvait lire: *"A REDUCTION IN SIZE OF THE DECISION MAKING UNIT INTO SEVERAL UNITS, BY SPLITTING AN EXISTING LARGE UNIT INTO SEVERAL UNITS, EACH SMALL, AND DELEGATING TO EACH DECISION-MAKING POWER, MAY BRING ABOUT CONSIDERABLE INCREASES IN EFFICIENCY"*. L'allocation des ressources peut être considérée comme un second objectif de la décentralisation. La constitution de centres de coût et de profit permet à la direction générale de maîtriser de façon beaucoup plus efficace les différents segments de l'entreprise. Enfin, la délégation de l'autorité implique la mesure de la performance. Cette mesure de la performance permet de déterminer quelle est la contribution de chacune des unités au profit global de l'entreprise.

Revenons plus en détail sur chacun des objectifs assignés aux prix de transfert.

2.2.1 - Prix de transfert : outil d'allocation des ressources

Les objectifs de l'entreprise et des responsables de division peuvent parfois être incompatibles. Par conséquent, le problème de l'entreprise est de déterminer la politique de prix de transfert qui permette d'atteindre son objectif de maximisation du profit en tenant compte des objectifs des responsables de division. Dans un cadre d'information parfaite, la firme peut fixer «aisément» les prix de transfert optimaux.

La question de l'allocation optimale des ressources peut être abordée à l'aide d'un modèle microéconomique relativement simple. Nous reprenons ici un modèle disponible dans de nombreux ouvrages de microéconomie avancée.

La théorie microéconomique permet de déterminer la solution optimale en matière de fixation du prix de transfert entre les deux divisions. Nous supposons ici qu'un certain degré de différenciation du produit permet à l'entreprise de choisir le prix du produit final qui maximise son profit. Il y a deux situations possibles:

- la première situation sert de référence. C'est le cas où une seule entreprise fabrique le produit puis le distribue. Il n'y a donc qu'une seule fonction de coût total, même si la fabrication et la distribution du produit, en tant que fonctions distinctes, sont réalisées par deux divisions différentes. Le produit fabriqué est alors vendu sur le marché au prix p qui est choisi en fonction de la demande et des coûts, de façon à maximiser le profit.

- la seconde situation est celle où l'entreprise est structurée en deux divisions : la division production (désignée par « A ») fabrique le produit et la division distribution (désignée par « B ») le vend. Il y a alors deux fonctions de coût et la division A doit vendre le produit qu'elle fabrique à la division B, à un prix p_T (le prix de transfert). La division B vendra alors le produit final sur le marché au prix p.

La fonction de demande pour le produit final est la même dans les deux situations. Nous allons comparer ces deux cas afin de montrer que lorsque l'entreprise est structurée en division, **la maximisation du profit (et donc l'efficience économique) implique que le prix de transfert soit égal au coût marginal de la division A.**

2.2.1.1 - MAXIMISATION DU PROFIT EN L'ABSENCE DE FILIALE

Lorsqu'il n'y a qu'une seule entreprise, nous supposerons que sa fonction de coût total est donnée par :

$$CT = 312\,500 + 25Q + 0{,}0015Q^2$$

où Q représente sa production.

La fonction de demande qui s'adresse à l'entreprise est de la forme :

$$p = 100 - 0{,}001Q$$

Où p représente le prix du produit final. Le profit est maximum lorsque la recette marginale est égale au coût marginal, ce qui implique un prix et une quantité optimales données par $p^* = 85$ euros et $Q^* = 15\,000$ unités. Le profit est alors égal à 250 000. Le graphique ci-dessous illustre la maximisation du profit de l'entreprise en l'absence de structuration en filiales.

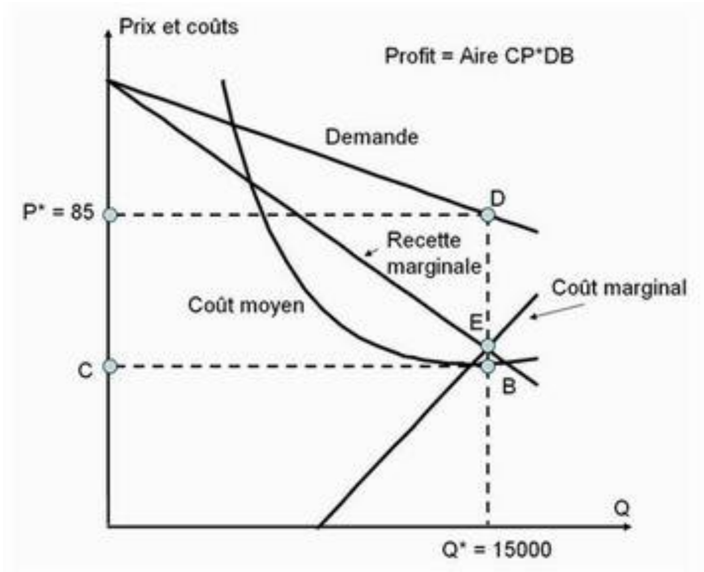


FIGURE 1. MAXIMISATION DU PROFIT DE L'ENTREPRISE EN L'ABSENCE DE STRUCTURATION EN FILIALES

En l'absence de structuration en filiales, le prix et la quantité qui garantissent l'efficience et maximisent le profit sont déterminés par l'égalisation de la recette marginale et du coût marginal au point E. Le profit est égal à l'aire CPDB. Il est maximum, c'est-à-dire qu'aucune autre combinaison prix/quantité ne permet d'obtenir un profit supérieur. L'allocation des ressources est optimale et l'efficience est réalisée.

Cette situation va servir de « benchmark » pour déterminer l'allocation optimale des ressources lorsque la production est structurée en deux filiales.

2.2.1.2 - DETERMINATION DU PRIX DE TRANSFERT AVEC DEUX DIVISIONS

S'il y a deux divisions verticalement intégrées A et B, les fonctions de coût sont respectivement :

$$CT_A = 250\,000 + 20Q + 0{,}001Q^2$$

$$CT_B = 62\,500 + 5Q + 0{,}0005Q^2$$

$CT = CT_A + CT_B$. En effet, nous supposons que la réduction de coût liée à la structuration en filiales est nulle. Ceci nous permet d'éviter qu'une réduction du profit liée à une fixation inefficiente du prix de transfert ne soit masquée par une augmentation de profit liée à l'économie de coût normalement permise par la structuration en filiales.

La structuration en division implique que chacune de ces divisions maximise son profit. Elles vont donc égaliser recette marginale et coût marginal. Le comportement de la division A doit être parfaitement concurrentiel. Sans entrer dans le détail des calculs, Lorsque $Q = 15\,000$, $C_{m_A} = 50$, ce qui implique un prix de transfert optimal de 50. La partie gauche de la figure suivante illustre la maximisation du profit de la division A. Le point E_A correspond à l'intersection de la recette marginale et du coût marginal de A. Ce point détermine une production Q égale à 15000. Le prix de transfert est alors égal à 50. À ce point, le coût moyen est égal à 51,66. Il est donc supérieur au coût marginal, qui est aussi le prix de transfert. La division A est donc déficitaire d'un montant global égal à $(51{,}66 - 50) \times 15\,000$, soit environ 25 000 euros.

La division B prend livraison des 15 000 unités qu'elle paie chacune 50 euros. À partir de la fonction de demande globale, le prix de vente sur le marché est égal à 85 euros. Le profit de la division B est alors:

$$\Pi_B = (p - p_T - 16{,}66) \times 15\,000 = 275\,000$$

La partie droite de la figure suivante illustre la maximisation du profit de la division B.

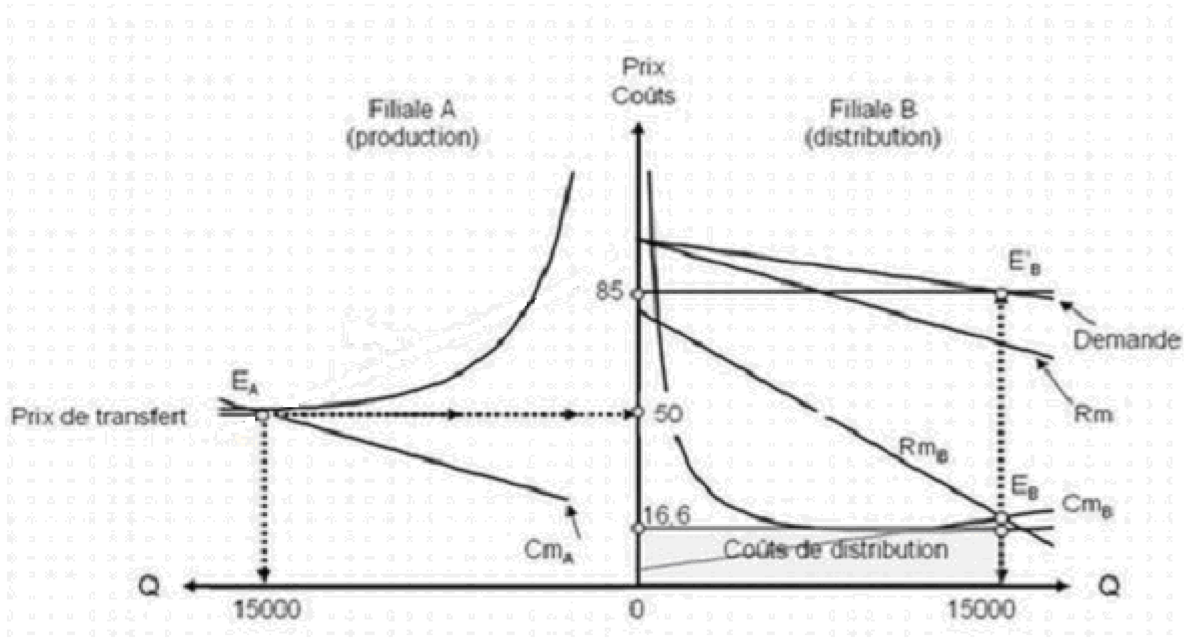


FIGURE 2. MAXIMISATION DU PROFIT LORSQUE L'ACTIVITÉ EST STRUCTURÉE EN FILIALES

Le profit consolidé de l'entreprise est égal au profit de la division B, moins la perte de la division A, soit 250 000 euros, la même somme que dans le cas d'une entreprise qui ne structure pas son activité en filiales.

En résumé, nous avons montré que lorsqu'une entreprise structure son activité en filiales séquentielles, la filiale de production doit vendre à son coût marginal, qui lui dépend de la quantité à produire. Le prix de transfert est alors égal au coût marginal associé à ce niveau de production. Ceci garantit que, toutes choses égales par ailleurs, le niveau de profit lié à la structuration en filiales est égal au niveau de profit obtenu avant la structuration en filiale.

2.2.1.3 - REDUCTION DES COUTS LIEE A LA STRUCTURATION EN FILIALES

Pour être complet, il reste à intégrer la réduction de coût dont bénéficie la division de production, du fait par exemple d'une meilleure localisation. Dans ce modèle simplifié, on ne peut le faire que de façon exogène, en supposant que la fonction de coût moyen de la division A est déplacée vers le bas, conformément au schéma de la figure 3 (on suppose que le coût de la division B reste inchangé).

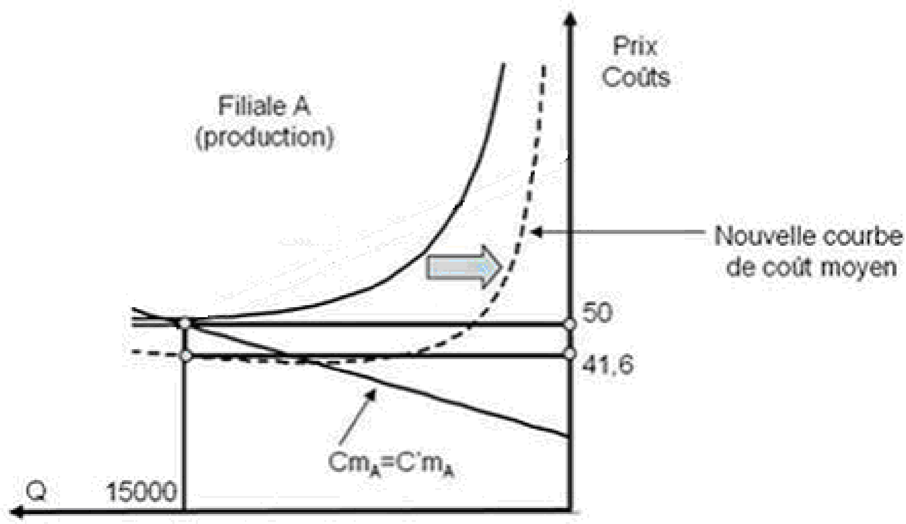


FIGURE 3. LA PRISE EN COMPTE SIMPLIFIÉE DE LA RÉDUCTION DE COÛT

La courbe en pointillé est la courbe de coût moyen dérivée de la fonction de coût total ayant pour équation :

$$CT'_A = 100\,000 + 20Q + 0{,}001Q^2$$

On suppose donc que la localisation de la production dans une filiale a réduit le coût fixe de production de 150 000 euros.

La réduction du coût fixe ne modifie pas le coût marginal de A. Par conséquent, le prix de transfert est inchangé. La seule différence est que maintenant le profit de A est positif. Il est égal à$(50 - 41{,}66) \times 15\,000$, soit 250 000 euros. On a ainsi un profit consolidé de groupe égal à 525 000 euros contre 250 000 euros seulement quand l'entreprise n'est pas structurée en filiales. La division A vend au coût marginal mais réalise un profit plus élevé.

2.2.1.4 - MANIPULATION DU PRIX DE TRANSFERT : CONSEQUENCES SUR L'EFFICIENCE

Montrons que si le prix de transfert n'est pas égal au coût marginal de la division amont, il s'ensuit une modification de sa décision de production et donc du profit du groupe. Le profit consolidé va baisser, car le seul niveau de production qui garantit un profit maximum est $Q^* = 15\,000$. Or pour produire cette quantité, la filiale doit recevoir le « bon signal », à savoir un prix de transfert égal à 50. Si le signal est « manipulé », « faussé », la filiale produira une quantité différente et le profit ne sera plus maximum.

Supposons que l'entreprise augmente le prix de transfert de 50 à 60, la division A va changer sa décision de production et fabriquer davantage d'unités. En effet, si le prix de transfert augmente de 10, cela agit comme une subvention pour la filiale A, dont la recette marginale R_{m_A}se déplace vers le haut (voir la figure 4).

Le nouveau point d'intersection avec la courbe de coût marginal (point E_2) a lieu plus à gauche que dans le cas précédent (nous prenons désormais la nouvelle courbe de coût moyen de la figure 3 comme benchmark, car elle incorpore une réduction de coût liée à la localisation).

Le problème de maximisation du profit de la division A consiste à déterminer Q^* tel que le prix de transfert est égal à son coût marginal. Le nouveau niveau de production est donné par $Q^* = 20\,000$, ce qui correspond au point E_2 sur la figure 4. On remarque que le coût moyen de production est légèrement plus élevé pour produire 20000 unités que pour en produire 15000. Il s'ensuit une augmentation du coût total de A. Toutefois, cette augmentation du coût total est largement compensée par l'augmentation de la recette de A. En définitive, l'objectif de relèvement du prix de transfert a bien eu pour conséquence d'augmenter substantiellement le profit de la division A.

Cependant, la division B doit alors vendre 20000 unités au lieu de 15000 unités et payer un prix de transfert égal à 60 euros, au lieu de 50. Pour écouler 20000 unités, la division B doit réduire le prix de vente à 80. Sa recette totale est alors modifiée. Elle est désormais égale à $20\,000 \times 80 = 1\,600\,000$ au lieu de $15\,000 \times 85 = 1\,275\,000$, soit une augmentation de 325 000 euros.

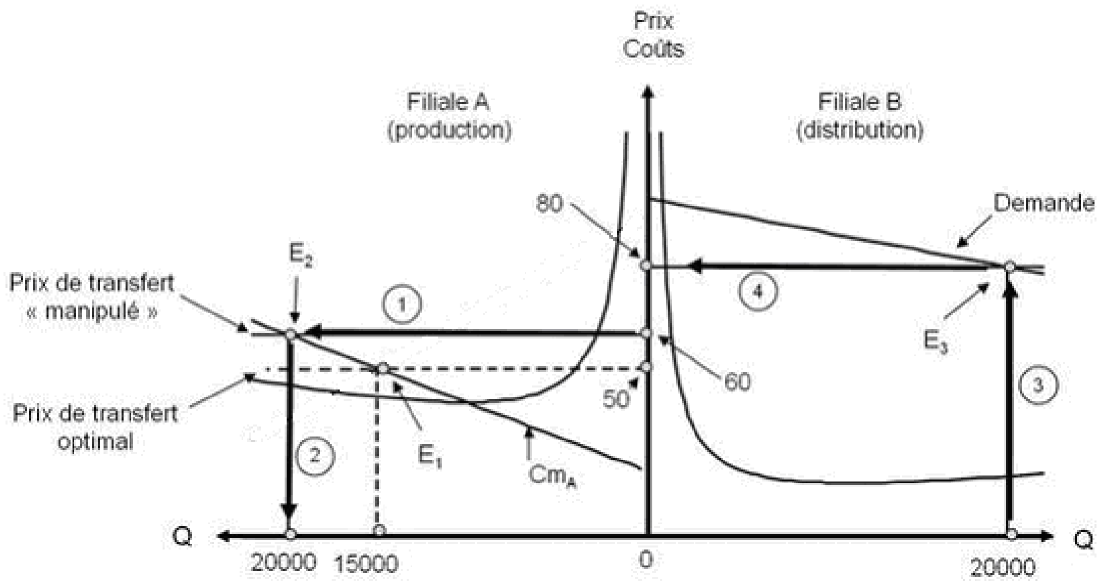


FIGURE 4. FIXATION D'UN PRIX DE TRANSFERT NON COMPATIBLE AVEC L'ALLOCATION EFFICIENTE DE RESSOURCES

Tout semble aller dans le bon sens, mais c'est au niveau des coûts que les problèmes surviennent. En effet, le coût total de la division B augmente doublement : d'abord parce qu'il faut distribuer 20 000 unités au lieu de 15 000 ; d'où une augmentation du coût moyen de distribution de 16,66 euros à 18,12 euros, ce qui représente une augmentation du coût total de distribution de 112 500 euros. De plus, l'entreprise doit payer 10 euros de plus par unité à la division A, ce qui représente une augmentation de coût égale à 450 000 euros.

En définitive, la recette totale de B a augmenté de 325 000 euros, mais ses coûts ont augmenté davantage : 450 000 + 112 500 = 562 500 euros. Le profit total de la division B a donc baissé. Cette baisse est supérieure à l'augmentation du profit de A (175 000 euros). La différence correspond à la diminution du profit consolidé du groupe.

On a ainsi montré comment le fait d'avoir agi sur le prix interne d'une transaction entre les divisions a faussé l'allocation optimale des ressources, entraîné une surproduction et finalement généré une baisse du profit du groupe. Bien entendu le problème est en réalité éminemment plus complexe que celui exposé dans le modèle : l'information n'est pas parfaite dans la réalité et l'entreprise va avoir du mal à obtenir des informations fiables lui permettant de fixer le prix de transfert au niveau du coût marginal. D'autres problèmes peuvent survenir.

2.2.2 - Prix de transfert : outil de mesure de la performance et de motivation

En matière de contrôle de la performance, l'utilisation de pseudo-centres de profit pose un problème de « contrôle ». En effet, l'incertitude de l'environnement conduit à obtenir des résultats qui ne dépendent pas uniquement du comportement et des décisions d'une division.

Le principe de contrôlabilité énonce que l'évaluation de la performance d'une division ne doit pas intégrer d'élément hors de son contrôle (CHOUDHURY (1986), MERCHANT (1987), SALOMONS (1965)). Les raisons qui justifient la validité de ce principe sont doubles : d'une part, si les indicateurs de performance sont influencés par des évènements incontrôlables, ils n'indiquent pas aussi bien si les actions de la division ont été bonnes ; d'autre part, tenir les divisions responsables d'éléments qu'elles ne contrôlent pas peut conduire à des comportements dysfonctionnels.

L'idée qui consiste à exclure de l'évaluation de la performance les résultats qui ne dépendent pas du « comportement » de la division est cependant non seulement très complexe étant donné la difficulté voire l'impossibilité d'identifier la part des résultats qui ne dépendent pas du « comportement » de la division, mais aussi nuancée par les recherches menées dans le cadre de la théorie de l'agence. En effet, en situation de risque moral, c'est-à-dire quand l'effort de la division n'est pas parfaitement observable, l'évaluation de cette dernière doit être fondée sur les résultats et par conséquent intégrer une part de risque (SHAVELL (1979)) et intégrer des éléments hors contrôle afin de permettre une forme de divulgation de l'information (ANTLE ET DEMSKI (1988); voir aussi LAFFONT ET MARTIMORT (2002)).

Dans les cas les plus fréquents où il n'est pas possible de séparer de manière évidente et claire les divisions, les dysfonctionnements liés à une méthodologie de fixation de prix de transfert inadéquate seront nombreux : manipulation d'information, transfert d'inefficiences d'une division à l'autre, conflit d'objectif ou encore prise de décisions sous-optimales. Afin de contrer au maximum la portée de ces inefficiences, de nombreuses méthodes ont été développées dans la littérature. Les plus importantes d'entre-elles font l'objet de développement dans la suite de ce rapport. Notons d'ores et déjà que la solution simple et universelle n'existe pas: la forme organisationnelle de la firme et le type de bien transféré jouent un rôle capital dans la détermination de la politique de prix de transfert optimale. En définitive, les prix de transfert doivent être cohérents avec le système d'information et de gestion de l'organisation.

Le problème de la performance et de la motivation est éminemment plus complexe lorsqu'il y a asymétrie d'information, c'est-à-dire lorsqu'une partie de l'information est privée. Les responsables de division vont avoir tendance à dissimuler de l'information dans le but de manipuler les résultats sur lesquels ils seront jugés in fine. L'entreprise soucieuse de maximiser ses profits devra par conséquent s'assurer que les phénomènes d'anti-sélection et d'aléa moral sont encadrés par des mécanismes adaptés. Quelques-uns de ces mécanismes seront traités dans la section 3.

2.2.3 - Prix de transfert : outil d'aide à la décision

Les prix de transfert sont enfin un précieux outil d'aide à la décision au sein des entreprises multidivisionnelle. Nous n'entrerons pas ici dans le détail, mais on comprend qu'il sera par exemple très complexe pour la firme de fixer un prix de marché si elle dispose de prix de transfert biaisés par des doubles marges. Il lui sera également difficile de déterminer quels investissements réaliser. Une division vendant à des prix de transfert surévalués peut paraître particulièrement rentable alors qu'en définitive son activité devrait peut-être être externalisée.

2.3 Prix de transfert: partage des coûts

Les règles de partage des coûts communs et des bénéfices à la coopération sont également des composantes essentielles des politiques de fixation des prix de transfert. Bien que leur analyse scientifique explicite soit déjà relativement avancée, leur application au sein des organisations (entreprises, alliances ou réseaux d'entreprises, gouvernements) reste relativement embryonnaire et souvent tributaire d'une approche historique ad hoc, plutôt que rationnellement choisie pour maximiser la performance et la valeur de l'organisation.

Il faut reconnaître que l'analyse des règles de partage des coûts communs exige une certaine dose de mathématiques. Il est important, par ailleurs, de préciser que ces mathématiques ne servent qu'à traduire, dans un langage rigoureux et programmable, les contraintes institutionnelles et les objectifs que doit satisfaire ou rencontrer la règle de partage recherchée.

L'analyse rigoureuse des règles de partage des coûts et la diversité de ces règles montrent qu'il n'y a pas une règle universellement appropriée, qui pourrait être applicable dans toute situation. Le choix d'une méthode de partage de coûts en particulier devrait se faire en fonction de l'ensemble des propriétés qu'elle satisfait. Ces propriétés sont la représentation formelle et rigoureuse de principes (équité, efficacité, cohérence) et de caractéristiques souhaitables (traitement égalitaire des égaux, invariance aux changements d'échelle, etc.).

6:3 - L'INTÉGRATION DES RISQUES

La section 2 nous a permis de démontrer que les prix de transfert peuvent être des facteurs puissants pour optimiser la valeur globale d'une firme par la coordination de ses divisions dans un contexte de certitude. Comme la plupart des entreprises évoluent dans des marchés incertains, il est maintenant approprié de discuter de l'intégration du risque dans les prix de cession interne entre les divisions et de la façon dont la gestion des risques devrait être prise en compte par la firme.

Il est très important de prendre en considération les différents risques qui sont associés aux différentes composantes de la firme et de ses divisions. Toutes les entreprises et tous les dirigeants prennent des risques de différents niveaux; ces risques doivent rapporter un certain rendement qui vient compenser pour cette exposition au risque.

Afin de bien cerner le problème de l'intégration des risques, il est nécessaire de comprendre la gestion des risques et l'attitude des dirigeants face aux risques. Ce point est abordé dans la sous-section suivante. Nous présentons ensuite dans la sous-section 3.2 une des techniques les plus utilisées sur le marché pour calculer la valeur du risque ainsi que le partage des risques entre les divisions. La sous-section 3.3 est consacrée à l'intégration du risque dans les prix de transfert et aux incitations à la performance des divisions.

3.1 - La gestion des risques

Pour une allocation optimale des ressources pour l'ensemble de la firme, il faut que les intérêts de chacune des divisions soient alignés avec les intérêts de l'ensemble de la firme. C'est pourquoi il est important d'établir des contrats qui incitent les divisions à agir de la sorte et ainsi tendre vers une maximisation de la valeur globale de la firme. Les risques peuvent être distribués entre les divisions pour permettre à la firme de maximiser son profit, mais également pour permettre de pénaliser les divisions advenant un état défavorable de la nature et de pouvoir distribuer les coûts de façon à ce que le rendement de la division n'en soit trop affecté. Sinon, les divisions qui n'assument aucun risque pourraient être avantagées par rapport aux autres qui n'ont pas le choix que d'assumer un certain niveau de risque.

3.1.1 - L'attitude des dirigeants face aux risques

Lors de l'élaboration des contrats des dirigeants (et des employés), il est important de tenir compte des risques auxquels leur division est ou pourrait être exposée. Il pourrait être avantageux pour un dirigeant de choisir des investissements risqués et ainsi bénéficier significativement de la réalisation de revenus très élevée advenant un état favorable de la nature, sans pour autant avoir à subir les pertes significatives qui seraient prises en charge par l'entreprise advenant un état défavorable de la nature. La firme doit tenir compte de ce problème et envoyer le «bon signal» à ses divisions et ses dirigeants en façonnant leurs incitations. Il est important que les risques encourus par une division soient sous la responsabilité de cette division et que chacune d'elles soit imputable de ses décisions et choix.

C'est pourquoi il est de mise de bien cerner les risques, savoir les calculer pour inciter les divisions à maximiser le profit de l'ensemble de la firme tout en intégrant les risques qui y sont associés. Les dirigeants ont des degrés d'aversion pour le risque différents ; dès lors, leurs comportements et leurs actions seront différents dans la gestion de leur division. Il est donc important pour la firme de déterminer des contrats qui alignent les objectifs des dirigeants et de leur division avec ceux de l'ensemble de la firme.

On comprend que la gestion des risques visant à maximiser la performance de la firme n'est pas une tâche simple, mais elle est somme toute réalisable. Il faut que la firme et ses divisions prennent le temps de bien évaluer leurs objectifs et les risques qui y sont associés pour parvenir à une organisation multidivisonnelle optimale.

3.2 - La mesure du risque

Pour bien cerner le problème d'intégration des risques, il faut savoir comment le calculer. Dans cette sous-section, il sera question d'une des méthodes d'évaluation de risques les plus utilisées sur le marché, soit le CAPM (Capital Assets Pricing Model), ainsi qu'une brève description de la VaR (Value at Risk). Ensuite, le problème de partage de risques entre les divisions sera abordé.

3.2.1 - Capital Assets Pricing Model (CAPM)

Le modèle d'évaluation des actifs financiers (MÉDAF), mieux connu sous son appellation anglophone Capital Assets Pricing Model (CAPM), est très utilisé dans le domaine de la finance pour déterminer la valeur d'un actif. Développé dans les années 1960 par trois chercheurs, dont le Nobélisé William Sharpe, il permet de déterminer la valeur d'un investissement en déterminant le taux d'actualisation qui doit être utilisé pour évaluer un actif, un projet, une division, etc.

3.2.1.1 - MOTIVATION ET COORDINATION

Le CAPM est l'un des modèles les plus utilisés sur les marchés financiers pour calculer le rendement sur l'investissement et le risque associé à un actif ou une entreprise. Les investisseurs sont prêts à accepter un risque supplémentaire en échange d'une compensation financière supplémentaire, et c'est ce que le CAPM permet de déterminer. Le principe du CAPM est simple, il permet de calculer la prime de risque relative à un investissement risqué en utilisant une méthode simple et relativement facile à utiliser. Ce qui permet ensuite de déterminer si un actif rapporte un rendement suffisant par rapport au risque qu'il contient.

3.2.1.2 - RISQUE SYSTEMATIQUE ET RISQUE SPECIFIQUE : LE CAPM

Il faut noter que le risque ne peut être complètement éliminé par la diversification et qu'il subsistera toujours un risque qu'on appelle le **risque systématique** (risque non diversifiable), risque associé aux événements ayant un impact sur l'économie et qui ne peut être diversifié car affectant à des degrés divers l'ensemble des actifs (ex : guerre, catastrophe naturelle, etc.). En ce qui concerne le **risque spécifique** ou diversifiable, il représente un risque qui est imputable à l'actif en question et chaque actif comporte un risque spécifique. Il n'est aucunement corrélé avec le risque systématique du marché, et c'est pourquoi il ne demande pas de compensation financière vu que son élimination peut être réalisée par la diversification et donc sans coût véritable ou significatif. En diversifiant son portefeuille, il est possible d'éliminer, ou à tout de moins le diminuer considérablement le risque spécifique mais il est impossible d'éliminer le risque systématique.

Une fois le taux de rendement exigé de l'actif calculé, nous pouvons déterminer la valeur présente et ainsi le prix ou la valeur de l'actif. Si le prix observé de l'actif est supérieur au prix calculé en utilisant le CAPM, on peut présumer que l'actif en question est surévalué, et à l'opposé, l'actif est sous-évalué advenant que le prix de l'actif soit inférieur au prix calculé en utilisant le CAPM.

Le rendement à exiger d'un investissement est, selon le CAPM, déterminé suivant l'équation suivante :

$$\underbrace{E[R_i]}_{Taux\ de\ rendement\ exigé} = \underbrace{R_f}_{Taux\ sans\ risque} + \underbrace{\beta_i\left(E[R_m] - R_f\right)}_{Prime\ de\ risque}$$

où

$E[R_i] = Taux\ de\ rendement\ exigé\ de\ l'actif i$

$R_f = Taux\ de\ rendement\ sans\ risque$

$E[R_m] = Taux\ de\ rendement\ anticipé\ du\ marché$

$\beta_i = Niveau\ de\ risque\ systénatique\ de\ l'actif i$

$E[R_m] - R_f = Prime\ de\ risque\ par\ unité\ de\ risque\ mesuré\ par\ le\ \beta_i$

Le bêta de l'actif représente la covariance entre le rendement de l'actif et le rendement du portefeuille de marché, divisée par sa variance :

$$\beta_i = \frac{Covariance(R_i, R_m)}{Variance(R_m)}$$

Ces valeurs sont souvent estimées à partir de données historiques ou de données simulées à partir d'un modèle mathématique (processus stochastique) ou économétrique de prévision des cash-flows ; par exemple, on peut utiliser pour le rendement et la volatilité du portefeuille de marché des données historiques sur un indice boursier majeur. Advenant un taux de rendement exigé inférieur au taux anticipé ou observé, les investisseurs ne seront pas enclins à investir dans cet actif et se tourneront vers une autre alternative.

Chaque entreprise, chaque projet, chaque actif possèdent un bêta. Le taux de rendement d'un projet est ainsi obtenu à partir du taux de rendement sans risque plus une prime de risque relative au projet. Ce qui nous permet de déterminer la valeur actualisée des flux monétaires espérés en tenant compte du risque et ainsi déterminer le rendement nécessaire à l'intérieur d'une division.

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, le taux de rendement d'un actif ne doit pas être calculé par rapport à sa variance. Cela ne dépend pas simplement de sa variance, mais bien de sa relation avec celle du marché (covariance). Ce serait une erreur que de calculer les rendements exigés sans tenir compte du marché ; il serait dans ce cas logique de présumer qu'en agissant de la sorte, deux investissements ayant la même variance ou volatilité donneraient l'impression d'avoir le même risque, et par conséquent, commanderait le même rendement, ce qui n'est pas le cas.

Comme chaque division peut avoir des composantes comportant des risques différents, il est possible d'obtenir le bêta pour chacune de ses composantes, pour ensuite obtenir le bêta de la division en prenant la somme pondérée des bêtas des différentes composantes. Cette méthode est inspirée de la finance où le bêta d'un portefeuille est égal à la somme pondérée des bêtas des actifs composant le portefeuille considéré. Une division peut être composée de différents projets comportant des risques différents. Dès lors, il est important de bien en cerner la valeur en actualisant chacun des flux monétaires à un taux correspondant au niveau de risque de la composante en question[12].

La droite des marchés des capitaux (figure 5 ci-dessous) indique que tous les actifs et portefeuilles doivent satisfaire une relation linéaire entre la quantité de risque qu'ils représentent et le taux de rendement exigé par le marché pour ce niveau de risque.

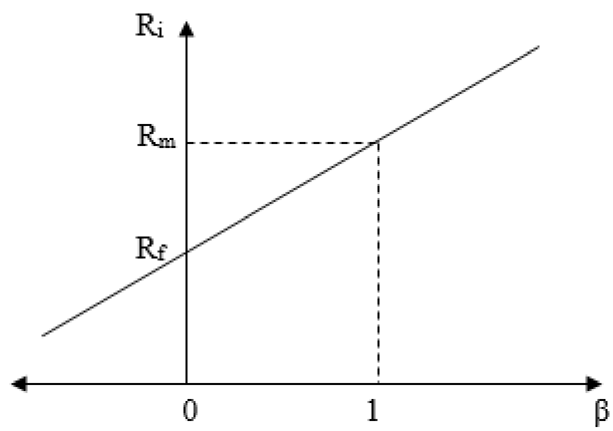


FIGURE 5. LA DROITE DES MARCHÉS DE CAPITAUX

3.2.2 - Value at Risk (VaR)

Les professionnels œuvrant dans le milieu financier utilisent souvent des indicateurs de risque qui reflète le niveau possible de perte advenant un scénario négatif extrême. La valeur à risque (VaR) est une mesure qui permet de déterminer la perte potentielle dans un très mauvais scénario dans un intervalle de temps donné pour un intervalle de confiance donné. Il faut noter que la VaR ne donne pas une estimation certaine mais bien une estimation probabiliste. Il y a trois composantes à la VaR : le temps, l'intervalle de confiance et le montant de perte qui est exprimé en valeur ou en pourcentage. Les trois méthodes les plus utilisées pour calculer la VaR sont : la méthode historique, la méthode variance-covariance et la méthode Monte Carlo.

La méthode historique se base essentiellement sur les données passées caractérisant l'actif qu'on veut évaluer suffisamment complète pour que l'on puisse obtenir une distribution et une fréquence raisonnable pour ensuite calculer la probabilité qu'un scénario extrême se produise. La méthode variance-covariance est, quant à elle, la plus simple à utiliser. Elle est basée sur l'hypothèse que le rendement de l'actif suit une distribution normale ; ainsi, seulement deux facteurs doivent être estimés : son espérance et sa variance. Bien que simple, cette méthode peut être contraignante dû au fait qu'elle présume que l'histoire se répète, ce qui n'est pas réaliste dans certains cas. Enfin, la méthode Monte Carlo, plus complexe que les précédentes, consiste essentiellement en plusieurs simulations de scénarios futurs possibles en se basant possiblement sur des scénarios historiques et sur l'information implicite au sein de l'entreprise, pour ensuite arriver à une certaine distribution et ainsi déterminer la probabilité d'un scénario extrême. Concrètement, une entreprise peut avoir une VaR égale à 10000 € à 99% de niveau de confiance, c'est-à-dire, l'entreprise à une chance sur cent de subir une perte de plus de 10000€. La VaR permet de donner une

[12] Voir BOYER M., GRAVEL É. (2006), "Évaluation de projets : La valeur actualisée nette optimisée (VAN-O)", Assurances et gestion des risques, 74(2), juillet 2006, 163-185.

mesure de l'exposition au risque extrême auquel l'entreprise fait face et donc la probabilité qu'une perte supérieure se produise, dans un intervalle de temps donné.

Toutefois, il faut être prudent dans l'utilisation de cette méthode d'évaluation. Les contraintes de *cash-flow at risk* n'ont pas nécessairement d'impact sur la valeur de l'entreprise lorsque les opérations de gestion de risque financier peuvent être effectuées à coût nul ou négligeable. L'entreprise doit tenter de maximiser son espérance de profit en tenant compte du risque et de ses contraintes de possibilités de production. Ensuite, elle diminuera son niveau de risque en effectuant des transactions financières telles des swaps, options d'achat, options de vente, etc. Les marchés financiers sont développés à tel point qu'il est possible d'utiliser ses outils très efficaces pour diminuer le risque à coût presque nul[13].

3.2.3 - Partage des risques entre divisions et niveaux de risques

La valeur de l'ensemble de la firme représente la somme de la valeur de chacune de ses divisions, qui elles-mêmes représentent la somme de la valeur de chacune de leurs composantes. Il est donc possible de déterminer la valeur de chacune des divisions par rapport à son niveau de risque. Le niveau de risque d'une division interviendra dans le système de prix de transfert entre les divisions. Il faut toutefois demeurer prudent lors de l'évaluation et des prises de décisions puisqu'il y a souvent une synergie entre les divisions qui fait en sorte qu'il n'est pas possible de prendre des orientations stratégiques comme si la firme et ses divisions évoluaient dans un marché en parfaite concurrence. Dès lors, la firme se doit de bien évaluer chacune de ses divisions, en tenant compte des niveaux de risque et des rendements qu'elles génèrent par rapport à ces niveaux de risque.

La firme se doit de bien évaluer et déterminer sa structure divisionnelle. Il faut définir les champs d'opération (domaines et ampleurs ; échelle et envergure) des différentes divisions avec l'objectif de minimiser les effets de synergie interdivisionels. Advenant que deux divisions aient un niveau de synergie trop important, elles devraient être fusionnées pour donner plus de flexibilité et d'indépendance.

3.2.3.1 - PARTAGE EFFICACE DES RISQUES ENTRE LES DIVISIONS

Tout comme un investisseur ne tient pas compte du risque de chacun des actifs de son portefeuille individuellement, mais bien de l'ensemble des risques des actifs que constituent son portefeuille pour ainsi diminuer la variabilité globale de ce dernier, les niveaux de risque de l'ensemble de la firme doivent influencer les décisions de chacune des divisions. Ainsi, en évaluant le risque de chacune des divisions, cela permet de déterminer le prix de chacun des produits transigés en tenant compte du risque inhérent à chacun et ainsi avoir une représentation crédible de la réalité.

Pour une firme multidivisionnelle comme Westdeutsches Erdgas, il est possible de diversifier ses risques à travers ses divisions, ce qui lui permet de réduire ses coûts financiers d'investissement tout en encourageant les dirigeants de divisions à adopter un comportement efficace. Le niveau de risque acceptable dépend du bêta de la division en question. Tel que mentionné précédemment, il faut que le rendement sur le capital soit conséquent avec le niveau de risque encouru; dans le cas contraire, posséder cet actif ou cette division pourrait être injustifié.

Il est possible de partager le risque entre les divisions par l'établissement de contrats. Par exemple, deux divisions pourraient s'entendre sur le partage des coûts de la prise de risques reliés à certains produits. Ils peuvent s'entendre sur un contrat de partage de risque préétabli stipulant un pourcentage de profits à transférer entre les deux divisions et/ou un montant fixe qui serait indépendant des profits réalisés. Ce pourcentage tiendrait compte des risques

[13] Voir BOYER, M., BOYER, M.M. AND GARCIA, R. (2005), "The value of real and financial risk management", Scientific Series, December 2005, 2005s-38. Accessible sur : https://www.cirano.qc.ca/files/publications/2005s-38.pdf

encourus et pourrait permettre une diversification des risques et ainsi optimiser la valeur de la firme en évitant qu'une division ne supporte tout le risque.

En fait, les divisions se transféreront les risques ou du moins les primes de risque. Pour maximiser la valeur de l'entreprise, elles devront ajuster leurs prix de cession interne pour y incorporer une prime de risque évaluée en utilisant un modèle comme le CAPM. Ainsi, il est possible de «partager» le risque entre les différentes divisions simplement en établissant le bon prix pour les échanges entre les divisions. Voyons comment y arriver.

3.2.3.2 - TAUX DE RENDEMENT SUR LE CAPITAL UTILISE

Le taux de rendement sur le capital utilisé, mieux connu sous sa dénomination anglaise ROCE (Return on Capital Employed), est une mesure comptable qui permet de déterminer un ratio tenant compte des profits et du capital investi. Le ROCE est mesuré pour chaque année de la vie du projet et est défini par la formule suivante :

$$ROCE = \frac{Profits\ d'opérations\ nets\ après\ impôt}{Capital\ utilisé}$$

Les profits d'opération nets après impôt représentent les profits après taxes tel qu'ils seraient calculés considérant un financement par capitaux propres. Dans le cas où la firme est financée partiellement par dette, il suffit d'ajuster le niveau de profits en ajoutant la valeur de la déduction fiscale pour intérêts payés. En ce qui concerne le capital utilisé, il représente la valeur aux livres des actifs utilisés.

Le ROCE nous donne un ratio qui peut être utilisé par les dirigeants comme mesure de performance en comparant celle-ci au coût du capital de la division ou de l'entreprise comme benchmark. Par exemple, lors de l'évaluation d'une division, si le ROCE est supérieur au coût du capital pendant la majorité des années, la valeur incrémentale du projet aura tendance à être positive.

Une des faiblesses de cette méthode d'évaluation est qu'elle peut avoir tendance à encourager les projets à court terme versus les projets à long terme. En effet, les dirigeants pourraient préférer opter pour plusieurs petits projets profitables à court terme au détriment de projets plus importants qui pourraient dégager une valeur incrémentale beaucoup plus importante, mais qui auraient un ROCE légèrement supérieur au coût du capital sur l'ensemble de la période d'évaluation. Par contre, le ROCE nous permettra de calculer la valeur économique ajoutée, qui représente une méthode plus précise permettant de déterminer la performance des divisions.

3.2.3.3 - VALEUR ECONOMIQUE AJOUTEE

La valeur économique ajoutée, mieux connue sous son vocable EVA (Economic Value Added), est une mesure comptable qui permet de déterminer un ratio mesurant la performance de la firme ou de la division. L'avantage de la valeur économique ajoutée, c'est qu'elle tient compte du coût d'opportunité du capital dans les calculs; en fait, elle calcule la valeur incrémentale d'une unité, soit un projet, une division ou une firme. Une unité est considérée comme performante seulement si elle offre un rendement sur l'investissement supérieur au meilleur rendement alternatif disponible.

Pour intégrer le coût d'opportunité du capital dans le calcul de la performance (EVA), on utilise la différence entre le ROCE et le coût du capital multipliée par le capital utilisé. La valeur économique ajoutée ainsi obtenue est calculée annuellement et prend la forme suivante :

$$EVA = [ROCE - Coût\ du\ capital] \times (Fonds\ employés)$$

En somme, EVA nous donne une mesure de performance basée sur le rendement de la firme en excédent de son coût d'opportunité du capital. Il est important de comprendre qu'une firme peut générer un flux de profit comptable positif tout en ayant une EVA négative; ceci est dû au fait que les profits ne sont pas assez élevés pour compenser le coût d'opportunité du capital. Le coût d'opportunité du capital est considéré comme étant un vrai coût, comme n'importe quel autre coût, et est donc déduit des revenus, ce qui donne un portrait plus complet et plus réaliste de la division. En fait, une division qui génère des profits positifs, mais qui n'arrive pas à couvrir son coût d'opportunité du capital devrait ou bien réorganiser ses opérations ou bien être abandonnée en faveur d'un recours aux marchés externes.

Comme la valeur économique ajoutée permet de calculer la performance de la firme et de ses divisions, plusieurs entreprises se basent sur cet outil de mesure pour déterminer les primes de leurs dirigeants divisionnaires. De cette façon, les intérêts de la firme et des dirigeants sont en quelque sorte alignés pour tendre vers une situation optimale. Les dirigeants seront ainsi fortement incités à prendre des décisions qui maximisent l'EVA et plus précisément la valeur actualisée de l'EVA; c'est pourquoi il est important de bien comprendre la façon dont elle est calculée et de pouvoir accepter ses limites.

Les firmes veulent rémunérer leurs dirigeants par rapport à la valeur incrémentale qu'ils apportent suite à leurs décisions, ce qui revient à la maximisation de la valeur présente nette ou valeur actualisée (VAN). Mais comme la VAN est égale à la valeur actualisée de l'EVA, alors, lorsque les dirigeants prennent des décisions en voulant maximiser l'EVA, ils tendent à maximiser par le fait même la valeur présente nette, et c'est ce qui explique l'alignement des incitations. Pour qu'il y ait cette égalité, trois hypothèses doivent être satisfaites :

- 1) Le dirigeant doit demeurer en poste jusqu'à la finalité du projet encouru.
- 2) Les capitaux doivent être complètement amortis à la fin de vie du projet.
- 3) La dépréciation utilisée pour déterminer les fonds utilisés doit être la dépréciation aux fins fiscales ou un ajustement doit être apporté pour les impôts différés.

Pour illustrer le principe d'égalité entre la VAN et EVA, nous allons prendre un exemple simple[14]. Nous supposons être en présence d'une division ou d'un projet financé à part entière par des capitaux propres qui nécessite un investissement de 100 M€, qui génère des revenus de 50 M€ et des dépenses de 10 M€ par année pour une période de 4 ans. L'amortissement est linéaire (25% par année), le taux d'imposition sur les revenus est de 40% et le coût du capital est de 10%. Ce qui nous permet de calculer les résultats dans le tableau suivant :

[14] SICK, GORDON. (2006). Capital Valuation.

Période	0	1	2	3	4
Investissement initial	100.00 M€				
Valeur aux livres		100.00 M€	75.00 M€	50.00 M€	25.00 M€
Revenus		50.00 M€	50.00 M€	50.00 M€	50.00 M€
Dépenses		10.00 M€	10.00 M€	10.00 M€	10.00 M€
Dépréciation		25.00 M€	25.00 M€	25.00 M€	25.00 M€
GAII* (EBIT)		15.00 M€	15.00 M€	15.00 M€	15.00 M€
Impôt		6.00 M€	6.00 M€	6.00 M€	6.00 M€
PONAI** (NOPAT)		9.00 M€	9.00 M€	9.00 M€	9.00 M€
Coût du capital (10%)		10.00 M€	7.50 M€	5.00 M€	2.50 M€
EVA		-1.00 M€	1.50 M€	4.00 M€	6.50 M€
Valeur Présente EVA	7.78 M€				
Flux monétaire	-100.00 M€	34.00 M€	34.00 M€	34.00 M€	34.00 M€
VAN	7.78 M€				

*Gains avant impôt et intérêt (Earnings Before Interest and Taxes)

**Profits d'opérations nets après impôt (Net Operating Profit After Tax)

TABLEAU 1. EVA AVEC DÉPRÉCIATION CONSTANTE

On remarque que la valeur présente de l'EVA est égale à la valeur présente nette (VAN) des flux monétaires. Pour calculer la valeur économique ajoutée, on doit connaître la valeur aux livres du capital de la division à chacune des années de sa durée de vie. Par exemple, dans ce cas-ci, la valeur d'EVA en période 4 est calculée comme suit:

$$EVA = PONAI - [Coût\ du\ capital \times Fonds\ employés]$$

$$= 9M€ - [10\% \times 25\text{M€}] = 6{,}5\ \text{M€}$$

Dans le tableau, on remarque que les flux monétaires sont constants à chacune des quatre périodes. Toutefois, lorsque que l'on regarde la valeur économique ajoutée à chacune des années, on remarque qu'elle n'est pas constante et qu'elle croît à travers le temps. C'est dans ce type de situation qu'il est important que le dirigeant, qui est rémunéré selon l'EVA, soit en poste pendant la totalité du projet. En effet, si le dirigeant compte quitter à court terme, il pourrait ne pas être intéressé à prendre part à ce projet à court terme puisque ce dernier génère une EVA négative pour la première période ; donc, si le dirigeant anticipe quitter après la première période, il pourrait refuser le projet et ce, même si ce dernier est économiquement rentable pour la division. Pour contrer ces incitations perverses, il faut assurer au dirigeant une prime de départ ou de mutation appropriée.

Cette situation où l'EVA est négative au début du projet et devient positive et croissante par la suite est due au fait que la dépréciation est constante et accélère ainsi la dépréciation en terme économique. Pour pallier à ce problème, il est possible d'utiliser un taux de dépréciation plus faible en début de projet et un plus élevé en fin de projet. On remarque dans le tableau 2 ci-dessous qu'en changeant le taux de dépréciation d'année en année, la valeur économique ajoutée peut devenir positive à chacune des années et la valeur présente d'EVA est toujours égale à la valeur présente nette (VAN) des flux monétaires, bien que ces valeurs aient diminué dû au fait que la dépréciation dans le temps n'est plus la même, affectant la séquence de paiements des impôts. Ceci aurait pour effet d'inciter un dirigeant de court terme[15] de prendre part à un projet qui lui donnerait un rendement positif dès la première période. Il est même possible de faire face à une situation où un dirigeant de court terme opte pour un projet qui a une EVA positive durant les premières années du projet, mais qui a une valeur présente nette négative.

[15] Dirigeant qui anticipe quitter son poste avant la fin du projet.

Période	0	1	2	3	4
Investissement initial	100.00 M€				
Valeur aux livres		100.00 M€	82.00 M€	60.04 M€	33.25 M€
Revenus		50.00 M€	50.00 M€	50.00 M€	50.00 M€
Dépenses		10.00 M€	10.00 M€	10.00 M€	10.00 M€
Dépréciation		18.00 M€	21.96 M€	26.79 M€	33.25 M€
GAII* (EBIT)		22.00 M€	18.04 M€	13.21 M€	6.75 M€
Impôt		8.80 M€	7.22 M€	5.28 M€	2.70 M€
PONAI** (NOPAT)		13.20 M€	10.82 M€	7.93 M€	4.05 M€
Coût du capital (10%)		10.00 M€	8.20 M€	6.00 M€	3.33 M€
EVA		3.20 M€	2.62 M€	1.92 M€	0.73 M€
Valeur Présente EVA	7.02 M€				
Flux monétaire	-100.00 M€	31.20 M€	32.78 M€	34.72 M€	37.30 M€
VAN	7.02 M€				

*Gains avant impôt et intérêt (Earnings Before Interest and Taxes)

**Profits d'opérations nets après impôt (Net Operating Profit After Tax)

TABLEAU 2. EVA AVEC DÉPRÉCIATION PROGRESSIVE

En somme, se baser sur la valeur économique ajoutée pour compenser ses dirigeants divisionnaires peut être une méthode efficace pour les inciter à prendre des décisions qui augmentent la valeur de la firme. Toutefois, comme le taux de roulement des dirigeants divisionnaires peut être élevé, il faut être très prudent dans les situations où les dirigeants pourraient ne pas rester dans la division pour une période suffisamment longue. Par un choix judicieux des taux de dépréciation durant la durée de vie des projets, il est possible d'arriver à éviter que les dirigeants divisionnaires de court terme prennent des décisions qui ne maximiseraient pas la valeur globale de la firme.

3.3 - L'intégration du risque dans les prix de transfert

L'intégration du risque lors de l'établissement des prix de transfert est primordiale et doit être considérée comme un processus très important. Deux divisions qui ont la même espérance de profit, mais qui sont exposées à des niveaux de risque différents, ne doivent pas être considérées comme équivalentes. La division comportant un risque plus élevé doit être considérée comme ayant une valeur moindre. En fait, une division qui assume ou représente plus de risque doit être « dédommagée », i.e. doit générer des rendements supérieurs. Ceci permet également de déterminer si une division dégage assez de rendement sur son capital par rapport au risque auquel elle est exposée ou qu'elle représente.

Si une division représente un ensemble d'activités trop risquées par rapport à son rendement, alors la firme aura possiblement intérêt à s'en départir ou à réorganiser ses activités afin de trouver une façon de diminuer les risques ou d'augmenter le rendement pour que les premiers soient conséquents avec le second.

3.3.1 - Comment le prix du risque doit intervenir dans le prix de transfert

Lors de l'établissement des prix de transfert des différents biens et services transigés, le coût du risque doit être calculé dans les coûts d'opération des divisions. En effet, le coût marginal doit représenter l'ensemble des coûts marginaux, y compris donc une prime pour le risque ou les risques de la division. En utilisant le CAPM, il est possible de déterminer un taux de rendement ajusté pour le risque, ce qui nous permet de calculer la valeur présente corrigée pour le risque et ainsi déterminer les prix auxquels les biens et services doivent être transigés entre les divisions. Une approche détaillée sera traitée dans la section 3.

3.3.2 - Incitations à la performance

La plupart des entreprises fixent le salaire de leurs dirigeants selon leur performance, dès lors, il devient très important que la mesure de cette performance reflète la valeur incrémentale qu'apporte les dirigeants. Il faut que les dirigeants de chacune des divisions soient incités dans leurs décisions à tenir compte de la maximisation des profits ou de la valeur de l'ensemble de l'entreprise. Les contrats doivent donc être cohérents avec les objectifs de l'ensemble de la firme, et ce, à tous les niveaux de la firme et de chacune de ses divisions pour qu'ils soient optimaux.

3.3.2.1 - PERFORMANCE GLOBALE DE LA FIRME ET DE SES DIVISIONS

Logiquement, la performance globale de la firme dépend de la performance de chacune de ses divisions. L'information étant rarement parfaitement observable, il peut être difficile de mettre en place un système qui incite les dirigeants divisionnaires à maximiser à chaque niveau le rendement de l'ensemble de la firme. C'est un problème abondamment traité en économie sous le vocable de la théorie principal-agent. Pour pallier à ce problème, le principal (ex : dirigeants de la firme) doit s'assurer de coordonner les tâches des agents (ex : dirigeants des divisions) de façon à ce que les intérêts des principaux soient adéquatement incorporés dans la fonction objectif des dirigeants divisionnaires (ex : leur mode de rémunération), et ainsi, que les agents prennent les actions nécessaires à l'optimisation de la performance de l'ensemble de l'entreprise. En incorporant ces incitatifs dans leurs contrats, l'information difficilement observable n'est plus un problème aussi important puisque les agents ont les mêmes objectifs et intérêts que les principaux.

En fait, le rôle des dirigeants de la firme est de s'assurer que les tâches des dirigeants des divisions soient complémentaires et de coordonner le tout pour que les intervenants soient incités à optimiser la valeur de l'ensemble de la firme. Ce même type de problème doit être repris à l'échelle de la firme et de chacune de ses divisions pour que le résultat soit optimal. Ainsi, les dirigeants de divisions devraient adopter la même approche à l'intérieur de leur division respective lorsqu'ils établissent les contrats avec les différents employés et intervenants subalternes. C'est pourquoi il est important de bien définir et mesurer les objectifs à atteindre, entre autres en fixant les prix de transfert adéquatement, pour qu'ensuite les contrats optimaux puissent générer les bonnes décisions et les «bons» résultats.

À titre illustratif, SINCLAIR-DESGAGNE (2001) traite de l'alternative suivante pour résoudre ce type de problème. Dans un cas, un agent fait face aux demandes de deux principaux (A et B), où le principal A demande à l'agent d'effectuer une tâche (a), par exemple la maximisation des profits, et le rémunère selon sa productivité reliée à cette tâche, et où le principal (B) lui demande d'effectuer une tâche (b), par exemple la gestion des risques, pour laquelle il est payé selon sa productivité relative à cette tâche. Une façon de faire, pour ne pas que l'agent néglige ou favorise une des deux tâches, serait de compenser l'agent selon son apport à la tâche (b) seulement si sa productivité concernant la tâche (a) a atteint un certain niveau. Donc, l'agent recevrait un bonus de performance qui proviendrait d'une part, du principal (A) qui le paierait pour la tâche (a) et d'autre part, du principal (B) qui le paierait selon son apport aux deux tâches (a et b), et pourrait même pénaliser l'agent advenant une contre-performance pour la tâche (b). De cette façon, l'agent aurait une incitation financière importante à bien optimiser l'accomplissement des deux tâches et ainsi respecter les objectifs des deux principaux, et par conséquent, de l'ensemble de la firme.

Intuitivement, l'agent ou le dirigeant divisionnaire est incité à répondre aux attentes des deux principaux. Effectivement, il est incité à performer dans l'accomplissement de la tâche (a) puisque cela a un impact positif sur sa rémunération, et il a également intérêt à ne pas négliger ses efforts pour effectuer la tâche (b) puisqu'elle a non seulement un effet positif sur son espérance de rémunération, mais aussi, si les deux tâches ne sont pas complétées correctement, cela peut avoir un impact négatif sur sa rémunération globale et ainsi éliminer la récompense attendue suite à l'effort fourni lors de l'accomplissement de la tâche (a). Ainsi, on remarque qu'en offrant un contrat incitatif à l'agent, il est possible d'atteindre tous les objectifs fixés au départ. Il est dès lors important que les principaux se concertent sur les objectifs à réaliser et les niveaux de performance à atteindre pour qu'il soit possible ensuite de concevoir des contrats adéquats tenant compte de tous les objectifs spécifiques, et ce, dans le but de maximiser le profit ou la valeur de l'ensemble de la firme.

Au sein de la prochaine section, nous poursuivons l'intégration du risque dans les prix de transfert en utilisant un exemple illustratif simple qui pourrait s'appliquer à une compagnie comme Westdeutsches Erdgas, au niveau plus développé.

6:4 – PRIX DE TRANSFERT ET RISQUE

De toute évidence, les prix de transfert influent sur la rentabilité de la firme et il faut les déterminer avec le plus de précision possible. Dans cette section, nous présentons une méthodologie d'élaboration et d'évaluation d'un système de prix de transfert selon les trois piliers coûts/risque/performance. En utilisant une illustration simple d'un modèle à deux divisions, il sera possible de développer une méthodologie qui pourra être implémentée pour développer et évaluer un modèle de prix de transfert adapté.

La section 4.1 sera développée à partir d'un modèle simple d'organisation à deux divisions, une division en amont qui sera responsable de fournir des biens et services à une division en aval. Les deux divisions doivent intégrer la gestion des risques et contribuer à la maximisation de la valeur de la firme aux moyens des prix de transfert.

4.1 - Illustration théorique – Prix de transfert

Division en amont

On peut concevoir la division en amont comme responsable de l'acquisition de gaz auprès de distributeurs indépendants. Le prix du gaz n'est pas certain à travers le temps, il représente donc un risque pour la division qui peut se retrouver avec des fluctuations de prix qui affectent directement ses profits et sa rentabilité. Ce risque que prend la division doit être compensé, sinon, elle n'aurait pas intérêt à continuer ses activités et la firme voudra externaliser ses activités. L'entreprise doit supporter des coûts fixes et des coûts variables. La division en amont doit déterminer le prix de transfert auquel elle vendra à la division en aval. Il faut déterminer un prix de transfert qui reflète le risque auquel la division en amont est exposée.

Division en aval

La division en aval est responsable de la commercialisation du gaz et d'en négocier l'approvisionnement auprès de fournisseurs indépendants dont la division en amont. Le volume de gaz demandé par les clients n'est pas certain à travers le temps, il représente donc un risque pour la division qui peut se retrouver avec des fluctuations de volume à fournir qui affectent directement ses profits et sa rentabilité. Ce risque que prend la division doit être compensé, sinon elle n'aurait pas intérêt à continuer et la firme voudra externaliser ses activités. La division doit supporter des coûts fixes et des coûts variables, déterminés en partie par le prix d'acquisition (transfert) de gaz auprès de la division en amont. La division en aval doit déterminer le volume de gaz qu'elle achètera à la division en amont. Il est dès lors important que l'entreprise en aval détermine un volume vendu à un certain prix à sa clientèle et ce prix doit refléter le risque auquel la division est exposée.

4.1.1 - Établissement du prix de transfert de la division en amont

Nous considérons dans un premier temps une quantité fixe à transiger. Nous traiterons le cas où la quantité est variable par la suite. Il est difficile de déterminer le coût marginal et il est usuel dans la pratique de référer à un niveau de « revenus requis » devant couvrir tous les frais, y compris le coût du capital. Une telle approche équivaut à supposer que le coût marginal soit égal au coût moyen. La perte d'efficacité potentiellement encourue est compensée par les gains dus à la simplicité du processus et évidemment à la décentralisation des décisions. Pour simplifier la présentation, nous allons aussi faire abstraction des impôts et supposer que le taux de taxation est nul.

Pour établir le prix de transfert de la division en amont, il faut d'abord déterminer son niveau de risque assumé. Selon le risque encouru par la division en amont, il est possible de déterminer le rendement exigé sur le capital investi. Pour ce faire, la division en amont doit déterminer ses coûts et peut déterminer le rendement exigé sur le capital en utilisant le modèle CAPM pour les capitaux propres.

Par exemple, l'entreprise en amont détermine le capital qu'elle utilise pour les biens et services qu'elle offre en se basant possiblement sur ses résultats annuels des années précédentes. Le tableau suivant représente un résumé du capital utilisé de la division en amont pour une année complète.

Immobilisation en exploitation	15 000 000
Amortissement cumulé	(4 000 000)
Actifs incorporels	250 000
Dépenses non amorties et autres actifs	150 000
Fonds de roulement	100 000
Total du capital utilisé	11 500 000

TABLEAU 3. CAPITAL UTILISÉ DE LA DIVISION EN AMONT (EN MILLIER DE €)

4.1.1.1 - LES RISQUES

Les risques auxquels la division en amont est exposée peuvent par exemple être divisés en trois types de risques : les risques financiers, les risques d'affaires et les risques reliés à la réglementation. Les risques financiers peuvent être perçus comme des effets de levier qui influencent le rendement de l'entreprise. Par exemple, une entreprise dont la structure du capital est majoritairement sous forme de dette, les paiements relatifs à la dette représentant une charge fixe, sera affectée par la volatilité des taux d'intérêts et autres variables qui affectent ces paiements, ce qui peut diminuer le rendement espéré de la division.

Les risques d'affaires représentent les risques associés au marché dans lequel la division évolue, sa structure de coût et des activités. Finalement, les risques réglementaires représentent les risques reliés aux lois et règlements auxquels la division doit se conformer. La plupart des réglementations, que cela soit une loi ou un délai variable de prise de décision, peuvent enlever de la flexibilité à l'entreprise et en affecter ainsi la valeur et le rendement.

4.1.1.2 - ÉVALUATION DU RISQUE

Le rendement est composé du coût de la dette, qui est souvent connu et facilement calculable et du coût des capitaux propres, qui pour sa part, ne peut généralement être directement observé. Il faut donc, utiliser la méthode d'évaluation CAPM pour évaluer le coût d'opportunité des capitaux propres sur le marché. Pour cette évaluation, il y a essentiellement trois composantes à déterminer; le taux de rendement sans risque, le bêta de la division et la prime de risque du marché.

Pour évaluer le taux sans risque, il faut déterminer une méthodologie qui soit transparente, prévisible et objective. Les grandes firmes d'évaluation utilisent des données historiques, à partir de bases de données fiables sur par exemple des obligations du gouvernement à long terme pour enlever le plus possible de variation. Aux fins de notre exemple, nous utiliserons un taux de rendement sans risque de 6%.

Ensuite, il faut évaluer le bêta de la division ou de l'entreprise. Pour ce faire, on peut faire le recensement des entreprises transigées en bourse qui subissent des risques comparables et qui évoluent dans des marchés similaires. Une façon de faire est d'utiliser la technique des rolling bêtas mensuels calculés sur une période de cinq ans à partir de l'échantillon d'entreprises comparables qui aura été préalablement établi. Aux fins de notre exemple, nous utiliserons un bêta pour la division en amont égal à 0,5.

Finalement, il faut déterminer la prime de risque du marché $(E[R_m] - R_f)$. Encore une fois, c'est en utilisant une moyenne historique d'une base de données fiable et dont la mise à jour est faite régulièrement. Aux fins du problème, nous utiliserons une prime de risque du marché de 7%. Nous avons donc les paramètres suivants pour établir notre rendement sur les capitaux propres :

Paramètres du modèle CAPM	
Taux de rendement sans risque	6 %
Bêta de la division	0,5
Prime de risque du marché	7 %

Ensuite, nous pouvons calculer taux de rendement sur les capitaux propres en utilisant la formule du CAPM suivante :

$$\underbrace{E[R_i]}_{Taux\ de\ rendement\ exigé} = \underbrace{R_f}_{Taux\ sans\ risque} + \underbrace{\beta_i\left(E[R_m] - R_f\right)}_{Prime\ de\ risque} = 6\% + [0,5 \times (7\%)] = 9,5\%$$

En supposant que le coût de la dette de la division est connu et égal à 6,5%, et en supposant que la structure du capital de la division est composée de 30% de capitaux propres et de 70% de capitaux empruntés, il est possible de calculer le coût moyen pondéré du capital de la façon suivante :

$$\underbrace{R_i}_{Coût\ moyen\ pondéré\ du\ capital} = \underbrace{30\% \times 9,5\%}_{Capitaux\ propres} + \underbrace{70\% \times 6,5\%}_{Capitaux\ empruntés} = 7,4\%$$

Maintenant que nous connaissons le coût du capital et le capital utilisé, il est possible de déterminer le rendement nécessaire sur le capital utilisé. Avec un capital utilisé égal à 11 500 millions d'euros, la division en amont doit incorporer à ses prix un coût du capital de 851 millions d'euros (0,074 x 11 500 M€) en plus des autres dépenses nécessaires à la prestation du service à la division en aval, que nous supposerons égales à 1 100 M€. Donc, les revenus requis par la division en amont sont de 1 951 millions d'euros.

Rendement sur le capital utilisé	851 M€
Dépenses nécessaires à la prestation du service	1 100 M€
Revenus requis pour la fixation du prix de transfert	1 951 M€

Ce qui revient à dire que la division en amont doit recevoir 1 951 millions d'euros de la part de la division en aval, pour qu'elle couvre ses coûts d'opération ainsi que son rendement attendu compte tenu du niveau de risque auquel elle est exposée. Les revenus requis de la division en amont sont donc transférés à la division en aval qui devra payer la totalité du montant pour obtenir le bien ou service de la division en amont.

Le prix de transfert sera dans ce cas égal à (1 951 M€ / quantité transigée) et il est composé d'une part du coût du capital qui incorpore une prime de risque adéquate et d'autre part de l'ensemble des autres coûts.

4.1.2 - Établissement du coût marginal de la division en aval

L'établissement des revenus requis pour la division en aval suit le même principe que la division en amont. Étant également exposée à un niveau de risque, la division en aval doit intégrer une prime de risque en plus des revenus requis de la division en amont en se basant sur son capital utilisé. Le capital utilisé de la division en aval est représenté dans le tableau suivant :

Immobilisation en exploitation	5 000 000
Amortissement cumulé	(1 000 000)
Actifs incorporels	150 000
Dépenses non amorties et autres actifs	50 000
Fonds de roulement	50 000
Totale du capital utilise	4 250 000

TABLEAU 4. CAPITAL UTILISÉ DE LA DIVISION EN AVAL (EN MILLIER DE €)

Nous avions déjà déterminé le taux de rendement sans risque qui est de 6%. En ce qui concerne le bêta de la division, on utilise toujours un échantillon d'entreprises comparables qui sont transigées en bourse. Aux fins de notre exemple, nous utiliserons un bêta égal à 0,6 pour la division en aval. La prime de risque étant également de 7%, nous avons les données suivantes pour établir le rendement sur les capitaux propres de la division en aval :

Paramètres du modèle CAPM	
Taux de rendement sans risque	6 %
Bêta de l'entreprise	0,6
Prime de risque du marché	7 %

Ce qui nous permet de calculer le taux de rendement des capitaux propres en utilisant la méthode CAPM :

$$\underbrace{R_i}_{Taux\ de\ rendement} = \underbrace{R_f}_{Taux\ sans\ risque} + \underbrace{\beta_i\left(E[R_m] - R_f\right)}_{Prime\ de\ risque\ du\ marché} = 6\% + [0{,}6 \times (7\%)] = 10{,}2\%$$

En supposant que le coût de la dette de la division en aval est de 6% et que la structure du capital de la division est la même que la division en amont, soit 70% de capitaux empruntés et 30% de capitaux propres, il nous est possible de déterminer le coût moyen pondéré du capital de cette division :

$$\underbrace{R_i}_{Coût\ moyen\ pondéré\ du\ capital} = \underbrace{30\% \times 10{,}2\%}_{Capitaux\ propres} + \underbrace{70\% \times 6\%}_{Capitaux\ empruntés} = 7{,}26\%$$

Nous pouvons dès lors déterminer le rendement nécessaire sur le capital utilisé par la division. Nous avions calculé une utilisation du capital égale à 4 250 millions d'euros, elle doit donc générer une compensation financière de 433,5 millions d'euros (0,102 x 4 250 M€) pour le rendement sur le capital. À ce montant vient s'ajouter les autres coûts pour couvrir les frais nécessaires à la prestation du service de la division en aval que nous supposerons être de 800 millions d'euros en plus du revenu requis par la division en amont qui est de 1 951 millions d'euros. La division en aval doit donc pouvoir engranger des revenus d'au moins 3 184,5 millions d'euros.

Rendement sur le capital utilisé	433,5 M€
Dépenses nécessaires à la prestation du service	800 M€
Achat (prix de transfert x qté) auprès de la division en amont	1 951 M€
Revenus requis de la division en aval	3 184,5 M€

Les revenus requis de la division en aval représentent un seuil minimum afin que cette dernière offre un rendement compétitif par rapport au marché. Dans le cas contraire, le capital investi par la firme pourrait être relocalisé à d'autres endroits offrant un taux de rendement supérieur. Ainsi, on peut, sous nos hypothèses que le coût marginal est égal au coût moyen et que la quantité transigée est donnée, considérer que le coût marginal de la division en aval est égal à (3 184,5 M€ / quantité vendue).

Bien évidemment, tous les gestionnaires veulent réaliser un rendement supérieur au marché, tout comme les actionnaires. C'est pourquoi il est important de bien fixer les incitations à la performance pour les dirigeants d'entreprises, les dirigeants divisionnaires et les gestionnaires subalternes.

Il est d'autant plus important de fixer des incitations pour la division en amont, puisqu'elle détermine le montant requis pour ses services selon ses coûts et risques encourus. Advenant que la division en aval ne puisse s'approvisionner sur le marché extérieur, que ce soit pour des raisons de synergie ou qu'il n'y ait tout simplement pas de marché extérieur, l'entreprise en amont pourrait profiter de cette situation et ne pas optimiser ses opérations pour diminuer ses coûts et/ou son exposition au risque. Ainsi, on pourrait se retrouver dans une situation où il pourrait y avoir un transfert de sous performance d'une division à une autre, même avec une tarification au coût marginal incluant le coût marginal du capital requis. Il faut que les dirigeants des divisions, en particulier celle en amont, soient incités fortement à diminuer ou rationaliser leurs coûts de façon à optimiser le profit global de la firme et ainsi tendre vers les mêmes objectifs que les actionnaires et les ayants-droits de la firme dans son ensemble.

Pour ce faire, les contrats peuvent être déterminés en utilisant la méthode de calcul de la valeur économique ajoutée, intégrant dépréciation et fiscalité, comme nous l'avons vu précédemment, et ce, malgré que cette méthode mérite beaucoup d'attention et doit être utilisée avec précaution, comme nous l'avons vu à la section 3. Il est également possible d'arriver à un résultat encore meilleur en utilisant une approche au design des contrats de performance qui inclut des rémunérations fonction de l'atteinte d'objectifs telle que décrit dans la sous-section 3.3.2. Ce type de contrat incitatif permet d'aligner les objectifs de tous les intervenants de la firme dans le but d'atteindre un résultat optimal.

4.2 - Établissement du prix de transfert lorsque la quantité est variable

De manière générale, la demande ou la quantité à mettre en marché par la division en aval n'est pas fixe mais est plutôt variable et dépend des conditions économiques, entre autres du prix de vente choisi par l'entreprise dans la mesure où elle a un certain pouvoir de marché (marchés oligopolistiques ou de concurrence monopolistique). Dans un marché parfaitement arbitré et concurrentiel comme celui du gaz naturel, le prix peut être considéré comme donné, mais la quantité produite sera fonction de la capacité de l'entreprise de contrôler ses coûts et de réduire ses coûts marginaux. Quoiqu'il en soit, la quantité mise ne marché par l'entreprise sera déterminée en même temps que son prix final et ses prix de cession interne.

Comme dans tout marché, la détermination du prix et de la quantité transigée à l'interne se fera par un processus de boucle ou de tâtonnement. Les principes sont clairs : la division en amont doit tarifer à son coût marginal (ou à son coût moyen dans l'approche du revenu requis, plus populaire car plus simple à appliquer et équivalente à supposer que le coût marginal soit proche du coût moyen de la division) et la division en aval doit prendre ce coût transformé en prix de cession interne comme donné pour déterminer la quantité qu'elle voudra mettre en marché afin d'optimiser ses profits et donc ceux de l'entreprise. La procédure est similaire à ce qui se produirait si la division en amont annonçait à la division en aval son barème de prix, équivalent à une fonction d'offre, reliant quantité transigée et coût marginal (y compris le coût marginal du capital nécessaire à la production de la quantité demandée de biens et/ou services par la division en amont) et que la division en aval utilisait ce barème de manière non monopsonistique dans sa propre prise de décision. Alternativement et de manière plus concrète, la quantité transigée et le coût de cession interne se déterminent mutuellement jusqu'à ce qu'un point fixe d'équilibre soit atteint.

6:5 – CONCLUSION GÉNÉRALE

Westdeutsches Erdgas, entreprise multidivisionnelle internationale intégrée, doit fixer ses prix de transfert de manière adéquate pour d'une part gagner en performance et d'autre part ne pas s'exposer aux redressements de plus en plus fréquents et lourds réalisés par les différentes administrations fiscales des quelque trente pays dans lesquels l'entreprise est implantée.

Face à la multitude des méthodes de fixation existantes nous avons entrepris de cerner les facteurs principaux influençant le choix des politiques de prix de transfert dans les entreprises. Si les prix de transfert visent au départ à faciliter la décentralisation et la coordination des décisions, l'appréciation des performances et la pratique du contrôle budgétaire (gains d'efficacité et d'efficience), on ne peut sous-estimer qu'ils dépendent également de la stratégie globale poursuivie par l'entreprise, du mode et de la structure d'organisation adoptés, y compris l'allocation du capital, le partage des risques associés et la tarification de ces risques, ainsi que des considérations douanières, juridiques et fiscales. L'ensemble de ces dépendances complique la détermination de la politique optimale de tarification de cession interne et explique les difficultés que rencontrent les entreprises à faire en sorte que les prix de transfert permettent simultanément une évaluation satisfaisante des performances, la convergence des objectifs et la garantie d'une autonomie garante de l'efficacité et de l'efficience. Le respect simultané de ces objectifs reste un idéal vers lequel il convient de tendre.

6:6 - BIBLIOGRAPHIE

AL-ERYANI M.F., ALAM P., AKHTER S.H. (1990), “Transfer pricing determinant of U.S. multinationals”, Journal of International Business Studies, vol. 21, n°3, 3rd quarter, pp. 409-425.

ANTLE R., DEMSKY J.S. (1988), “The controllability principle in responsibility accounting”, The Accounting Review, Vol. 63, n°4, pp. 700-718.

BAFCOP J., BOUQUIN H ET DESREUMAUX A. (1991), “Prix de cessions internes : regard sur les pratiques des entreprises françaises”, Revue Française de Gestion, n°82, pp. 103-113.

BALDENIUS T., MELUMAD N., REICHELSTEIN S. (2004),“Integrating managerial and tax objectives of transfer pricing“, The Accounting Review, vol. 79, n°3, pp. 591-615.

BORKOWSKI S.C. (1990), “Environmental and organizational factors affecting transfer pricing: a survey”, Journal of Management Accounting Research, pp. 78-79.

BORKOWSKI S.C. (1992), “Organizational and international factors affecting multinational transfer pricing”, Advances in International Accounting, 1992, vol. 5, pp. 173-192.

BORKOWSKI S.C. (1997), “Factor motivating transfer pricing choices of Japanese and United States transnational corporation”, Journal of International Accounting, Auditing and Taxation, vol. 6, pp. 25-47.

BOYER M., GRAVEL É. (2006), “Évaluation de projets : La valeur actualisée nette optimisée (VAN-O)”, Assurances et gestion des risques, 74(2), juillet 2006, 163-185.

BOYER, M., BOYER, M.M. AND GARCIA, R. (2005), “The value of real and financial risk management”, Scientific Series, December 2005, 2005s-38. Available at CIRANO: https://www.cirano.qc.ca/files/publications/2005s-38.pdf

BOYNS T., EDWARDS J.R., EMMANUEL C. (1997), “A longitudinal study of the determinants of transfer pricing change”, Management Accounting Research, pp. 85-108.

CATS-BARIL, GATTI J., GRINNELL D. (1988), “Prix de cession interne : quelles méthodes utiliser ? », La revue CMA.

CHOUDHURY N. (1986), “Responsibility accounting and controllability”, Accounting and Business Research, Vol. 63, pp. 189-198.

CRAVENS K. (1997), “Examining the role of transfer pricing as a strategy for multinational firms”, International Business Review, vol. 6, pp. 127-145.

CURIEN N. (1992), Économie et Management de l’Entreprise de Réseau, Paris, ENSPTT- Economica.

DEAN J. (1955), “Decentralisation and Intercompany Pricing”, Harvard Business Review, vol. 33, pp. 65-74.

DEARDEN J. (1966), « Myth of real time management information », Harvard Business Review.

DEARDEN J. (1976), Mirage de la décentralisation, Harvard-L’expansion, pp. 26-31.

ECCLES R.G. (1985), The Transfer Pricing Problem: A Theory for Practice, Lexington, Massachusetts, D.C. Heath and Company.

EMMANUEL C., MEHAFDI M. (1994), Transfer pricing, Academic Press, London.

FREMGEN J.M. (1970), “Transfer pricing and management goals”, Management Accounting, December 1970.

HOLMSTROM B., TIROLE J. (1991), "Transfer pricing and organizational form", Journal of Law, Economics and Organization, vol. 7, n°2, pp. 201-228.

HYDE C. (2002), "Multinationals and the relationship between strategic and tax transfer prices", Working Paper PriceWaterhouse Cooper, Sydney, Australia.

LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. (2002), The theory of incentives: The Principal-Agent Model, Princeton University Press.

LEITCH R.A., BARRETT K.S. (1992), "Multinational transfer pricing: objectives and constraints", Journal of Accounting Literature, vol. 11, pp. 47-92.

MCAULAY L., TOMKINS C. (1982), "A review of the contemporary transfer pricing literature with recommendation for future research", British Journal of Management, Vol. 3, June, pp. 101-122.

MERCHANT K.A. (1987), "How and why firms disregard the controllability principle", dans: Accounting & Management: field study and perspectives, W.J. Bruns, R.S. Kaplan, ed(s), Harvard Business School Press, Boston, pp. 316-338.

NARAYANAN V.G., SMITH M. (2000), "Impact of competition and taxes on responsibility center organization and transfer prices", Contemporary Accounting Research, vol.17, n°3, pp. 497-529.

SALOMONS D. (1965), Divisional performance: measurement and control, Financial Executives Research Foundation, New York.

SHAVELL S. (1979), "Risk Sharing and incentives in the principal and agent relationship", Bell Journal of Economics, Vol. 10, n°1, pp.55-73.

SICK G. (2006), Valuation and Capital Budgeting (à paraître).

SINCLAIR-DESGAGNÉ B. (2001), "Incentives in Common Agency", CIRANO (Série scientifique), 2001s-66.

SPICER B.H. (1988), "Towards an organizational theory of the transfer pricing process", Accounting, Organisations and Society, vol. 20, n°6, pp. 423-456.

SPICER B.H., COLBERT G.J. (1995), "Multi-case investigation of theory of the transfer pricing process", Accounting, Organisations and Society, vol. 20, n°6, pp. 423-456.

TANG R.Y.W, CHAN K.H. (1979), "Environmental variables of international pricing: A Japan-United States comparison", Abacus, pp. 3-12.

TANG R.Y.W, (1992), "Transfer pricing in the 1990s – The emphasis on multinational and tax issues", Management Accounting, pp. 22-26

WELCH J.A., NAYAK P.R. (1992), "Strategic sourcing: a progressive approach to the make-or-buy decision", Academy of Management Executive, pp. 23-31.

YUNKER P. (1983), "A survey study autonomy, performance evaluation and transfer pricing in multidimensional corporations", Colombia Journal of World Business, pp. 51-64.

Évaluation des investissements, allocation des coûts communs et tarification

CHAPTER 7

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Nicolas Marchetti. Il est basé sur le rapport « Évaluation des investissements, allocation des coûts communs et tarification », CIRANO 2007RP-06.

Le groupe Westdeutsches Erdgas (WE) représenté dans ce chapitre est purement fictif.

7:1 - INTRODUCTION

Évaluation des investissements, allocation des coûts communs et tarification sont différentes facettes d'une même problématique : créer de la valeur dans l'entreprise.

Il est possible de schématiser le processus de création de valeur en trois étapes. **L'investissement génère des coûts qu'il convient de répartir entre les clients avant de les recouvrir (en intégrant une marge) à l'aide d'un outil adéquat de tarification.** Nous résumons le lien qui unit investissement, partage des coûts et tarification avant de mettre en évidence les sources d'incertitude susceptibles de l'affecter.

Dans une approche pure et stricte de partage des coûts, on suppose que les quantités demandées par les différents agents, entités ou clients sont données ; il s'agit alors de répartir entre ces derniers le coût (d'infrastructure) de les satisfaire de façon conjointe, étant donnés la technologie ou les équipements disponibles, choisis dans une étape antérieure.

La question abordée dans la tarification est un peu plus générale. On admet que la façon même de répartir les coûts peut avoir une influence sur les demandes elles-mêmes. On suppose donc que les agents, clients ou consommateurs ont une fonction de demande pour les biens et services que permettent de produire les infrastructures et équipements communs. La question étudiée est alors celle de la détermination des tarifs et l'objectif poursuivi est alors soit de faire en sorte que la couverture des coûts (dont les coûts non attribuables : ici les coûts d'approvisionnement, d'entrée sur le réseau et de stockage) est assurée, soit de maximiser le profit de l'entreprise, soit d'optimiser son taux de rendement sur le capital utilisé.

Le couplage du partage des coûts et de la tarification est en réalité un zoom sur les deux derniers maillons de la « chaîne (ou du processus) de création de valeur ». L'investissement, premier maillon de la chaîne, doit être intégré pour obtenir une représentation la plus complète possible du processus de création de valeur. Dans ces conditions, l'incertitude et le risque vont de fait faire leur apparition.

En effet, les coûts communs à allouer entre les différents agents, entités ou clients sont eux-mêmes issus de la technologie, du mode d'organisation et du parc d'actifs et d'équipements que l'entreprise a choisis. Les implications de ces choix et le portefeuille d'actifs qui en résulte viendront encadrer d'une certaine manière l'approche à retenir ou encore l'application de la méthode retenue pour l'allocation des coûts communs et par conséquent la tarification elle-même et déterminer jusqu'à un certain point le niveau d'interfinancement qui pourrait en résulter. Différentes technologies, différents modes d'organisation ou de décentralisation interne, différents actifs et équipements viendront modifier le niveau relatif des coûts communs ou non attribuables et celui des coûts spécifiques ou attribuables.

L'objectif de ce chapitre est de présenter et d'expliquer de façon rigoureuse mais pédagogique les liens entre la problématique de l'évaluation des investissements, celle de l'allocation des coûts communs et celle de la tarification. C'est un objectif ambitieux que nous ne pourrons qu'effleurer dans le cadre des limites de ce projet mais nous pourrons quand même identifier et situer les principaux éléments devant guider la réflexion sur ces sujets.

Ce rapport s'articule autour de quatre axes principaux. Tout d'abord, dans la section 7:2 nous revenons sur les liens unissant partage des coûts et tarification et présentons les sources d'incertitude qui peuvent avoir une influence sur les coûts à attribuer. Dans la section 7:3, nous proposons une schématisation complète de la chaîne de création de profit intégrant les maillons : investissement, partage des coûts et tarification. La section 7:4 vise à clarifier les fondements de l'actualisation des flux monétaires dans un contexte risqué. La section 7:5 est pour sa part consacrée à la présentation de l'outil récent et performant de gestion dynamique de l'incertitude dans l'évaluation des investissements que sont les options réelles.

7:2 - ALLOCATION DES COÛTS COMMUNS ET TARIFICATION : LES SOURCES D'INCERTITUDE

Il est possible de schématiser le processus de création de valeur en trois étapes. **L'investissement génère des coûts qu'il convient de répartir entre les clients avant de les recouvrir (en intégrant une marge) à l'aide d'un outil adéquat de tarification.** L'objet de cette section est dans un premier temps de présenter le lien qui unit investissement, partage des coûts et tarification. Dans un second temps, nous mettons en évidence les sources d'incertitude qu'il convient absolument d'intégrer au processus de création de valeur afin de le rendre optimal.

2.1 - Rappels sur les liens unissant l'allocation de coûts communs et la tarification

La plupart des organisations, sinon toutes, répartissent d'une manière ou d'une autre des coûts communs entre leurs diverses composantes ou encore entre leurs différents partenaires ou clients. Westdeutsches Erdgas n'échappe pas à la règle. En effet, pour fournir du gaz à ses clients finals, Westdeutsches Erdgas est confronté à divers coûts dont certains ne sont pas directement attribuables à un client donné. Il s'agit par exemple des coûts liés à :

- l'approvisionnement : un négociant gazier mobilise des contrats d'approvisionnement négociés auprès des producteurs ou intervient sur des marchés spots ;
- l'accès au réseau de transport et de distribution ;
- l'accès à des capacités de stockage pour faire face aux fluctuations saisonnières de la demande de ces clients.

Attribuables ou non, les coûts se doivent d'être récupérés. La question qui se pose est alors la suivante : comment déterminer la part que chaque client (ou groupe de clients) doit supporter et quel mécanisme (tarification) utiliser pour récolter la part attribuée à chacun ? La compétitivité et la performance de Westdeutsches Erdgas dépendent, pour une part non négligeable, de la qualité de la règle de partage des coûts et du mécanisme de tarification qui seront mis en place. Notons dès à présent que la problématique soulevée par Westdeutsches Erdgas implique le rapprochement novateur de deux considérations différentes mais intimement liées : le partage des coûts communs et la tarification.

La différence fondamentale entre ces deux méthodes se situe principalement au niveau de la demande à l'origine du coût. Lors du partage des coûts cette dernière est donnée en ce sens que la demande de chaque client n'est pas supposée varier en fonction de la part des coûts qui lui est attribuée. La tarification, à l'inverse, est fondée sur l'hypothèse que la demande est sensible au tarif.

Bien que les méthodes de partage des coûts communs et de tarification développées depuis quelques années constituent des outils puissants de gestion et de mise en marché et que l'analyse scientifique de ces méthodes soit déjà relativement avancée, leur application au sein des organisations (entreprises, alliances ou réseaux d'entreprises, gouvernements) reste relativement embryonnaire et souvent tributaire d'une approche historique ad hoc, plutôt que rationnellement choisie pour maximiser la performance et la valeur de l'organisation. Il faut reconnaître que l'analyse de ces méthodes exige une certaine dose de mathématiques. Il est important, par ailleurs, de préciser que ces mathématiques ne servent qu'à traduire, dans un langage rigoureux et programmable, les contraintes institutionnelles et les objectifs que doit satisfaire ou rencontrer la règle de partage recherchée. Il faut insister sur le fait que le choix d'une méthode de partage de coûts doit se faire sur la base de ses propriétés. Il est contre-indiqué de choisir une méthode sur la simple base d'un seul ou même de quelques exemples, comme le font traditionnellement les organisations ou consortiums, à la suite de longues et souvent difficiles négociations entre les parties, chacune d'elles privilégiant évidemment la méthode qui lui est la plus favorable. Il est par ailleurs beaucoup plus simple et logique d'identifier une méthode parmi l'ensemble des méthodes possibles sur la base de ses propriétés et ce avant même de connaître les résultats qu'elles peuvent donner lors d'applications concrètes.

Le problème de partage des coûts décrit pour les besoins de cette étude est le suivant :

Un négociant gazier verticalement intégré (en l'occurrence Westdeutsches Erdgas) supporte des coûts pour fournir du gaz à ses clients finals.

« [...] En effet, un négociant mobilise des contrats d'approvisionnements négociés auprès des producteurs ou intervient sur des marchés spots, un accès aux réseaux de transport et de distribution ainsi que des capacités de stockage pour faire face aux fluctuations saisonnières de la demande de ces clients. Parmi ces coûts, une part prépondérante n'est pas directement attribuable à un client donné, il s'agit des coûts d'approvisionnement, d'entrée sur le réseau de transport et des coûts de stockage. Les coûts relatifs au transport et au stockage sont déterminés par des tarifs régulés que les gestionnaires d'infrastructures appliquent ; ils sont donc identiques quelle que soit la nature de celui qui sollicite l'accès à l'infrastructure».

Dans ce contexte, le projet a pour objectif de proposer des outils permettant d'allouer les coûts communs supportés par le négociant gazier. Cette problématique implique, le rapprochement novateur de deux considérations différentes mais intimement liées : le partage des coûts communs et la tarification. Notons qu'il n'y a pas nécessairement de corrélation très forte entre la conception des tarifs et les méthodes de répartition des coûts en vigueur dans les entreprises. La concordance entre la répartition des recettes et celle des coûts ne peut donc habituellement être vérifiée que par simulation et, à la rigueur, ex post. La divergence entre les deux représente ce qu'on qualifie communément d'interfinancement entre les classes de clients. Lorsqu'un client paie moins que ce qu'il aurait dû payer en vertu de la répartition des coûts, on dit qu'il est financé par les clients qui paient plus que leur part de coûts.

Souvent les exigences des organismes de régulation portent à la fois sur les règles de répartition des coûts et sur les tarifs. On veut souvent que les premières soient les plus « équitables » possibles et que les deuxièmes donnent des résultats qui se rapprochent de la répartition des coûts, et donc ne produisent pas trop d'interfinancement. L'entreprise doit par contre tenir compte au premier chef de la position concurrentielle des différents tarifs, des risques inhérents à chaque catégorie de consommateurs et de l'« équité » entre les classes tarifaires.

Les préoccupations des régulateurs en ce qui concerne la répartition des coûts et la prise en compte de cette répartition dans la fixation des tarifs ne sont généralement pas au diapason des exigences d'une tarification optimale ou efficace. Ces préoccupations donnent lieu à un risque réglementaire non négligeable.

La théorie économique veut qu'il n'y ait pas de mal, bien au contraire, pour un monopole sujet à une réglementation de ses profits, ou encore pour une entreprise avec pouvoir de marché plus ou moins limité par la concurrence, à se préoccuper de la profitabilité relative des services qu'il offre et par conséquent à discriminer entre les clients en fonction de ce qu'ils sont prêts à payer étant donné les alternatives dont ils peuvent bénéficier.

À l'inverse, une tarification basée exclusivement sur une formule de partage des coûts, même si cette formule obéit à des critères d'équité fort défendables, peut donner des résultats très différents d'une tarification efficace dans la mesure où elle ne tient aucunement compte des élasticités prix des différentes composantes des demandes globale et spécifique des diverses clientèles.

Dans le cadre de la problématique de Westdeutsches Erdgas, nous avons représenté le couplage entre partage des coûts communs et tarification de la manière décrite dans la figure qui suit.

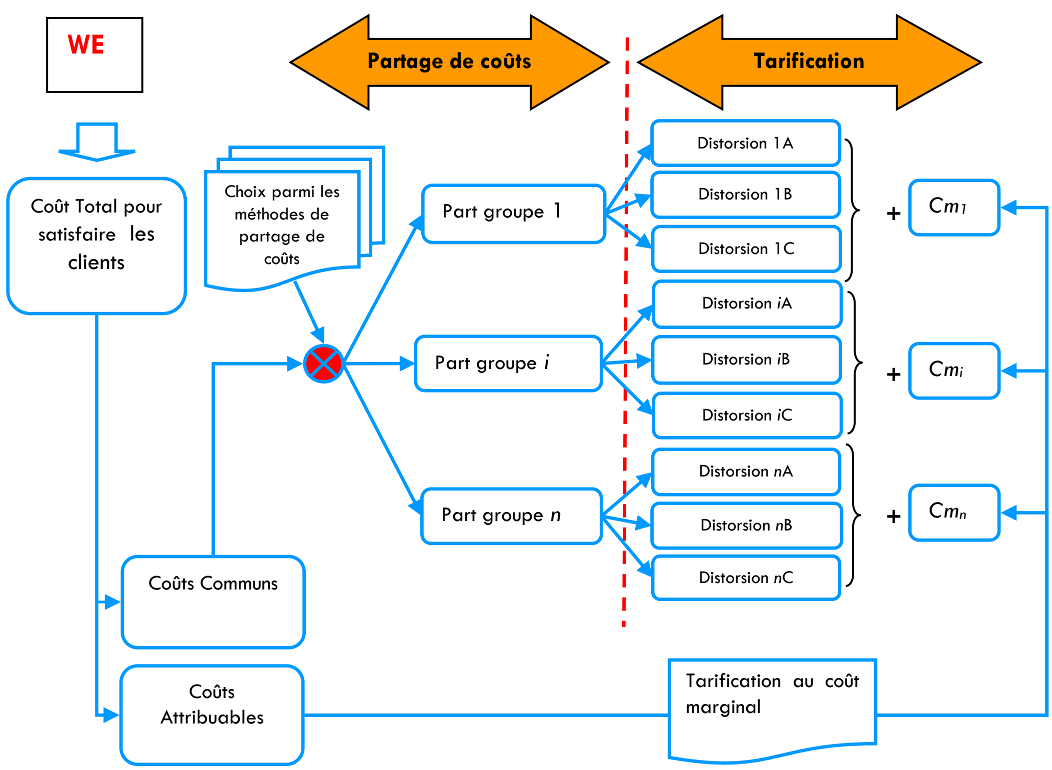


FIGURE 1 : DU PARTAGE DES COÛTS À LA TARIFICATION

Cette figure s'interprète de la manière suivante. Westdeutsches Erdgas supporte divers coûts pour satisfaire ses clients. Ces coûts se partagent en coûts communs (au départ non attribuables) et coûts attribuables ou spécifiques. Au cours d'une première étape (à gauche de la ligne en pointillés), les coûts communs sont répartis, à l'aide d'une méthode appropriée de partage des coûts, entre les divers groupes de clients identifiés. Une fois cette étape franchie, on passe à la phase de tarification (à droite de la ligne en pointillés). Il convient au cours de cette étape de récupérer, pour chaque groupe de clients, l'ensemble des coûts attribués à ce groupe. Les coûts qui étaient attribuables au départ pourront souvent être récupérés par une tarification au coût marginal. Les coûts communs attribués aux divers groupes, dans la première étape, seront récupérés grâce aux distorsions par rapport aux coûts marginaux en s'assurant de s'éloigner au minimum de la solution optimale[16]. À ce stade, chaque groupe de clients sera possiblement scindé en plusieurs catégories et le processus de tarification pourra être affiné davantage. Ce phénomène est représenté par les trois distorsions (catégories) proposées pour chaque groupe.

Le couplage du partage des coûts et de la tarification présenté n'est en réalité qu'un zoom sur l'ensemble de la « chaîne de création de valeur ». En effet, il convient d'ajouter pour être complet d'une part l'investissement à l'origine des coûts et d'autre part différentes incertitudes ou risques susceptible de modifier le montant des coûts à allouer.

2.2 - Les sources d'incertitude ou de risque dans l'allocation des coûts : risque de marché, risque opérationnel, risque financier

Le modèle présenté dans la sous-section précédente ne tient pas compte d'une part de l'investissement générateur des coûts et d'autre part des différentes sources d'incertitude et de risque pouvant affecter le montant de ces coûts.

Dans le cadre d'analyse qui est le nôtre, les sources d'incertitude et de risque sont nombreuses. On peut à titre d'illustration citer :

- L'incertitude sur les coûts totaux de l'infrastructure (qu'il faudra en bout de piste partager): incertitude sur les délais de construction, sur les prix des facteurs, sur la mise en place réussie de la technologie (implémentation) ;
- L'incertitude sur la taille du marché (long terme) et volatilité de la demande (court terme) : prix relatifs, croissance économique, environnement réglementaire, conjoncture politique nationale et internationale ;
- L'incertitude sur le prix et les caractéristiques des sources alternatives de gaz naturel (concurrence) ;
- L'incertitude sur le prix et caractéristiques des produits substituts (concurrence) ;
- L'incertitude sur le prix et caractéristiques des produits complémentaires
- L'incertitude liée à la production : prix des facteurs, bris d'équipement, rupture de contrats.

Toutes ces incertitudes sont susceptibles d'affecter le montant des coûts à partager. Certaines de ces incertitudes peuvent être évaluées, contrôlées et utilisées afin de maximiser le profit. A cette fin des méthodes d'évaluation des investissements performantes ont été développées. D'autres incertitudes, comme celle liée à la sensibilité de la demande, peuvent être « maîtrisées » à l'aide des outils de tarification existants. Dans la section qui suit nous présentons une version dynamique de la figure 1 permettant de visualiser comment et où ces incertitudes doivent être évaluées, contrôlées et utilisées pour gagner en performance.

[16] Les distorsions seront calculées en fonction de la règle de l'inverse de l'élasticité.

7:3 - EVALUATION DES INVESTISSEMENTS, PARTAGE DES COÛTS ET TARIFICATION

Le couplage du partage des coûts et de la tarification est, comme nous l'avons signalé en introduction, un zoom sur les deux derniers maillons de la « chaîne de création de valeur ». L'investissement, premier maillon de la chaîne, doit être intégré pour obtenir une représentation la plus complète possible du processus de création de valeur. Dans ces conditions, l'incertitude et le risque vont de fait faire leur apparition.

La représentation de la « chaîne de création de valeur » qui se trouve à la page suivante constitue une première tentative de représentation des liens unissant l'investissement au partage des coûts et à la tarification.

Ce schéma peut s'interpréter de la manière suivante. L'objectif de la firme est de réaliser du profit :

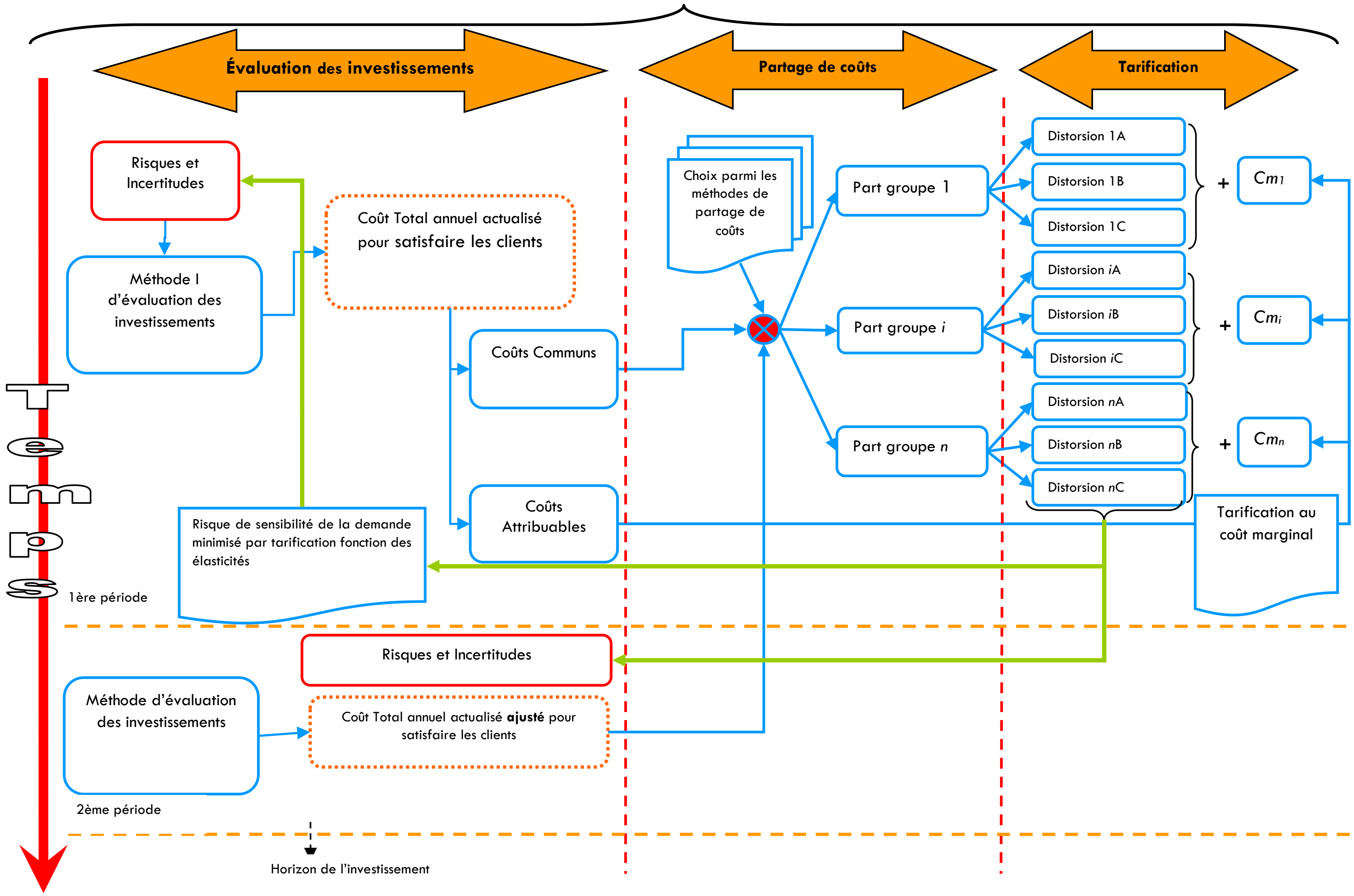
- sur un certain nombre de période (deux sont représentées dans le schéma)
- dans un univers risqué
- en effectuant des investissements générateurs de coûts non attribuables.

La première étape consiste à évaluer les risques et différentes incertitudes. Dans un contexte, comme celui représenté dans la figure, où l'entreprise devra ou voudra procéder en aval de l'investissement à une allocation de coûts entre différents groupes de clients et ce pour fins de tarification, les flux monétaires à considérer dans l'évaluation de l'investissement découlent de l'application de la **méthode d'allocation des coûts**, appliquée à la structure des coûts découlant de la technologie choisie, et de la **méthode de tarification**, appliquée aux caractéristiques de la demande (incertaine) et des marchés (volatils) auxquels l'entreprise fait face. Ces flux monétaires sont eux-mêmes nécessairement incertains, volatils et risqués étant donné les sources de risques que nous avons identifiés plus haut. Les informations découlant du partage des coûts et de la tarification sont représentées par la flèche verte. Notons que les distorsions dans la tarification générées pour récupérer les coûts communs sont définies en tenant compte des élasticités des demandes. Ceci permet de minimiser l'impact de la tarification sur l'évaluation de l'investissement et donc sur la part des coûts à allouer. Il n'en demeure pas moins que le partage des coûts et la tarification se transforment ici en outil d'évaluation de l'investissement. Afin d'optimiser l'évaluation de l'investissement, il convient de choisir la méthode de partage des coûts dès le début de la procédure sur la base de ses propriétés. Une fois ce choix réalisé, il ne devrait pas évoluer au cours des périodes.

Toute la difficulté consiste à trouver un point fixe dans l'évaluation des investissements (i.e. lorsque le partage des coûts et la tarification ont un effet non significatif sur le niveau d'investissement).

Une fois la première période passée, il est possible d'évaluer à chaque période le coût total annuel actualisé afin de tenir compte d'éventuelles nouvelles informations ou encore de nouvelles opportunités d'investissement. Notons que les méthodes d'évaluation des investissements peuvent être différentes d'une période à l'autre tandis que la méthode de partage de coût est elle définie pour l'ensemble des périodes sur la base des propriétés qu'elle possède.

CHAINE DE CRÉATION DE VALEUR DE WE



7:4 - EVALUATION DES INVESTISSEMENTS : PRISE EN COMPTE DES SOURCES DE RISQUES

Cette section vise à clarifier les fondements de l'actualisation des flux monétaires définissant et caractérisant le choix d'une technologie ou d'un parc d'équipements dans un contexte où plusieurs sources de risque sont présentes et affectent de manière différente ces flux monétaires. Dans un contexte où l'entreprise devra ou voudra procéder en aval de l'investissement à une allocation de coûts entre différents groupes de clients et ce pour fins de tarification, les flux monétaires à considérer dans l'évaluation de l'investissement découlent de l'application de la méthode d'allocation des coûts, appliquée à la structure des coûts découlant de la technologie choisie, et de la méthode de tarification, appliquée aux caractéristiques de la demande (incertaine) et des marchés (volatils) auxquels l'entreprise fait face. Ces flux monétaires sont eux-mêmes nécessairement incertains, volatils et risqués étant donné les sources de risques que nous avons identifiés plus haut. Le risque global de l'investissement peut à son tour être caractérisé comme constitué d'une partie systémique non diversifiable et d'une partie diversifiable.

La prise en compte du risque systémique non-diversifiable d'un projet d'investissement peut alors être conduite en deux étapes : (i) par la décomposition des flux monétaires en un nombre variable de composantes correspondant aux diverses sources ou types de risque présents dans le projet considéré et (ii) par le calcul de la valeur actualisée de chacune des composantes ainsi obtenues à l'aide d'un taux d'actualisation approprié incluant une prime de risque spécifique à la composante considérée. La valeur du projet est alors obtenue en prenant la somme des valeurs présentes des diverses composantes.

Alternativement, les différentes composantes de flux monétaires peuvent être corrigées pour leur risque respectif afin d'obtenir l'équivalent certain de chacune des composantes. La valeur du projet est alors obtenue en prenant la somme des équivalents certains actualisée au **taux sans risque, identique, unique et observable**, correspondant au taux de préférence temporelle, donc au taux de substitution entre consommation future et consommation présente, toutes deux considérées comme certaines.

De manière générale, cette approche à l'évaluation d'un projet (à laquelle nous associerons le sigle VAN-O pour « Valeur Actualisée Nette Optimisée ») mènera à une valeur calculée pour le projet qui sera différente de la valeur obtenue par l'approche usuelle de la valeur actualisée nette (VAN) qui actualise à un taux unique, corrigé pour le risque global agrégé du projet d'investissement, l'espérance des flux financiers associés au projet. L'approche VAN-O, qui s'appuie sur des fondements analytiques plus rigoureux, pourra dans certains cas entraîner des changements importants dans le choix des investissements, d'où l'importance pour les entreprises et organisations, tant publiques que privées, de bien comprendre les fondements et les enjeux des méthodes VAN-O et VAN afin de pouvoir la mettre en application aussi rigoureusement que possible.

L'incohérence entre ces méthodes ou approches à l'évaluation de projets vient du fait que la VAN actualise la séquence de flux monétaires caractérisant un projet à **un seul taux** composé d'un premier élément représentant le taux de préférence temporelle (le taux sans risque) et d'un second élément représentant une prime pour le risque, que ce risque provienne d'une source unique ou de plusieurs sources ou facteurs.

La méthode de la VAN telle qu'utilisée et appliquée dans la plupart des entreprises et organisations pour le choix des investissements viole certains principes fondamentaux de la création de valeur, en particulier le principe d'additivité et le principe d'absence d'arbitrage[17]. Il faut donc séparer les rôles et effets respectifs de la préférence temporelle, présente même en contexte de certitude, et de l'aversion aux risques, qui se traduit par une prime de risque associée au taux d'actualisation. La méthode usuelle de la VAN comporte ainsi de sérieuses lacunes que corrige la méthode VAN-O qui est rigoureusement fondée sur le principe d'additivité et le principe d'absence d'arbitrage et s'avère donc plus adéquate pour des projets à sources de risque multiples. Or tous les projets réels sont à toutes fins utiles des projets à sources de risque multiples.

4.1 - La VAN-O

Selon la méthode de la VAN-O, l'entreprise doit évaluer ses investissements en décomposant cette évaluation en quatre étapes :

- 1. désagréger la séquence des flux monétaires en ses différentes composantes (par exemple, la séquence des coûts de production, la séquence des revenus sur les marchés à prix fixe et la séquence des revenus sur les marchés à prix volatil ;
- 2. corriger pour le risque chacune des séquences composantes en déterminant les équivalents certains respectifs à chaque période de chacune des séquences ;
- 3. additionner à chaque période les équivalents certains des différentes séquences pour obtenir l'équivalent certain des flux monétaires nets du projet à chaque moment ou période ;
- 4. actualiser l'équivalent certain des flux monétaires nets du projet à chaque moment ou période au taux sans risque et faire la somme sur l'ensemble des moments ou périodes pour déterminer la valeur actualisée du projet.

La méthode VAN-O consiste donc à désagréger les revenus nets selon les différentes sources de risque présentes et à évaluer séparément chacune des composantes comme si elles représentaient des projets séparés. Si plusieurs sources de risque sont présentes, l'utilisation d'un taux d'actualisation unique qui combine prime de risque et préférence temporelle (le taux sans risque) viole certains principes fondamentaux de création de valeur. Une méthodologie adéquate consiste à décomposer les flux monétaires du projet par source de risque et de calculer la valeur présente nette des diverses composantes après avoir tenu compte de leur risque non-diversifiable propre, soit en déterminant les équivalents certains, soit en actualisant chaque séquence à un taux propre, adéquatement corrigé pour le risque.

4.2 - Projets privés et projets publics

La méthodologie de la VAN-O s'applique tant à l'évaluation des investissements dans le secteur privé (maximisation du profit ou de la valeur de l'entreprise) qu'à celle des investissements dans le secteur public (maximisation de la richesse collective). Il est également possible avec cette approche de la VAN-O de fournir une réponse aux inquiétudes que suscite le calcul économique chez les défenseurs de projets à bénéfices éloignés dans le temps, notamment les projets de développement durable, ceux d'infrastructure de long terme et les projets liés aux changements climatiques.

GOLLIER (2005) démontre à l'aide d'un modèle d'optimisation inter-temporel en incertitude, le bien-fondé de la méthodologie dans un contexte de maximisation de la richesse collective. Comme nous, l'auteur propose un taux

[17] Notons que les organisations appliquent la VAN à taux unique car c'est typiquement cette méthode qui est enseignée dans les écoles de commerce. En effet, on y met surtout l'emphase sur la «mécanique» de l'actualisation sans aborder la notion de risque de façon suffisamment rigoureuse.

d'actualisation unique (taux reflétant la préférence temporelle) mais appliqué à des flux monétaires préalablement ajustés pour le risque (équivalents certains). L'objectif de Gollier est aussi de proposer une méthodologie d'évaluation de projets à des décideurs du secteur public qui doivent souvent concilier des intérêts conflictuels. L'emphase est mise sur le développement d'une méthodologie rigoureuse, cohérente avec la maximisation du bien-être collectif, qui évite la tentation des ajustements ad-hoc.

Selon l'auteur, la réponse se trouve dans la détermination du taux de préférence temporelle qui «…*REFLETE L'EFFORT QUE LA SOCIETE EST PRETE A FOURNIR AFIN D'AMELIORER LE BIEN-ETRE FUTUR*… ». Gollier montre que le taux d'actualisation socialement efficace se décompose en trois composantes: le taux de préférence pur pour le présent, qui a un rôle analogue au taux sans risque constant; l'effet richesse qui augmente la valeur d'un dollar aujourd'hui si les agents anticipent une hausse future de la richesse (il conviendra alors d'utiliser un taux d'actualisation plus élevé pour les périodes éloignées); l'effet incertitude ou l'effet précaution qui augmente la valeur d'un dollar demain d'autant plus que l'incertitude macroéconomique sur l'avenir est grande (équivalent certain de la richesse future plus faible; il conviendra alors d'utiliser un taux d'actualisation plus faible pour les périodes éloignées).

Tel que mentionné, le taux de préférence temporelle reflète l'effort que nous sommes prêts à fournir aujourd'hui pour le bien-être des générations futures et rien ne contraint ce taux à être constant. Le niveau du taux de préférence temporelle dépendra de la richesse anticipée des générations futures et du niveau d'incertitude entourant cette richesse. Par conséquent, la structure à terme de ce taux n'est pas nécessairement plate. En effet, si on anticipe que la croissance de la richesse diminuera dans le temps ou que l'incertitude entourant cette croissance augmentera, le taux de préférence temporelle sera une fonction décroissante du temps.

4.3 - VAN-O et VAN : erreurs à éviter

Ainsi, une application systématique de la méthode de la VAN dans l'évaluation et le choix de projets amènera les gestionnaires d'entreprise à commettre deux types d'erreur :

- d'abord, à accepter des projets qui réduiront la valeur de l'entreprise et à l'inverse à rejeter des projets qui augmenteraient cette valeur ;
- ensuite, à faire le mauvais choix de projet en présence de projets mutuellement exclusifs.

En effet, en présence de multiples sources de risque différentes les unes des autres, de toute évidence la situation la plus courante et présente à toutes fins utiles dans tous les projets, la méthode usuelle de la VAN ne respecte ni le principe d'additivité ni le principe d'absence d'arbitrage. Or ces deux principes sont les fondements mêmes de la finance moderne. Plutôt que de s'aventurer dans une discussion académique hermétique à une majorité de gestionnaires, nous pourrons dans une étape ultérieure « prouver » nos avancées par des exemples qui viendront contredire une croyance encore trop répandue chez plusieurs gestionnaires à l'effet que la prise en compte correcte de ces multiples sources de risque ne changerait pas les décisions de l'entreprise.

7:5 - EVALUATION DES INVESTISSEMENTS ET OPTIONS RÉELLES

L'application systématique et usuelle de la VAN néglige en plus une autre source de création valeur, à savoir les options réelles qui apparaissent dans pratiquement tous les projets, en particulier ceux (i) à caractère irréversible (lorsqu'il y a un coût significatif à changer d'idée et faire marche arrière), (ii) où une certaine flexibilité de gestion existe dans la réalisation du projet, (iii) en présence d'un environnement futur incertain. En plus des deux types d'erreur mentionnés ci-dessus, deux autres types d'erreur sont couramment commises dans l'évaluation des investissements: d'abord, on néglige systématiquement d'évaluer ces options réelles qui sont des sources de valeur au même titre que les flux financiers; ensuite, on néglige la conception optimisée d'un projet en y incorporant le cas échéant des options réelles qui peuvent faire la différence entre la maximisation de la valeur de l'entreprise et une gestion simplement satisfaisante.

Le choix d'une technologie, d'une structure organisationnelle, d'un portefeuille de contrats plus ou moins fermes et flexibles avec des fournisseurs ou des clients, d'un parc d'équipements plus ou moins compatibles et interopérables mais propices à satisfaire au meilleur coût une demande qui reste, au moment où ces choix doivent être faits, partiellement inconnue et fondamentalement incertaine et volatile, est un problème majeur de l'entreprise.

Lorsqu'on applique une approche options réelles à l'évaluation d'un investissement et à la gestion stratégique, c'est que l'on perçoit la prise de décision stratégique comme un processus séquentiel visant à la fois la réduction active de l'exposition au risque baissier et l'augmentation de l'exposition aux opportunités favorables en choisissant le timing, l'échéancier et divers ajustements tout au long du projet. L'approche des options réelles se situe entre les décisions financières pures et les autres domaines de la prise de décision en situation risquée, tels l'évaluation de projet, l'entrée et la sortie d'un marché, la restructuration et la réingénierie organisationnelle, l'adoption de nouvelles technologies, etc.

Elle souligne un état d'esprit et utilise des méthodologies auxquelles souscrivent beaucoup de gestionnaires, offrant ainsi un langage commun. Les options réelles concernent plusieurs domaines primordiaux des entreprises modernes : la couverture et le développement du marché, la finance, la gestion des ressources humaines, la gestion de la technologie, la R&D, la gestion des connaissances, etc.

Cette approche représente un changement important dans la gestion stratégique mais demeure relativement peu connue malgré son adoption par certaines grandes entreprises. Néanmoins, la contribution des gestionnaires supérieurs à la valeur de l'entreprise peut se mesurer à l'aune des options qu'ils font surgir et qu'ils gèrent.

Quoique largement utilisées en finance, les techniques d'optimisation dynamique stochastique sont loin d'être l'apanage de cette discipline. Utilisées également par des gestionnaires et des ingénieurs, elles représentent un outil et un langage commun qui favorise le déploiement des techniques et des méthodologies des options réelles de la finance vers d'autres domaines.

La dimension technique de l'évaluation des options est certes importante et c'est pourquoi la percée conceptuelle sous-jacente a été reconnue par l'attribution en 1997 du Prix Nobel de sciences économiques à Robert C. Merton et Myron S. Scholes "pour une nouvelle méthode pour déterminer la valeur des produits dérivés". Mais au-delà des techniques, l'approche des options réelles est surtout une façon de penser et d'ajuster son comportement. Elle repose sur les éléments suivants:

- Reconnaître que l'incertitude crée des opportunités et de la valeur ;
- Reconnaître que cette valeur nécessite des décisions adéquates pour se matérialise;

- Identifier les sources de l'incertitude et recueillir l'information ;
- Identifier des décisions (options) qui favorisent l'exposition à des résultats favorables ;
- Identifier des décisions qui diminuent l'exposition au risque baissier ;
- Établir des **règles** de décision optimales.

Un bon plan stratégique de développement d'infrastructures est un plan qui définit et crée des options réelles pour l'entreprise dans un avenir prévisible, et met en place un processus de prise de décision optimisé qui exploite ces options de manière fructueuse. Une fois de plus, les options réelles doivent être reconnues, construites et évaluées pour chaque étape principale de chaque projet: les alliances, les acquisitions et fusions, les effets connexes, le développement et la gestion technologique, la restructuration organisationnelle, etc. La valeur de la planification stratégique, des investissements entre autres, en tant que telle est déterminée par la qualité des options réelles créées et intégrées au plan et par la qualité de la procédure d'évaluation de ces options réelles. C'est dans ce sens-là que la création et la gestion des options réelles, par l'exploitation de l'incertitude, créent de la valeur pour l'entreprise et représentent les responsabilités les plus importantes des gestionnaires supérieurs dans l'élaboration d'un plan stratégique.

La planification stratégique est un exercice de gestion de la flexibilité. Les plans doivent spécifier les nœuds de décision, c'est-à-dire, les gestes futurs à poser ou non, à des dates qui peuvent être données mais qui sont le plus souvent à choisir de façon optimale en fonction du développement stochastique de l'environnement de l'entreprise. La préparation d'un plan stratégique n'est pas un exercice passif d'anticipation du futur; c'est un exercice de façonnement du futur ou, plus précisément, un exercice de préparation du des mécanismes par lesquels le futur se déploiera, en temps et lieux, à l'avantage des décideurs. Les gestionnaires plantent les graines d'une flexibilité future en identifiant et en créant des options réelles. Encore une fois, c'est là est une différence importante entre les options réelles et les options financières: avec les options réelles, les gestionnaires créent l'outil ou utilisent les outils existant de manière très créative; dans le cas des options financières, les dirigeants financiers choisissent généralement des outils – parfois des outils très exotiques – parmi les outils déjà disponibles.

Une option financière ne peut avoir une valeur négative car son propriétaire a la possibilité, jamais l'obligation, de l'exercer. Une caractéristique importante des options réelles dans un environnement oligopolistique est qu'une firme détenant certaines options réelles peut avoir moins de valeur que si elle en était démunie. Ce paradoxe provient du mécanisme suivant. La valeur des options réelles provient de la gestion active des étapes d'un projet au fur et à mesure que l'incertitude se résorbe. Cependant, la possibilité de modifier le déroulement d'un projet sous-entend que l'engagement à poursuivre et à compléter le projet est assez faible. Ce manque d'engagement peut inviter un comportement plus agressif de la part de compétiteurs dont l'objectif serait d'éliminer l'entreprise ou le projet. Il peut aussi encourager des attaques plus agressives de la part des opposants au projet. La gestion active signifie que ces options, bien qu'ayant de la valeur dans un environnement d'affaire concurrentiel non réactif, peuvent avoir une valeur négative dans un environnement d'affaire oligopolistique réactif: les gestionnaires doivent savoir quand brûler leurs vaisseaux. C'est une responsabilité essentielle des gestionnaires de haut niveau que d'identifier quelles options devraient être fermées au profit d'un engagement fort et quelles options devraient être gardées ouvertes au nom de la flexibilité.

La mise en place d'une approche options réelles n'est cependant pas facile. Les procédures standard utilisées en finance doivent souvent être adaptées ou remplacées par d'autres techniques. Chaque application de l'approche sera vraisemblablement spécifique à son contexte. Les options possibles doivent être identifiées et décrites; l'information pertinente doit être identifiée et recueillie soigneusement; le gestionnaire qui utilise les options réelles doit avoir la connaissance et la formation requises pour adapter les procédures standard à chaque situation particulière. Plus important peut-être, l'approche options réelles est un état d'esprit, une capacité et un désir de détecter les décisions qui créent des opportunités et de se protéger contre les revers, en agissant sur ceux-ci pour créer de la valeur au profit de l'entreprise.

Pour les gestionnaires qui ont cet état d'esprit, les options réelles sont un outil qui permet de mieux faire coïncider l'intuition avec les procédures conventionnelles de prise de décision. Avant tout elles leur permettent de donner un contenu quantitatif plus précis à des règles intuitives, leur donnant ainsi un avantage sur les compétiteurs.

7:6 - CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons débuté cette étude avec comme objectif de caractériser les liens méthodologiques entre trois maillons particulièrement importants de la chaine de valeur dans l'entreprise, à savoir l'évaluation des investissements, le partage des coûts entre entités de l'entreprise et la tarification de biens et services. De toute évidence, l'analyse de ces maillons sont intimement reliés non seulement entre eux mais également à la maximisation de la valeur de l'entreprise.

Nous avons présenté les liens entre partage des coûts communs et tarification efficace puis caractérisé les liens entre choix des investissements et partage des coûts en identifiant un ensemble de sources de risques présentes dans les méthodologies de partage des coûts et en reconnaissant que chaque technologie et chaque parc d'équipements entrainent une configuration différente de coûts communs et de coûts attribuables aux différentes classes ou groupes de produits ou de clients. Une fois les sources de risques, présentes dans la méthode retenue de partage des coûts, identifiées et modélisées, elles deviennent autant de sources de risque à prendre en compte lors de l'évaluation des investissements. Similairement, une fois la technologie ou le parc d'équipements identifiés, la méthode de partage de coûts peut être appliquée et la tarification efficace mise en place, étant donné les contraintes et objectifs auxquels l'entreprise fait face.

Pour l'évaluation des investissements comme telle, nous avons développé les principes sous-jacents et les modalités propres à la méthode VAN-O et nous avons insisté sur l'importance de considérer et de bien déterminer la valeur des options réelles présentes dans le projet. La boucle est ainsi bouclée. Il reste cependant beaucoup à faire pour rendre davantage opérationnelle la prise en compte de ces méthodes et de leurs liens dans une optique de maximisation de la valeur de l'entreprise. Mais les jalons posés ici pourront, le cas échéant, être développés et implémentés au contexte particulier de Westdeutsches Erdgas représenté schématiquement dans la « chaîne de création de valeur » de la section 2 ci-dessus.

Fundamentals of Real Options Valuation

CHAPTER 8

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Éric Gravel. Les références aux ouvrages et articles cités dans ce chapitre sont disponibles à la fin du tome 2.

8:1 - L'INCERTITUDE, LA FLEXIBILITÉ ET L'IRRÉVERSIBILITÉ

En évaluation d'investissements, il y a **incertitude** quand la valeur du projet ou de l'actif évolue suivant un processus aléatoire. Pour un projet donné, les sources de variabilité peuvent être multiples, par exemple, l'incertitude peut provenir de la volatilité dans la quantité et dans le prix (input ou output) et/ou elle peut être technologique et/ou réglementaire. Si un gestionnaire a la possibilité selon l'état de la nature de (non exclusif) :

- retarder un investissement;
- discontinuer un projet à plusieurs phases;
- suspendre temporairement ou définitivement la production;
- etc.

nous disons qu'il dispose de **flexibilité**. Pour sa part, une décision d'investissement est parfaitement réversible quand on peut récupérer les sommes investies advenant un état de la nature défavorable à la décision d'investissement initiale. En général, la réversibilité est partielle et plus ou moins facile, voire impossible. Un investissement est **irréversible** s'il est quasi-impossible de récupérer les sommes investies advenant un revirement négatif.

Dans un contexte d'incertitude, si l'investissement à réaliser est irréversible et que le gestionnaire dispose de flexibilité, la VAN comme outil d'évaluation et de prise de décision tel que défini dans les sections précédentes (incluant VAN-O sans flexibilité) est sous-optimale.

Pour illustrer ce point, prenons le cas d'une firme neutre au risque qui a l'option d'attendre 2 ans avant de réaliser un investissement irréversible. Un déboursé de 1 600$ est nécessaire pour acquérir un actif qui peut produire une unité d'output à perpétuité. Supposons qu'il n'y a pas de coûts de production, que le taux sans risque est égal à 10% et que le prix pour une unité d'output évolue selon le graphique ci-dessous :

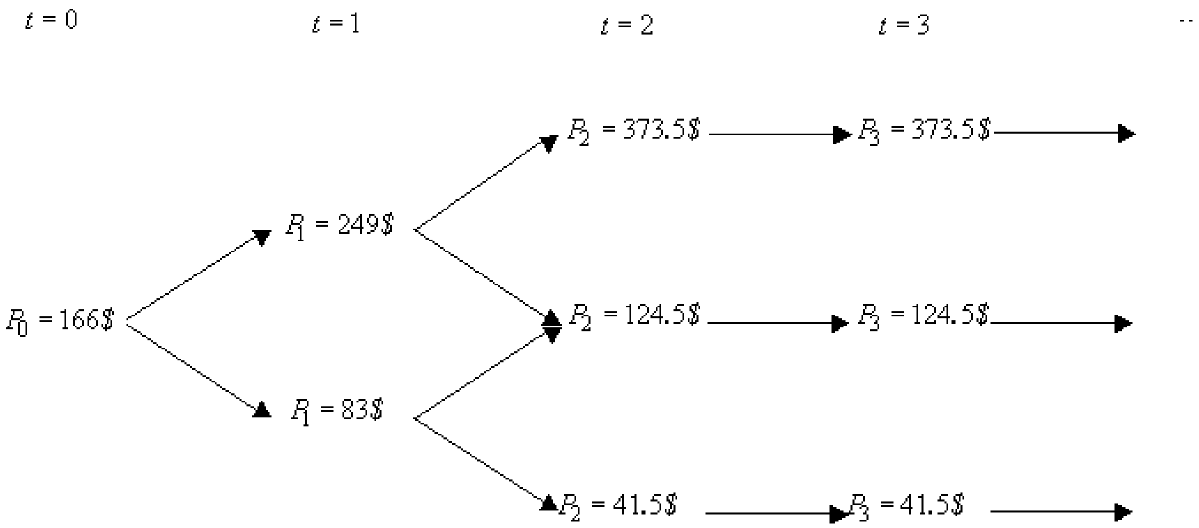


FIGURE 1. ÉVOLUTION DU PRIX D'UNE UNITÉ D'OUTPUT.

Aux périodes 0 et 1, la firme peut soit investir ou attendre et reporter sa décision à la prochaine période. Si la firme utilise la VAN comme critère de décision et ignore l'option d'attendre, elle investira en $t = 0$ car :

(8.1)

$$VAN = -1{,}600\$ + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{166\$}{(1.1)^t} = 60\$ > 0$$

Si la firme considère l'option d'attendre, à chaque période, elle sera guidée par le critère de décision suivant:

(8.2) $$max\{investir, attendre\}$$

Comparons à $t = 0$ la valeur de la stratégie statique (investir à $t = 0$ si VAN>0) à celle de la stratégie dynamique (application du critère de décision ci-haut). Cela revient à comparer une série de projets mutuellement exclusifs où chaque projet représente l'investissement effectué à une date différente. Pour ce, on applique le principe « d'optimalité » de Bellman qui peut se résumer comme suit :

Une politique optimale a la propriété suivante: peu importe l'état et la décision au temps t, les décisions à venir doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état qui résulte de l'état et de la décision en t.

Pour appliquer le principe « d'optimalité » de Bellman, il s'agit de procéder récursivement à partir de $t = 2$ et déterminer la stratégie optimale à chaque date conditionnel à l'application de la stratégie optimale aux date ultérieures. Pour ce, nous utiliserons la notation suivante :

$\Omega_t(P_t) \equiv valeur\ si\ la\ firme\ investit\ au\ temps\ t$

$F_t(P_t) \equiv valeur\ si\ la\ firme\ attend$

Au temps $t = 2$, puisque qu'il n'y a plus d'incertitude à partir de cette date, on a :

(8.3) $$F_2(P_2) - \Omega_2(P_2) \leq 0$$

Par conséquent, la décision à $t = 2$ si $P_2 = 373.50\$$ sera d'investir car :

(8.4)

$$\Omega_2(373.50\$) = -1{,}600\$ + \sum_{t=3}^{\infty} \frac{373.50\$}{(1.1)^{t-2}} = 2{,}135\$$$

et d'abandonner si $P_2 = 124.50\$$ ou $P_2 = 41.50\$$ car $\Omega(P_2) < 0$. Puisqu'il n'y a plus d'incertitude au-delà de $t = 2$, attendre contribue seulement à diminuer la valeur actualisée des flux monétaires provenant de la production du bien.

À $t = 1$, le gestionnaire doit choisir entre investir ou attendre à la prochaine période. Si $P_1 = 249\$$, la valeur d'investir immédiatement est égale à :

(8.5)

$$\Omega_1(249\$) = -1{,}600\$ + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{249\$}{(1.1)^{i-1}} = 890\$$$

tandis que la valeur d'attendre est égale à :

(8.6)

$$F_1(249\$) = \frac{0.5 * \Omega_2(373.5\$) + 0.5 * \Omega_2(124.5\$)}{1.1} = \frac{0.5 * 2{,}135\$ + 0.5 * 0\$}{1.1} = 970.45\$$$

Dans ce cas, puisque $F_1(249\$) > \Omega_1(249\$)$, la décision optimale est d'attendre à la prochaine période et d'investir seulement s'il y a une hausse de prix, i. e. si $P_2 = 373.50\$$. Si $P_1 = 83\$$, l'opportunité n'a aucune valeur.

Finalement, la décision à $t = 0$ sera de choisir entre investir aujourd'hui qui a une valeur de :

(8.7)

$$\Omega_0(166\$) = -1{,}600\$ + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{166\$}{(1.1)^{t}} = 60\$$$

ou de reporter la décision à la prochaine période qui a une valeur de :

(8.8)

$$F_0(166\$) = \frac{0.5 * F_1(249\$) + 0.5 * F_1(83\$)}{1.1} = \frac{0.5 * 970.45\$ + 0.5 * 0\$}{1.1} = 441.11\$$$

Puisque $F_0 > \Omega_0$, il est optimal d'attendre et comme nous l'avons démontré précédemment, la décision qui maximise la valeur du projet est d'attendre jusqu'à $t = 2$ et d'investir seulement si $P_2 = 373.50\$$. La différence $F_0 - \Omega_0 = 381.11\$$ représente la valeur de l'option d'attendre avant d'investir.

Même si il est relativement simple, l'exemple ci-dessus illustre très bien l'importance de prendre en compte la flexibilité (dans ce cas, investir ou attendre) en situation d'incertitude quand un investissement est irréversible. En effet, si l'investissement n'avait pas été irréversible, il aurait été optimal d'investir à $t = 0$ et de désinvestir dans le cas où $P_1 = 83\$$.

8:2 - L'ÉVALUATION OPTIONS RÉELLES : UN PROCESSUS EN QUATRE ÉTAPES

Évidemment, puisque l'évaluation options réelles vient pallier aux lacunes de la VAN traditionnelle pour ce qui est de la prise en compte de l'incertitude et de la flexibilité, l'effort d'analyse est un peu plus grand. La présente section résume les quatre grandes étapes de l'évaluation options réelles.

La première consiste à réaliser une description élaborée du projet, cela comprend :

- l'identification des différentes phases du projet ;
- l'identification des dépenses en capital ;
- l'identification des différentes composantes (quantité, prix, fréquence, etc.) des flux monétaires, et ;
- l'identification de tous les contraintes (contractuelles, réglementaires, etc.).

La deuxième consiste à identifier et caractériser les différentes sources d'incertitude, cela comprend :

- une description de l'évolution anticipée des variables d'état aléatoires (croissance, retour vers un prix d'équilibre, etc.) ;
- le choix des outils appropriés pour modéliser l'évolution des variables d'état aléatoires, et ;
- la collecte des données nécessaires à l'estimation des différents paramètres des modèles.

La troisième est d'identifier les sources de flexibilité, cela comprend :

- l'identification des décisions qui pourront être prises à des dates ultérieures ;
- déterminer si certaines de ces décisions peuvent être retardées ;
- l'identification des décisions à prendre en cours de production, et ;
- déterminer si il est possible d'ajouter d'autres points de flexibilité et à quel coût.

Enfin, la quatrième étape est de combiner les éléments des étapes 2 et 3 pour évaluer la valeur du projet conditionnelle à une gestion optimale de la flexibilité, les principaux outils utilisés sont :

- le modèle binomial ;
- la simulation Monte-Carlo et ;
- la résolution de l'équation différentielle (ou aux dérivées partielles) caractérisant l'évolution de la valeur du projet (ou de l'option).

Les prochaines sections résument les outils des étapes 2 et 4. Notez que la liste n'est pas exhaustive, nous touchons seulement aux outils les plus communément utilisés.

8:3 - LES PROCESSUS STOCHASTIQUES LES PLUS COURAMMENT UTILISÉS EN ÉVALUATION OPTIONS RÉELLES

Pour modéliser l'évolution des variables d'état aléatoires, les processus stochastiques les plus couramment utilisés en évaluation options réelles appartiennent à la classe des processus d'Ito qui peuvent se caractériser comme suit :

$$dP_t = \alpha(P_t, t)dt + b(P_t, t)dz \tag{8.9}$$

où $dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ avec $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ et où $a(P_t, t)$, la partie déterministe, et $b(P_t, t)$, la partie aléatoire, sont deux fonctions connues.

Dans le cas où $a(P_t, t) = \alpha P_t$ et $b(P_t, t) = \sigma P_t$, le processus se nomme **mouvement Brownien géométrique** (MBG) et les paramètre α et σ caractérisent la tendance du processus et sa variabilité, respectivement. Pour illustrer le phénomène MBG, nous pouvons réécrire (8.9) sous sa forme en temps discret :

$$P_{t+\Delta t} - P_t = \alpha P_t \Delta t + \sigma P_t \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \tag{8.10}$$

où Δt représente un intervalle de temps quelconque (par exemple : si $\Delta t = 1/12$ l'intervalle de temps est d'un mois). L'équation (8.10) peut aussi s'exprimer comme suit :

$$P_{t+\Delta t} = P_t(1 + \alpha \Delta t) + P_t(\sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}) \tag{8.11}$$

Puisque $E[\varepsilon_t] = 0$, l'espérance du prix au temps $t + \Delta t$ est égale à :

$$E_t[P_{t+\Delta t}] = P_t(1 + \alpha \Delta t) \tag{8.12}$$

On a donc :

$$P_{t+\Delta t} = E_t[P_{t+\Delta t}] + P_t(\sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}) \tag{8.13}$$

La Figure 14 illustre trois trajectoires générées par un MBG.

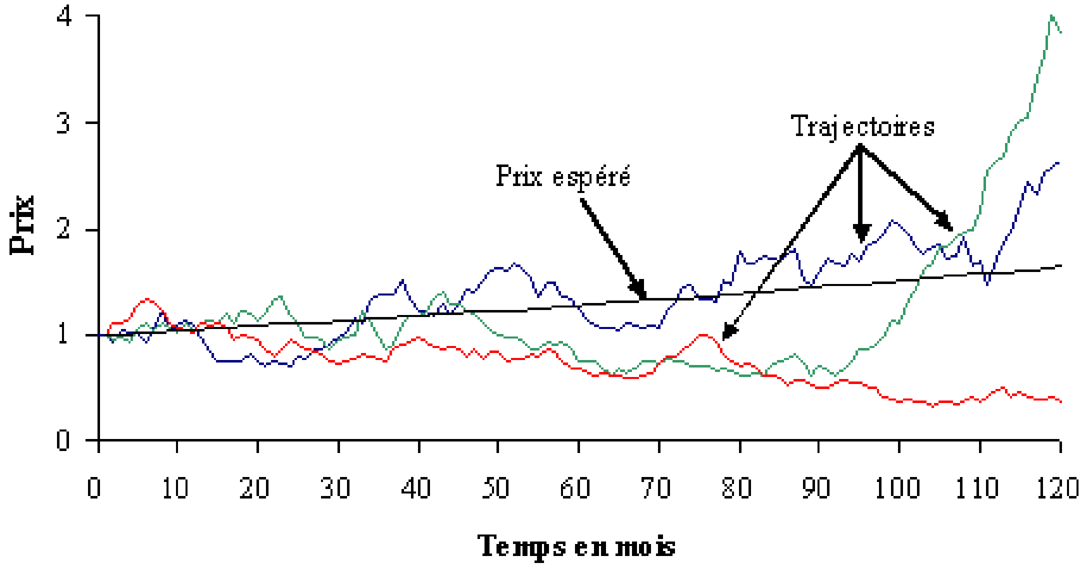


FIGURE 14. TRAJECTOIRES GÉNÉRÉES PAR UN MOUVEMENT BROWNIEN GÉOMÉTRIQUE.

En temps continu, nous pouvons démontrer qu'à t la distribution de $P_{t+\Delta t}$ est log-normale avec une espérance de :

(8.14) $$E[P_{t+\Delta t}] = P_t e^{\alpha \Delta t}$$

et une variance de :

(8.15) $$Var[P_{t+\Delta t}] = P_t^2 e^{2\alpha\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$$

ce qui implique la fonction de densité suivante pour $P_{t+\Delta t}$ (densité conditionnelle à P_t) :

(8.16)

$$f(P_{t+\Delta t}|P_t) = \frac{1}{\sigma P_{t+\Delta t}\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{\left(\log\left(\frac{P_{t+\Delta t}}{P_t}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right)^2}{2\sigma^2 \Delta t}}$$

Voir APPENDIX B

Nous avons argumenté dans les chapitres précédents qu'il est préférable de transformer la distribution des flux monétaires incertains en équivalent certain. Sous sa forme équivalent certain, le MBG peut s'exprimer comme suit :

(8.17) $$dP_t = (\alpha - \lambda_P \sigma)P_t dt + \sigma P_t dz$$

En supposant que le CAPM est le modèle d'équilibre pertinent pour le taux de rendement espéré, nous avons :

(8.18)

$$\lambda_P = \frac{\rho_{P_m}}{\sigma_m}(E[r_m] - r_f)$$

où ρ_{P_m} est le coefficient de corrélation entre le prix P_t et l'indice de marché et $\frac{E[r_m]-r_f}{\sigma_m}$ est le « market price of risk ».

Un autre processus couramment utilisé en évaluation options réelles est le **mouvement de retour à la moyenne** (MRM) qui peut exister sous plusieurs formes.[18]

Le prix de plusieurs denrées ou ressources naturelles (pétrole, gaz naturel, cuivre, etc.) suivent un MRM, ce phénomène peut s'expliquer comme suit : des périodes de prix élevés entrainent souvent des investissements en capital pour augmenter la production, ces prix élevés envoient aussi le signal aux consommateurs d'investir pour réduire leur consommation du bien dispendieux. L'effet net est de créer une pression à la baisse sur le prix. Le phénomène opposé se produit quand les prix sont initialement faibles (diminution de la production et augmentation de la consommation). Dans ce cas, le MBG n'est pas approprié car il permet de modéliser un unique taux de croissance.

Pour ce qui suit, considérons le MRM suivant :

(8.19)
$$dY_t = \eta(\alpha - Y_t)dt + \sigma dz_t$$

où $Y_t = \log P_t$ avec $dz_t = \varepsilon_t\sqrt{dt}$ et $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Le paramètre η caractérise la force du retour à la moyenne : plus η est petit, plus un écart entre le prix actuel et le prix moyen est persistant. En écrivant l'espérance de (8.19) comme suit, nous pouvons donner une autre interprétation au paramètre η :

(8.20)
$$\frac{dY_t}{dt} = -\eta(Y_t - \alpha)$$

et en intégrant de t_0 à t_1, on obtient :

(8.21)
$$\ln\left(\frac{Y_{t_1} - \alpha}{Y_{t_0} - \alpha}\right) = -\eta(t_1 - t_0)$$

Si on définit $(t_1 - t_0)$ comme étant la demi-vie espérée du processus, i. e. le temps moyen nécessaire pour réduire l'écart entre Y_{t_0} et α de 50%, on a $Y_{t_1} - \alpha = 0.5\left(Y_{t_0} - \alpha\right)$ ce qui donne la relation suivante entre η et la demi-vie espérée du logarithme du prix :

(8.22)
$$t_1 - t_0 = -\frac{\ln(0.5)}{\eta}$$

Nous pouvons démontrer qu'à t, la distribution conditionnelle à Y_t de $Y_{t+\Delta t}$ (distribution du logarithme du prix dans Δt périodes) est normale avec une espérance de :

(8.23)
$$\alpha_{t+\Delta t} = \alpha + (Y_t - \alpha)e^{-\eta\Delta t}$$

et une variance de :

[18]Voir Robel, G.F.. 2001. Real options and mean reverting prices. Technical report, Phantom Works Mathematics and Engineering Analysis, The Boeing Company. 5th Annual International Real Options Conference, University of California, Los Angeles.

(8.24)

$$b_{t+\Delta t}^2 = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\eta\Delta t})}{2\eta}$$

Pour sa part, la fonction de densité (log-normale) de $P_{t+\Delta t}$ s'écrit comme suit (conditionnelle à P_t) :

(8.25)

$$f(P_{t+\Delta t}|P_t) = \frac{1}{P_{t+\Delta t} b_{t+\Delta t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{lnP_{t+\Delta t} - \alpha_{t+\Delta t}}{b_{t+\Delta t}}\right)^2}$$

où

(8.26)

$$E[P_{t+\Delta t}] = e^{\alpha_{t+\Delta t} + \frac{b_{t+\Delta t}^2}{2}}$$

et

(8.27)

$$Var[P_{t+\Delta t}] = e^{2\alpha_{t+\Delta t} + b_{t+\Delta t}^2}(e^{b_{t+\Delta t}^2} - 1)$$

En prenant la limite de (8.25) quand $\Delta t \to \infty$, nous obtenons la relation suivante entre α et le prix d'équilibre à long terme $E[P]$:

(8.28)

$$\alpha = lnE[P] - \frac{\sigma^2}{4\eta}$$

En résumé, un MRM permet de reproduire un phénomène de convergence vers un prix d'équilibre de long terme sans exclure l'effet de chocs aléatoires qui se manifestent via la partie σdz_t de (8.19).

La Figure 3 illustre trois trajectoires générées par un MRM :

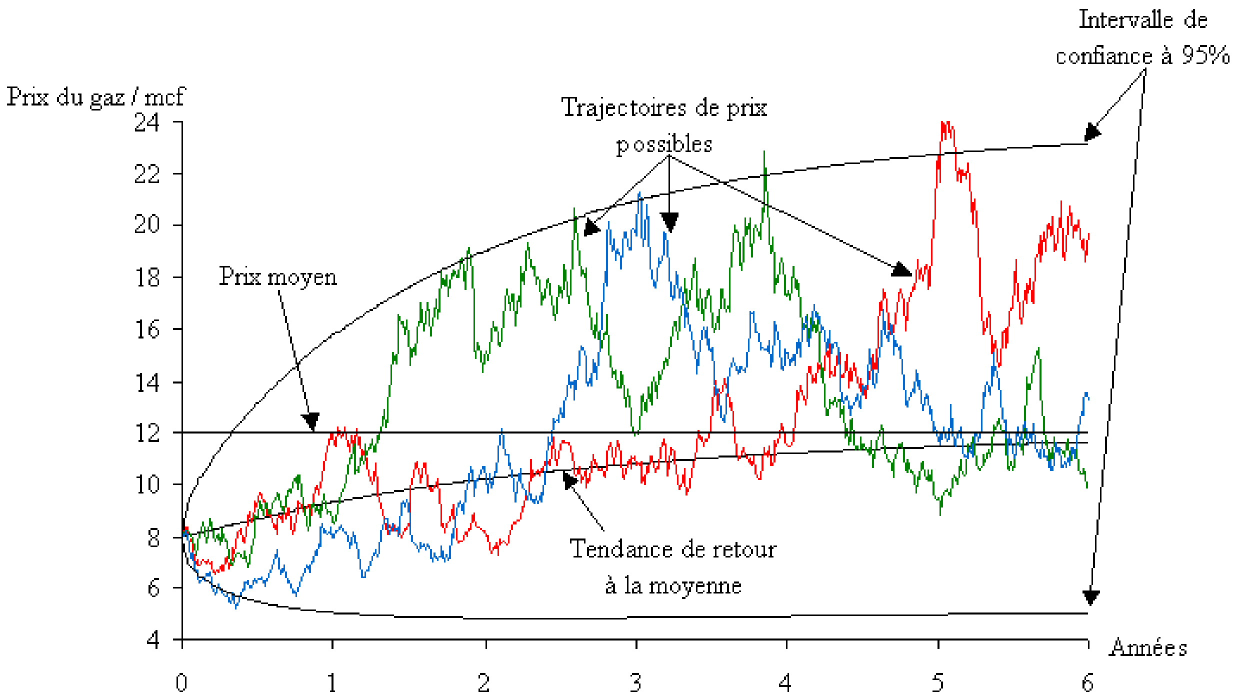


FIGURE 3. TRAJECTOIRES GÉNÉRÉES PAR UN MOUVEMENT DE RETOUR À LA MOYENNE.

Le MRM sous sa forme équivalent certain peut s'écrire comme suit :

$$dY_t = \eta\big((\alpha - \lambda_P\sigma) - Y_t\big)dt + \sigma dz_t \tag{8.29}$$

Finalement, dans certains cas, il faut modéliser des événements aléatoires qui se produisent rarement, c'est-à-dire des évènements discrets. Prenons comme exemple l'arrivée d'une nouvelle technologie ou des sauts dans le prix du gaz naturel causés par un bris majeur de pipeline. Un processus de Poisson peut être utilisé pour modéliser de tels phénomènes, dénotons :

$$dq = \begin{cases} 0, & avec\ probabilité\ 1 - \lambda dt \\ u, & avec\ probabilité\ \lambda dt \end{cases} \tag{8.30}$$

où λ est le nombre moyen d'événements dans la période de référence (ou le hazard rate). Par exemple, si un bris majeur de pipeline se produit en moyenne tous les trois ans, nous aurons $\lambda = 1/3$ et si P_t suit le processus :

$$dP_t = -P_t dq \tag{8.31}$$

avec $u = 1$, il y a une probabilité λdt que le prix tombe à zéro dans l'intervalle $t + dt$. Notons que (8.31) peut aussi être combiné avec un MBG ou un MRM (processus discret/continu).

8:4 - LES PRINCIPAUX OUTILS UTILISÉS

À la section précédente, nous avons décrit les processus stochastiques les plus communément utilisés en évaluation options réelles. Habituellement, le MBG et le MRM parfois combinés à un processus de Poisson permettent de caractériser l'évolution anticipée des principales sources d'incertitude sous-jacentes à un projet d'investissement.

Tel que mentionné, la dernière étape est de combiner les étapes 2 et 3 du processus décrit à la section précédente afin d'évaluer la valeur d'un projet conditionnel à la gestion optimale de sa flexibilité. Plusieurs méthodologies existent pour intégrer les processus de prix aux aspects décisionnels du problème, nous en considérons trois qui sont :

- le modèle binomial;
- la simulation Monte-Carlo et;
- la résolution de l'équation différentielle caractérisant l'évolution de la valeur du projet.

4.1 - Le modèle binomial

Supposons qu'une variable d'état P_t (prix, quantité, etc.) suit un MBG, c'est-à-dire :

$$dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dz_t \tag{8.32}$$

Nous savons qu'à $t + \Delta t$:

$$E[P_{t+\Delta t}|P_t] = P_t e^{\alpha \Delta t} \tag{8.33}$$

et :

$$Var[P_{t+\Delta t}|P_t] = P_t^2 e^{2\alpha\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) \tag{8.34}$$

L'objectif du modèle binomial est d'obtenir une approximation de l'évolution de P_t selon la dynamique de la Figure 15 :

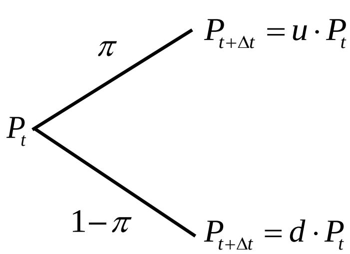


FIGURE 15. ÉVOLUTION BINOMIALE D'UNE VARIABLE D'ÉTAT ALÉATOIRE.

où sur chaque intervalle Δt il y a une probabilité π que $P_{t+\Delta t} = u \cdot P_t$ et une probabilité $1 - \pi$ que $P_{t+\Delta t} = d \cdot P_t$ avec :

$$0 < d < 1 < u \tag{8.35}$$

Le but étant de construire un arbre similaire à celui de la Figure pour être en mesure de trouver la stratégie d'investissement qui maximise la valeur du projet. Si le prix évolue de façon binomiale, la valeur espérée de $P_{t+\Delta t}$ est égale à :

(8.36) $$E_{bino}[P_{t+\Delta t}|P_t] = \pi \cdot u \cdot P_t + (1-\pi) \cdot d \cdot P_t$$

et la variance est égale à :

(8.37) $$Var_{bino}[P_{t+\Delta t}|P_t] = \pi \cdot u^2 \cdot P_t^2 + (1-\pi) \cdot d^2 \cdot P_t^2 - [\pi \cdot u \cdot P_t + (1-\pi) \cdot d \cdot P_t]^2$$

Pour trouver la valeur des paramètres π, u et d, il s'agit d'égaliser l'espérance et la variance du MBG (équations (8.33) et (8.34)) à l'espérance et à la variance binomiale (équations (8.36) et (8.37)) ce qui nous donne le système d'équations suivant :

(8.38) $$\pi u + (1-\pi)d = e^{\alpha\Delta t}$$

(8.39) $$\pi u^2 + (1-\pi)d^2 - [\pi u + (1-\pi)d]^2 = e^{2\alpha\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right)$$

Puisque nous avons trois inconnues, nous avons besoin d'une troisième équation pour solutionner le système, posons :

(8.40) $$ud = 1$$

Pour simplifier, supposons que Δt est petit au point où nous pouvons ignorer les termes d'ordre $(\Delta t)^n$ où $n \geq 2$. Dans ce cas, nous pouvons utiliser l'expansion de Taylor de (8.38) pour la variance du MBG :

(8.41) $$e^{2\alpha\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right) \approx e^{2\alpha(0)}\left(e^{\sigma^2(0)} - 1\right) + e^{2\alpha(0)}\left[2\alpha\left(e^{\sigma^2(0)} - 1\right) + \sigma^2 e^{\sigma^2(0)}\right]\Delta t = \sigma^2\Delta t$$

Nous pouvons démontrer que les trois éléments de solution suivants satisfont au système composé des équations (8.38), (8.39), et (8.40) :[19]

(8.42)

$$\pi = \frac{e^{\alpha\Delta t} - d}{u - d}$$

(8.43) $$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

(8.44) $$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

[19]Pour une description plus détaillée, voir COX, J., S. ROSS, AND M. RUBENSTEIN. 1979. «Option Pricing : A Simplified Approach», *Journal of Financial Economics*, 7 (October 1979) : 99. 229-64.

Sur deux périodes de longueur Δt, nous avons la dynamique suivante :

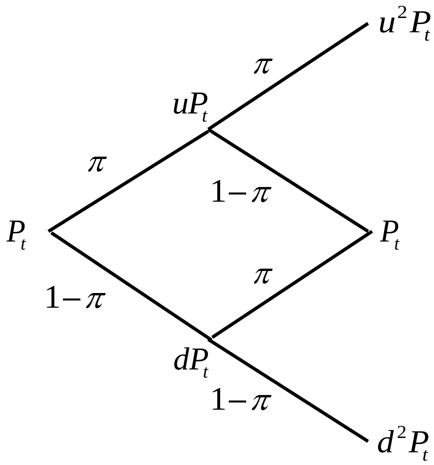


FIGURE 5. ÉVOLUTION BINOMIALE SUR DEUX PÉRIODES D'UNE VARIABLE D'ÉTAT ALÉATOIRE.

Maintenant, si nous voulons générer l'équivalent certain du prix, (8.42) peut prendre la forme suivante :

(8.45)

$$\pi = \frac{e^{(\alpha-\lambda_P\sigma)\Delta t} - d}{u-d}$$

Afin d'illustrer l'application du modèle binomial, définissons $V(P_t)$ comme étant la valeur actualisée des flux monétaires d'un projet en opération en fonction du prix P_t. Supposons qu'un investissement de I est nécessaire pour mettre le projet en œuvre et que le taux de rendement sans risque est égal à r.

Maintenant, définissons $F(P_t, T-t)$ comme étant la valeur de l'option de mettre le projet en œuvre en fonction du prix P_t et du temps avant l'échéance $T-t$. Supposons la dynamique de la Figure 5 pour P_t avec une date de départ de $t=0$ et une date terminale de $T=2\Delta t$.

L'objectif est de déterminer la valeur $F(P_0, t=0)$ ainsi que la stratégie d'investissement optimale. Pour ce, appliquons le principe d'optimalité de Bellman, i.e. procédons à rebours comme dans l'exemple du début de section.

À la date terminale ($t=2\Delta t$), nous avons trois états possibles qui sont :

(8.46) $$F(P_{2\Delta t} = u^2P_t, 0) = \max[V(u^2P_t) - I, 0]$$

(8.47) $$F(P_{2\Delta t} = P_t, 0) = \max[V(P_t) - I, 0]$$

(8.48) $$F(P_{2\Delta t} = d^2P_t, 0) = \max[V(d^2P_t) - I, 0]$$

À $t=\Delta t$, nous avons :

(8.49) $$F(P_{\Delta t} = uP_t, \Delta t) = \text{Max}\left[V(uP_t) - I, e^{-r\Delta t}\left(\pi \cdot F(u^2P_t, 0) + (1-\pi)\cdot F(P_t, 0)\right)\right]$$

et

(8.50) $$F(P_{\Delta t} = dP_t, \Delta t) = \text{Max}\left[V(dP_t) - I, e^{-r\Delta t}\left(\pi \cdot F(P_t, 0) + (1-\pi)\cdot F(d^2P_t, 0)\right)\right]$$

Notons qu'à $t = \Delta t$, la valeur de reporter la décision à la période $t = 2\Delta t$ est égale à :

(8.51) $$e^{-r\Delta t}\left(\pi \cdot F(u^2 P_t, 0) + (1-\pi) \cdot F(P_t, 0)\right), \text{ si } P_{\Delta t} = u \cdot P_t$$

et

(8.52) $$e^{-r\Delta t}\left(\pi \cdot F(P_t, 0) + (1-\pi) \cdot F(d^2 P_t, 0)\right), \text{ si } P_{\Delta t} = d \cdot P_t$$

On investit seulement si la valeur d'investir immédiatement est supérieure à la valeur d'attendre. Finalement, à $t = 0$, nous avons :

(8.53) $$F(P_t, 2\Delta t) = \mathrm{Max}\left[V(P_t) - I, e^{-r\Delta t}\left(\pi \cdot F(uP_t, \Delta t) + (1-\pi) \cdot F(dP_t, \Delta t)\right)\right]$$

et on investit à $t = 0$ si :

(8.54) $$V(P_t) - I > e^{-r\Delta t}(\pi \cdot F(uP_t, \Delta t) + (1-\pi) \cdot F(dP_t, \Delta t)$$

4.2 - La simulation «Least-squares Monte-Carlo»

Nous présentons la méthodologie «Least-squares Monte-Carlo» (LSM) car elle permet d'effectuer de la programmation dynamique stochastique.[20] Comparativement au modèle binomial, la méthodologie LSM est plus «rapide» dans le cas où les flux monétaires du projet sont composés de plusieurs processus aléatoires.

Afin d'illustrer la méthodologie, prenons le même cas qu'à l'exemple précédent où le gestionnaire a la possibilité d'attendre avant d'investir. À chaque instant $t \in [0, T]$ (entre aujourd'hui et l'échéance T), le gestionnaire peut échanger l'option d'investir contre un projet ayant une valeur de $V(P_t) - I$. Au temps t, la valeur de l'option d'investir est égale à :

(8.55) $$F(P_t, T - t) = \max_{\tau \in [t,T]} \left\{e^{-r(\tau - t)} E_t[V(P_\tau) - I]\right\}$$

où τ est le temps d'arrêt optimal et E_t est l'espérance conditionnelle à l'information disponible au temps t.

Pour mettre en œuvre la méthodologie LSM, on divise la période de temps T avant l'échéance en N périodes de longueur ∂t, i.e. :

$$\partial t = \frac{T}{N}$$

Nous considérons seulement les temps d'arrêt $\{t_0 = 0, t_1 = \partial t, \dots, t_N = N\partial t\}$, ce qui signifie que comme dans le cas binomial, nous obtenons une approximation en temps discret de la valeur de l'option.

La première étape est de simuler W trajectoires de prix de t_0 à t_N ce qui se traduit par la matrice suivante :

(8.56) $$P = \begin{bmatrix} P_{1,\partial t} & P_{1,2\partial t} & & P_{1,N\partial t} \\ & & & \\ P_{W,\partial t} & P_{W,2\partial t} & & P_{W,N\partial t} \end{bmatrix}$$

[20] Voir LONGSTAFF, FRANCIS A., AND EDUARDO S. SCHWARTZ. 2001. «Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-squares Approach», *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1 : pp. 113-147.

Si le prix suit un MBG, nous pouvons utiliser l'équation suivante (forme équivalent certain) pour générer les W trajectoires de prix :

(8.57) $$P_{n\partial t} = P_{(n-1)\partial t} e^{\left[\left((\alpha-\lambda_P\sigma)-\frac{\sigma^2}{2}\right)\partial t+\sigma\varepsilon_{n\partial t}\sqrt{\partial t}\right]}$$

où $\varepsilon_{n\partial t} \sim N(0,1)$. Si le prix suit le MRM de l'équation (8.29), l'expression ci-bas nous permet de générer les W trajectoires de prix :

(8.58) $$P_{n\partial t} = \exp\left\{Y_{(n-1)\partial t}e^{-\eta\partial t} + (\alpha - \lambda_P\sigma)\left(1 - e^{-\eta\partial t}\right) + \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\eta\partial t}}{2\eta}}\varepsilon_{n\partial t}\right\}$$

Si on définit P_{t_n} comme étant le prix au temps t_n, la valeur de l'option à t_n est égale à (une application du principe d'optimalité de Bellman) :

(8.59) $$F\left(P_{t_n}, t_N - t_n\right) = \max\left\{V\left(P_{t_n}\right) - I, e^{-r\partial t}E_{t_n}\left[F\left(P_{t_{n+1}}, t_N - t_{n+1}\right)\right]\right\}$$

Comme dans le cas du modèle binomial, pour trouver la valeur de l'option d'investir au temps t_0, nous devons procéder récursivement jusqu'à t_0 sur chaque trajectoire de prix. À chaque nœud, le décideur doit choisir entre investir ou attendre.

À l'échéance de l'option, puisque la VAN redevient le critère de décision optimal, la valeur de l'option sur chaque trajectoire est égale à :

(8.60) $$F\left(P_{t_N}(w), 0\right) = max\left[V\left(P_{t_N}(w)\right) - I, 0\right]$$

Sur chaque trajectoire, le temps d'arrêt optimal peut se caractériser comme suit :

(8.61) $$\tau(w) = inf\left\{t_i \middle| \mathrm{F}\left(P_{t_i}(w), \mathrm{t_i}\right) = \mathrm{V}\left(P_{t_i}(w)\right) - \mathrm{I}\right\} \ pour\ i = 1, \quad, N$$

Pour trouver $F\left(P_{t_0}, t_0\right)$, il s'agit de prendre la moyenne des stratégies d'investissement optimales des W trajectoires ce qui peut s'exprimer comme suit :

(8.62)

$$F\left(P_{t_0}, t_N\right) = \frac{1}{W}\sum_{w=1}^{W} e^{-r\tau(w)}\left[V\left(P_{\tau(w)}(w)\right) - I\right]$$

Jusqu'à maintenant, nous avons décrit l'algorithme LSM sans expliquer comment la deuxième composante du maximum de l'équation (8.59) est calculée sur chaque trajectoire. Dénotons

(8.63) $$\Psi\left(P_{t_n}(w), t_N - t_n\right) = e^{-r\partial t}E_{t_n}\left[F\left(P_{t_{n+1}}(w), t_N - t_{n+1}\right)\right]$$

comme étant la valeur à estimer conditionnel à $P_{t_n}(w)$ et définissons $\tau(t_n, w)$ comme étant le temps d'arrêt optimal sur la w-ième trajectoire subséquent à t_n (si le problème commençait à t_n quelle serait le temps d'arrêt optimal après cette date) et :

(8.64) $$\prod(t_n, t_i, w) = \begin{cases} V\left(P_{t_i}(w)\right) - I & si\ t_i = \tau(t_n, w) \\ 0 & si\ t_i \neq \tau(t_n, w) \end{cases} \ pour\ i = n+1, \quad, N$$

comme étant la valeur du projet sur la w-ième trajectoire au temps d'arrêt optimal subséquent à t_n. Pour estimer (8.63), nous devons régresser (régression linéaire par MCO) pour chaque trajectoire où $V\left(P_{t_n}(w)\right) - I > 0$, la valeur :

(8.65)

$$y_w = \sum_{i=n+1}^{N} e^{-r(t_i - t_n)} \prod(t_n, t_i, w)$$

sur une fonction du prix

(8.66) $$x_{w,j} = L_j\left(P_{t_n}(w)\right) \qquad j = 1, \quad ,J$$

C'est à dire, nous devons résoudre le problème suivant :

(8.67)

$$\{\hat{\beta}_j\}_{j=1}^{J} = \arg\min_{\{\beta_j\}_{j=1}^{J}} \sum_{w=1}^{W} \left(\sum_{j=1}^{J} \beta_j\, x_{w,j} - y_w \right)^2$$

et utiliser le résultat pour estimer (8.63) de la façon suivante : [21]

(8.68)

$$\widehat{\Psi}\left(P_{t_n}(w), t_n\right) = \sum_{j=1}^{J} \hat{\beta}_j\, x_{w,j}$$

4.3 - Résolution d'équations différentielles

Les méthodologies binomiale et LSM nous permettent de solutionner des problèmes d'évaluation d'investissements complexes en temps discret. Tel que mentionné, il existe aussi des méthodes de solutions en temps continu basées sur l'équation différentielle caractérisant la valeur d'un projet. Quoiqu'intéressantes, ces méthodologies sont limitées par le fait qu'elles deviennent compliquées pour des cas autres que le temps d'arrêt optimal. Nous présentons ici un cas simple, seulement pour donner un aperçu de la méthodologie.

Tel que mentionné, un processus d'Ito peut se caractériser comme suit :

(8.69) $$dP_t = \alpha(P_t, t)dt + b(P_t, t)dz$$

[21] Voir le premier exemple de LONGSTAFF, FRANCIS A., AND EDUARDO S. SCHWARTZ. 2001. «Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-squares Approach», *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1 : pp. 113-147.

D'après le lemme d'Ito, une fonction $F(P_t, t)$ du prix P_t où les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial P_t}, \frac{\partial^2 F}{\partial P_t^2}$ sont continues suit un processus d'Ito de la forme :

(8.70)

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(P_t, t)\frac{\partial F}{\partial P_t} + \frac{1}{2}b^2\,(P_t, t)\frac{\partial^2 F}{\partial P_t^2}\right]dt + b(P_t, t)\frac{\partial F}{\partial P_t}dz$$

Par exemple, prenons le cas d'une firme qui a l'option d'investir un montant I pour obtenir un actif ayant la valeur $V(P_t)$ suivante :

(8.71) $$V(P_t) = a(P_t - b)$$

et où le prix P_t suit le processus équivalent certain suivant :

(8.72) $$dP_t = (a - \lambda_P \sigma)P_t dt + \sigma P_t dz$$

Pour l'instant, supposons que l'option n'a pas d'échéance, i.e. $T \to \infty$. Nous pouvons démontrer qu'à chaque instant t, dans un contexte équivalent certain, la valeur de l'option $F(P_t)$ doit obéir à la relation suivante :

(8.73) $$rFdt = E[dF]$$

En appliquant le lemme d'Ito à la valeur de l'option $F(P_t)$, nous pouvons écrire dF comme suit :

(8.74) $$dF = (a - \lambda_P \sigma)P_t F'(P_t)dt + \tfrac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 F''(P_t)dt + \sigma P_t F'(P_t)dz$$

et puisque $dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ avec $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ nous avons :

(8.75) $$E[dF] = (a - \lambda_P \sigma)P_t F'(P_t)dt + \tfrac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 F''(P_t)dt$$

En remplaçant (8.75) dans (8.73), nous obtenons l'expression suivante (équation différentielle ordinaire) caractérisant l'évolution de la valeur de l'option :

(8.76) $$\tfrac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 F''(P_t) + (a - \lambda_P \sigma)P_t F'(P_t) - rF(P_t) = 0$$

À partir de (8.76) et des conditions (8.77), (8.78) et (8.79), nous pouvons trouver l'expression caractérisant la valeur de l'option, i. e. $F(P_t)$:

(8.77) $$\lim_{P_t \to 0} F(P_t) = 0$$

(8.78) $$F(P^*) = a(P^* - b) - I$$

(8.79) $$F'(P^*) = V'(P^*) = a$$

La condition (8.77) signifie que la valeur de l'option doit tendre vers zéro quand le prix de l'output tend vers zéro (logique) et les conditions (8.78) et (8.79) garantissent l'optimalité de la solution (toujours selon le principe d'optimalité de Bellman). Notons que P^* est le prix à partir duquel il est optimal d'exercer l'option.

L'équation (8.76) est une équation différentielle du type Euler-Cauchy qui a une solution de la forme :

(8.80) $$F(P_t) = K_1 P_t^{\beta_1} + K_2 P_t^{\beta_2}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes et où β_1 et β_2 sont les racines de l'équation quadratique suivante (posons $\hat{\alpha} = \alpha - \lambda_P \sigma$) :

(8.81)

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \hat{\alpha}\beta - r = 0$$

Nous pouvons démontrer que (8.81) possède une racine positive et une racine négative. Supposons que β_1 soit la racine positive. Selon la condition (8.77), puisque $\beta_2 < 0$, la constante K_2 doit être égale à zéro.

Maintenant, pour trouver K_1 et P^*, il s'agit de résoudre le système d'équations donné par les conditions (8.78) et (8.79), ce qui donne :

(8.82)

$$P^* = \frac{\beta_1(b+I)}{a(\beta_1-1)}$$

(8.83)

$$K_1 = \frac{a^{\beta_1}(\beta_1-1)^{\beta_1-1}}{(\beta_1)^{\beta_1}(b+I)^{\beta_1-1}}$$

avec : [22]

(8.84)

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\hat{a}}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{\hat{a}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1$$

Maintenant, dans le cas où l'option a une date d'échéance T le problème devient un peu plus complexe. La résultante de (8.73) a maintenant la forme suivante (la dérivée de $F(P_t,t)$ par rapport au temps ne disparaît pas) :

(8.85)

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 F(P_t,t)}{\partial P_t^2} + (a - \lambda_P\sigma)P_t \frac{\partial F(P_t,t)}{\partial P_t} + \frac{\partial F(P_t,t)}{\partial t} - rF(P_t,t) = 0$$

et les conditions (8.77), (8.78) et (8.79) deviennent :

(8.86) $$\lim_{P_t \to 0} F(P_t,t) = 0$$

(8.87) $$F(P^*(t),t) = a(P^*(t) - b) - I$$

[22] Voir chapitres 4 et 5 de DIXIT, A. AND R. PINDYCK. 1994. *Investment Under Uncertainty.* Princeton University press.

(8.88)

$$\frac{\partial F(P^*(t),t)}{\partial P_t} = V'\big(P^*(t)\big) = a$$

avec la condition suivante pour garantir une solution positive :

(8.89) $$F(P_t,t) \geq \max[0, V(P_t) - I]$$

Contrairement au cas où $T \to \infty$, il n'existe pas de solution analytique à ce problème. Pour solutionner des problèmes contenant des options de type Américaines avec échéance finie, nous privilégions l'utilisation de la méthodologie LSM.[23]

[23] Pour plus de détails voir les chapitres 1 à 9 de WILMOTT, PAUL, HOWISON, SAM AND JEFF DEWYNNE. 1999. *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction.* Cambridge University Press.

The Valuation of Financial Options

CHAPTER 9

This chapter is based on Jingmei Zhu (2008), "Evaluation of Financial Options and Simulation Techniques" (157 pages), M.Sc. Economics Research Report written under the supervision of Marcel Boyer.

9:1 - TYPES OF FINANCIAL OPTIONS

An option provides the holder with the right to buy or sell a specified quantity of an underlying asset at a fixed price (call a strike price or an exercise price) at or before the expiration date of the option. Since it is a right and not an obligation, the holder can choose not to exercise the right and allow the option to expire. There are two types of options — call option and put option.

1.1 - Call option

A call option gives the buyer of the right (but not obligation) to buy the underlying asset at a fixed price at the expiration date (for a European option) or prior to the expiration date (for an American option). The buyer pays a price for this right.

By definition, if K is the strike price and S_T is the price of the underlying asset at the expiration date, for a European call, the profit is

(9.1) $$\text{profit of buyer of the call} = \max(S_T - K, 0) - \text{option price}$$

(9.2) $$\text{profit of seller of the call} = -\max(S_T - K, 0) + \text{option price} = \min(K - S_T, 0) + \text{option price}$$

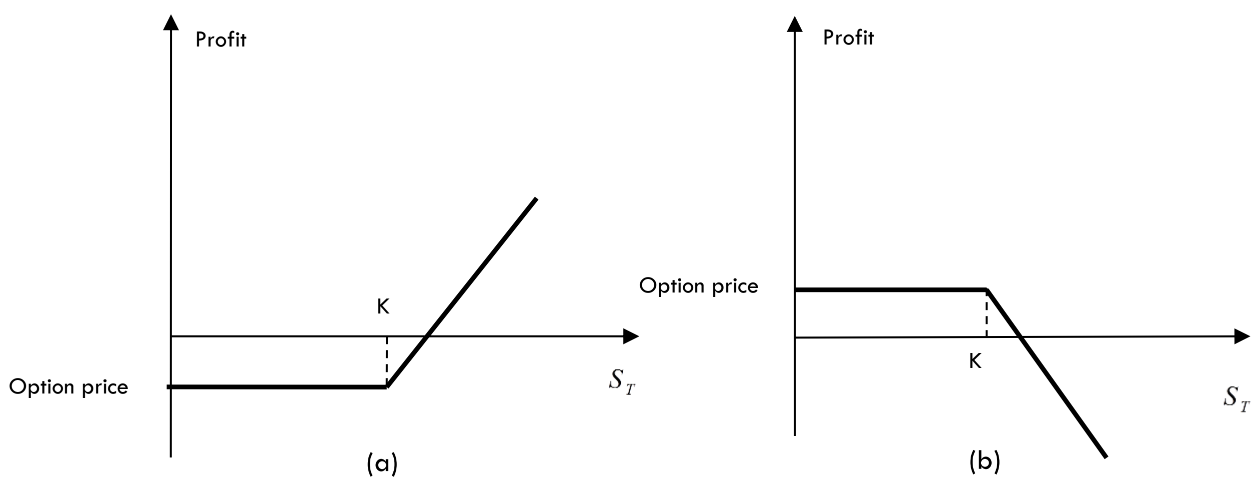


EXHIBIT 1. (A) PROFIT FROM BUYING A EUROPEAN CALL, (B) PROFIT FROM SELLING A EUROPEAN CALL.

It is often useful to characterise a European option in terms of the terminal value or payoff to the investor at maturity. The price option (initial cost) is then not included in the calculation. So the payoff is

$$\text{payoff of buyer of the call option} = \max(S_T - K, 0) \tag{9.3}$$

$$\text{payoff of seller of the call option} = \min(K - S_T, 0) \tag{9.4}$$

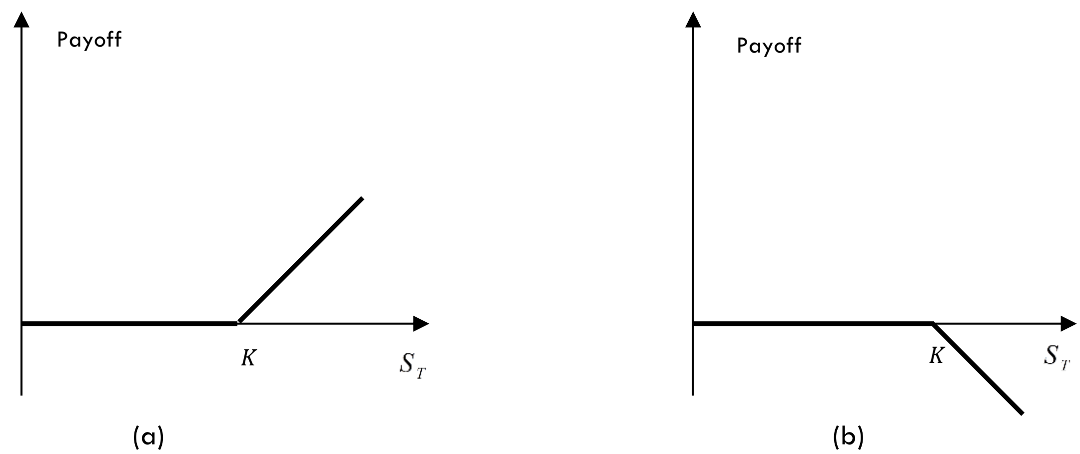


EXHIBIT 2. (A) PAYOFF FROM BUYING A EUROPEAN CALL, (B) PAYOFF FROM SELLING A EUROPEAN CALL.

Suppose that we know the stock price in the market changing with the time, we can obtain the option payoff at the terminal time. exhibit 3. illustrates the payoff for the buyer of a call option when the stock price $S_T > K$.

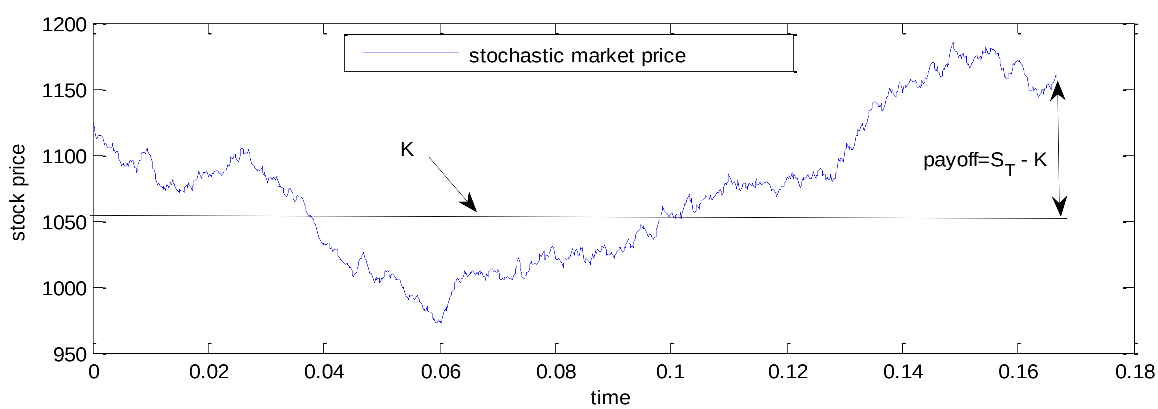


EXHIBIT 3. PAYOFF OF A EUROPEAN CALL IN A STOCHASTIC MARKET.

Out-of-the-money	At-the-money	In-the-money
A call option is said to be out-of – the-money when the price of the underlying stock is lower than the strike price. If this difference is substantial, the option is deeply out-of-the-money	A call option is said to be at-the-money when the price of the underlying stock is identical or relatively close to the strike price	A call option is said to be in-the-money when the price of the underlying stock is higher than the strike price. If this difference is substantial, the option is deeply in-the-money.

TABLE 1. POSSIBLE STATES OF A CALL.

Summary of transactions for a call option			
	Now	At expiration	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
Buyer of call	Pays the call price and gets the right to exercise.	Payoff $= 0$ Profit $= -$call price	Payoff $= S_T - K$ Profit $= S_T - K -$ call price
Seller of call	Receives the call price and agrees to deliver the asset at the exercise price if the buyer demands it at expiration.	Payoff $= 0$ Profit $=$ call price	Payoff $= K - S_T$ Profit $= K - S_T +$ call price

TABLE 2. SUMMARY OF TRANSACTIONS FOR A CALL OPTION.

1.2 - Put option

A put option gives the buyer the right (but not the obligation) to sell the underlying asset at the fixed price at the expiration date (for the European option) or before the expiration date (for the American option). The buyer pays a price for this right.

$$\text{profit of the buyer of a put} = \max(K - S_T, 0) - \text{option price} \tag{9.5}$$

$$\text{profit of the seller of a put} = -\max(K - S_T, 0) + \text{option price} = \min(S_T - K, 0) + \text{option price} \tag{9.6}$$

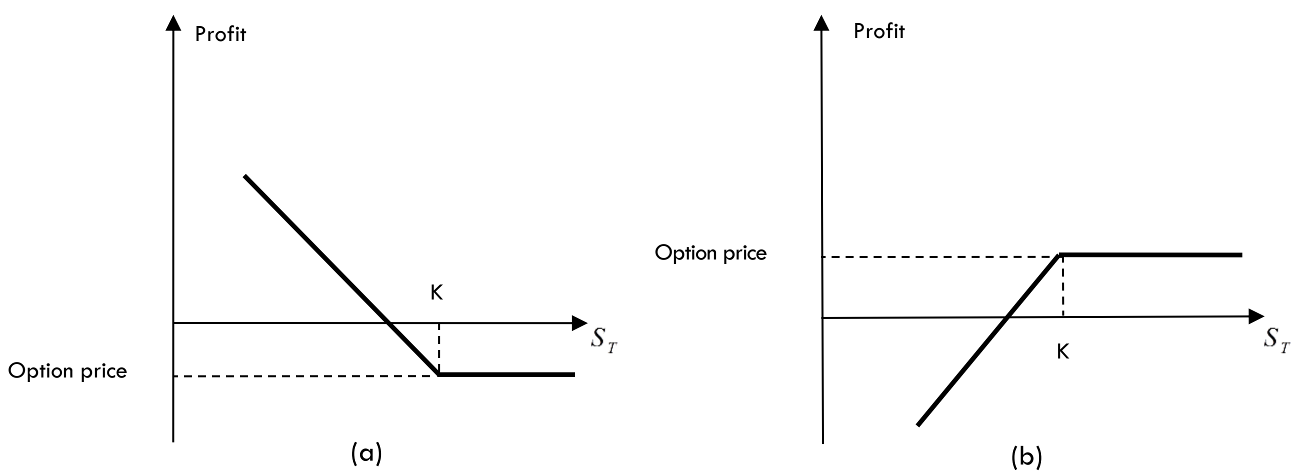


EXHIBIT4. (A) PROFIT FROM BUYING A EUROPEAN PUT, (B) PROFIT FROM SELLING A EUROPEAN PUT.

If the price option (initial cost) is not included in the calculation, the payoff is

$$\text{payoff of buyer of the put option} = \max(K - S_T, 0) \tag{9.7}$$

$$\text{payoff of seller of the put option} = \min(S_T - K, 0) \tag{9.8}$$

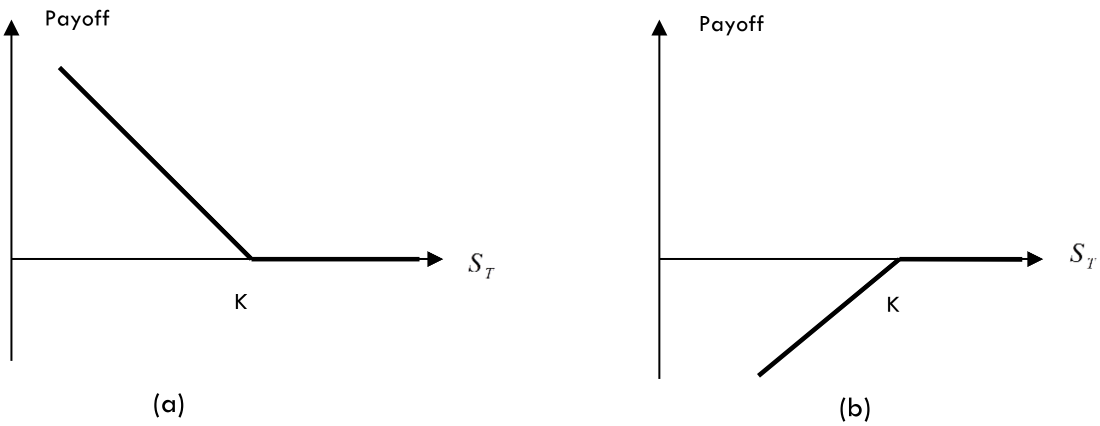


EXHIBIT 5. (A) PAYOFF FROM BUYING A EUROPEAN PUT, (B) PAYOFF FROM SELLING A EUROPEAN PUT.

exhibit 6 illustrates the payoff of the buyer of a put option when the stock price $S_T < K$.

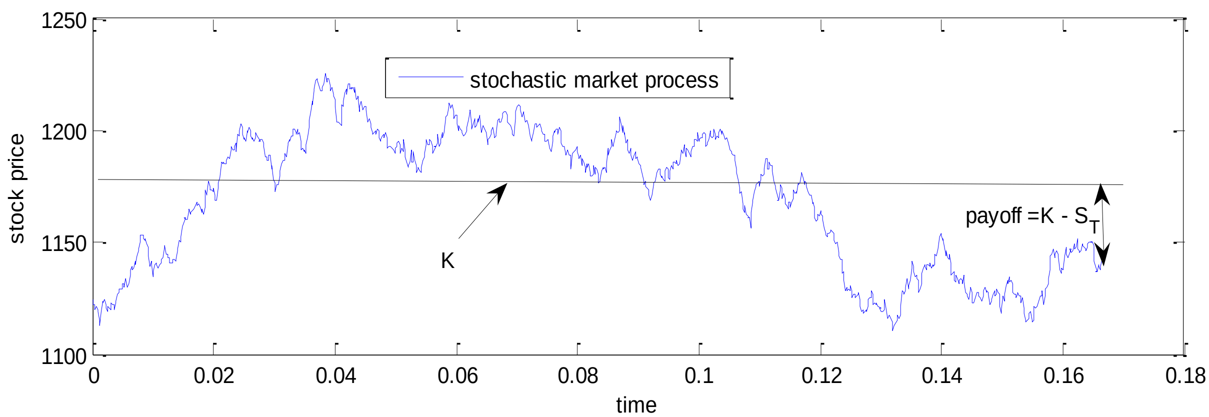


EXHIBIT 6. PAYOFF OF A EUROPEAN PUT IN A STOCHASTIC MARKET.

Out-of-the-money	At-the-money	In-the-money
A put option is said to be out-of-the-money when the price of the underlying stock is higher than the strike price. If this difference is substantial, the option is deeply out-of-the-money	A put option is said to be at-the-money when the price of the underlying stock is identical or relatively close to the strike price.	A put option is said to be in-the-money when the price of the underlying stock is lower than the strike price. If this difference is substantial, the option is deeply in-the-money.

TABLE 5. POSSIBLE STATES OF A PUT.

Summary of transactions for a put option			
	Now	At expiration	
		$S_T < K$	$S_T \geq K$
Buyer of put	Pays the put price and gets the right to exercise.	Payoff $= K - S_T$ Profit $= K - S_T - \text{put price}$	Payoff $= 0$ Profit $= -\text{put price}$
Seller of put	Receives the put price and agrees to buy the asset at the exercise price if the buyer demands it at expiration.	Payoff $= S_T - K$ Profit $= S_T - K + \text{put price}$	Payoff $= 0$ Profit $= \text{put price}$

TABLE 6. SUMMARY OF TRANSACTIONS FOR A PUT OPTION.

9:2 - STYLES OF EXERCISES

In finance the style of an option is usually defined by the date on which the option may be exercised. The vast majority of options are either European or American. These options are commonly referred to as **vanilla options**. Options where the payoff is calculated differently are categorised as **exotic options**.

2.1 - European and American options

A European option can be exercised only at the expiration date, i. e. at a single pre-defined point in time, while an American option can be exercised at any time before the expiration date.

2.2 - Asian options

Asian options are options whose payoff depends on the average price of the underlying asset over a specified period of time. Because of this, Asian options have a lower volatility and hence they are commonly cheaper than their European counterparts. They are commonly traded on currencies and commodity products, which have low trading volumes. They were originally used in 1987 when Banker's Trust Tokyo office used them for pricing average options on crude oil contracts. This is why we call them Asian options.

2.3 - Compound options

Compound options are options on options. There are four main types of compound options: a call on a call, a put on a call, a call on a put, and a put on a put. Compound options have two strike prices and two exercise dates. For example, consider a call on a call. On the first exercise date T_1, the holder of the compound option is entitled to pay the first strike price K_1, and receive a call option. The call option gives the holder the right to buy the underlying asset for the second strike price K_2, on the second exercise date T_2. The compound option will be exercised on the first exercise date only if the value of the option on that date is greater than the first strike price.

2.4 - Barrier options

Barrier options are options whose payoff depends on whether the underlying asset's price reaches a certain level during a certain period of time.

9:3 - BASIC ELEMENTS IN OPTION THEORY

3.1 - Underlying asset

An underlying asset is the asset on which the option value depends. This could be a stock, a commodity, a future, a currency, an index or a fixed-income or credit instrument. In quantitative finance this asset is usually modelled via a stochastic process.

3.2 - Expiration date

Expiration date is the end of life of a contract. For an American option, the holder can exercise his right at any time up to the expiration date. For a European option, the right must be exercised precisely at the expiration date and not before.

3.3 - Volatility

The volatility of an option is a measure of the rate and magnitude of change in the underlying asset price (either up or down). If volatility is high, the option premium will be relatively high, and vice-versa. Once we have a measure of statistical volatility (SV) for any underlying asset, we can plug the value into a standard option price model and calculate the fair price of the option.

3.4 - Strike price

The strike price, or exercise price, is the fixed price at which the option holder can buy (in the case of a call), or sell (in the case of a put) the underlying asset.

3.5 - Spot price

The spot price is the current price at which a particular asset can be bought or sold at a specified time and place. In other words, it is the quoted price if we want to buy or sell the asset now.

3.6 - Premium

The premium is the price of the option, i. e. the amount the buyer pays to the seller for the right of the option. Option premium is quoted per dollar per share. It can be considered as the sum of two specific elements: intrinsic value and time value.

3.7 - Intrinsic value of options

The intrinsic value of an option is the amount an option holder can realise by exercising the option immediately. Intrinsic value is always positive or zero. An out-of-money option has zero intrinsic value. Intrinsic value of the in-the-money call equals to the underlying asset price minus the strike price. The intrinsic value of in-the-money put is the strike price minus the underlying asset price.

3.8 - Time value of options

The time value of an option is the difference between the option premium and its intrinsic value. The factors that strongly impact the time value are the volatility of the underlying stock, the remaining days to expiry, the dividends paid out during the life of the option, the risk-free interest rates, and the supply and demand for the option.

3.9 - Early exercise

It is a feature of American options that allows the holder of option to exercise the option at any time prior to its expiration date. The possibility of the early exercise makes American option more valuable than similar European option; but it also makes American option more difficult to value. In most cases, the time premium makes the early exercise suboptimal.

3.10 - Dividend

Dividends are payment made by a company to its shareholders. The profit a company makes can be used in two different ways: it can be either reinvested in the business, or it can be paid to the shareholder of the company as a dividend. Many companies retain a portion of their earnings and pay the remainder to their shareholders. Dividends are usually paid in cash. However, sometimes dividends take the form of shares in the company.

3.11 - Break-even point

The break-even point is the point at which costs or expenses and income are equal.

3.12 - Position

By buying or short selling an asset one takes position, and once a position is taken, one has exposure to various risks.

3.13 - Short selling

Short selling is the selling of a stock that the seller does not own. More specifically, a short sale is the sale of a security that is not owned by the seller, but that is promised to be delivered. Short sellers assume that they will be able to buy the stock at a lower price than the price at which they sold short.

3.14 - Long position

When an investor buys a security such as a stock, a commodity or a currency, in the expectation that the asset will rise in value, or in the context of an option, the buying of an option contract, we say that the investor has a long position. For example, the payoffs from Equations (9.3) and (9.7) are called long positions for a European option.

3.15 - Short position

When an investor short sells a security, a commodity or a currency in the expectation that the asset will fall in value, or in the context of options, the selling of an option contract of a *long position*, we say the investor has a short position. For example, the payoffs from Equations (9.4) and (9.8) are called short positions for a European option.

3.16 - Leverage

It is the amount of debt used to finance a firm's assets. A firm with significantly more debt than equity is considered to be highly leveraged. Leverage can help both the investor and the firm to invest or operate. However, it comes with greater risk. Rights, warrants, and option contracts can provide leverage.

9:4 - COMPONENTS THAT INFLUENCE OPTION VALUE

The value of an option is determined by a number of variables related to the underlying asset and financial markets. Equations (9.38), (9.39) and (9.40) give the relation of the option price and those components.

4.1 - Current value of underlying asset

Options are assets that derive from an underlying asset. Consequently, changing the value of the underlying asset affects the value of the options on that asset. Since calls provide the right to buy the underlying asset at a fixed price, an increase in the value of the asset will make calls more valuable. Puts, on the other hand, become less valuable as the value of the asset increases.

4.2 - Variance in value of the underlying asset

The buyer of an option acquires the right to buy or sell the underlying asset at a fixed price. The higher the variance in the value of the underlying asset, the greater is the value of the option. This is true for both calls and puts. While it may seem counterintuitive that an increase in a risk measure (variance) should increase value, options are different from other securities since the buyers of options can never lose more than the price they pay for them, and can potentially earn significant returns from large price movements.

4.3 - Dividends paid on the underlying asset

The value of the underlying asset can be expected to decrease if there are dividend payments on the asset during the life of the option. As a consequence, the value of a call on the asset is a decreasing function of the size of expected dividend payments, and the value of a put is an increasing function of expected dividend payments.

4.4 - Strike price of the option

In the case of calls, where the holder acquires the right to buy at a fixed price, the value of the call will decline as the strike price increases. In the case of puts, where the holder has the right to sell at a fixed price, the value will increase as the strike price increases.

4.5 - Time to expiration of the option

Both calls and puts become more valuable as the time to expiration increases. The longer time to expiration provides more time for the value of the underlying asset to move, increasing the value of both types of options. There is an additional effect on the option value. In the case of a call, the present value of the exercise price decreases as the life of the option increases, and this increases the value of the call. In the case of a put, the present value decreases as the time to expiration is extended.

4.6 - Risk-free interest rate corresponding to the life of the option

Since the buyer of an option pays the price of the option up front, there is an opportunity cost involved. This opportunity cost will depend upon the level of interest rates and the time to expiration on the option value. The risk-free interest rate also enters into the valuation of the option when the present value of the exercise price is calculated, since the exercise price does not have to be paid (received) until expiration on calls (puts). Increase in the interest rate will increase the value of calls and reduce the value of puts.

Components	Call value	Put value
Increase in stock price	⇧	⇩
Increase in strike price	⇩	⇧
Increase in variance price of underlying asset	⇧	⇧
Increase in time to expiration	⇧	⇧
Increase in risk-free interests rates	⇧	⇩
Increase in dividend paid	⇩	⇧

TABLE 7. SUMMARY OF COMPONENTS THAT INFLUENCE OPTION VALUE.

9:5 - EVALUATION METHODS

5.1 - Binomial tree for discrete-time situation

5.1.1 - The one period model

A stock asset has current price S_0 at time $t = 0$, its price S_1 at time $t = 1$ may be $S_0 u$ with probability p_u or $S_0 d$ with probability p_d i. e.:

$$S_1 = \begin{cases} S_0 u \text{ with probability } p_u \\ S_0 d \text{ with probability } p_d \end{cases} \tag{9.9}$$

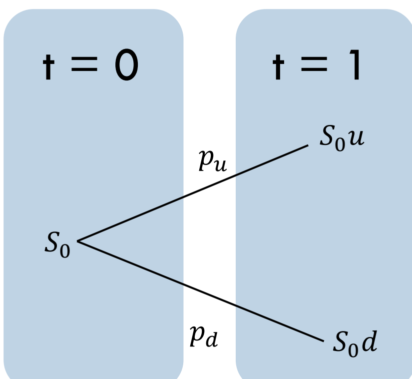


EXHIBIT 16. ONE-PERIOD BINOMIAL TREE.

First we introduce some important concepts often applied in finance.

- ***Arbitrage:*** An arbitrage portfolio is a portfolio with the properties that at time $\mathrm{t} = 0$, the value of the portfolio $\mathrm{V}_0 = 0$ and at time $\mathrm{t} = 1$ the value of the portfolio $\mathrm{V}_1 > 0$ with probability 1. That means that one can positively profit from market with no risk.
- ***Replicated options and complete markets:*** A given option $\mathrm{P_t}$ is said to be replicated if there exists a portfolio V_t such that $X(t, P_t) = V_t$ with probability 1, where t denotes time and $X(t, P_t)$ denote the price of the option at time t. If all the options can be replicated we say that the market is complete.

Suppose that the risk-free interest rate is r, that the stock market is absent of arbitrage and that the market is complete (so we can prove that $\mathrm{d} \leq 1+\mathrm{r} \leq \mathrm{u}$). We then determine the price of an option in terms of the market prices of the underlying assets by using the risk-neutral probability measure.

- ***Risk-neutral probability measure:*** in mathematical finance, a risk-neutral probability measure is a probability measure in which today's fair price (i.e. arbitrage-free price) of a derivative is equal to the expected value (under the risk-free measure) of the future payoff of the derivative discounted at the risk-free rate.

Consider 1\$ invested in a bond at time t=0 at the risk-free rate. At time t=1, it becomes $1+r$ dollars. Suppose also that S dollars are invested in a risky asset with probabilities q_u and q_d of going up or down and becoming either Su or Sd, respectively (where $u>1$ and $d<1$). The expected value at time t=1 is then:

(9.10) $$Su \cdot q_u + Sd \cdot q_d$$

In the absence of arbitrage, we must have:

(9.11) $$Su \cdot q_u + Sd \cdot q_d = S(1+r)$$

Since $q_u + q_d = 1$, it follows that:

(9.12)

$$q_u = \frac{(1+r)-d}{u-d}$$
$$q_d = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

Probabilities q_u and q_d are thus called risk-neutral probabilities and we can explain exhibit 16 in terms of them:

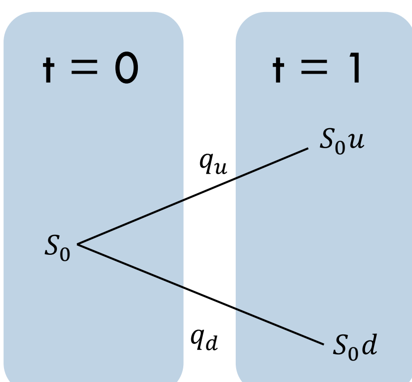


EXHIBIT 17. THE ONE-PERIOD BINOMIAL TREE UNDER RISK-FREE PROBABILITIES.

Suppose the exercise price of a European call is K, and its expiration date is one year, the option price $X(t, P_t)$ at expiration time $t=1$ is:

(9.13) $$X(1, P_1) = \max(S_1 - K, 0) = \begin{cases} \max(S*u-K,0) \equiv \phi(u) & with\ probability\ q_u \\ \max(S*d-K,0) \equiv \phi(d) & with\ probability q_d \end{cases}$$

So at time $t=0$ the option price (with risk-neutral measure) is

(9.14)

$$X(0,P_0)=\frac{1}{1+r}E[X(1,P_1)]=\frac{1}{1+r}(q_u\max(S*u-K,0)+q_d\max(S*d-K,0))=$$
$$=\frac{1}{1+r}(q_u\phi(u)+q_d\phi(d))$$

In fact if the market is replicable and complete, we can replicate any option by the underlying asset and bond.

We suppose (without loss of generality) that the bond price at time $t=0$ is $B_0=1$ and at $t=1$ bond price is $B_1=1+r$, where r is risk-free rate. An investor buys x units of bonds and y units of the underlying stock share, and then at time $t=0$ the portfolio is:

(9.15) $$V_0=x+y*S$$

At time $t=1$, the portfolio V_1 is either $(1+r)x+S*u*y$ with probability q_u, or $(1+r)x+S*d*y$ with probability q_d. If the market is complete, then the option P_T can be replicated as:

(9.16) $$\begin{cases}(1+r)x+S*u*y=\phi(u)\\(1+r)x+S*d*y=\phi(d)\end{cases}$$

By Equation (9.16) we obtain:

(9.17)

$$x=\frac{1}{1+r}\frac{u\phi(d)-d\phi(u)}{u-d},\qquad y=\frac{1}{S}\frac{\phi(u)-\phi(d)}{u-d}$$

Replacing into Equation (9.15), we get the option price at time $t=0$ is:

(9.18)

$$X(0,P_0)=V_0=x+S*y=\frac{1}{1+r}\frac{u\phi(d)-d\phi(u)}{u-d}+S*\frac{1}{S}\frac{\phi(u)-\phi(d)}{u-d}=\frac{1}{1+r}(q_u\phi(u)+q_d\phi(d))$$

We see Equation (9.18) is the same as Equation (9.14). We then obtain that in replicable markets the option price at time $t=0$ is a discount of the expected cash flow at time $t=1$ with the risk-neutral measure. So if the market is complete and with no arbitrage, the fair price for an option at time $t=0$ should be measured under the risk-neutral probability.

The following example intuitively explains why we choose the risk-neutral probability measure when pricing an option instead of the objective probability.

EXAMPLE An asset price at time $t=0$ is $S_0=100$, and at next period the price S_1 will be 120 with probability $p_u=0.6$, or 80 with probability $p_d=0.4$. Thus $u=1.2$, $d=0.8$. For computational simplicity, risk-free interest rate $r=0$. Suppose the exercise price at time $t=1$ is 110, i e. $K=110$. Hence:

(9.19) $$S_0=100$$

(9.20) $$S_1=\begin{cases}120, \textit{with probability}\ 0.6\\80,\ \textit{with probability}\ 0.4\end{cases}$$

The payoff of the call option at expiration is calculated in exhibit 9.

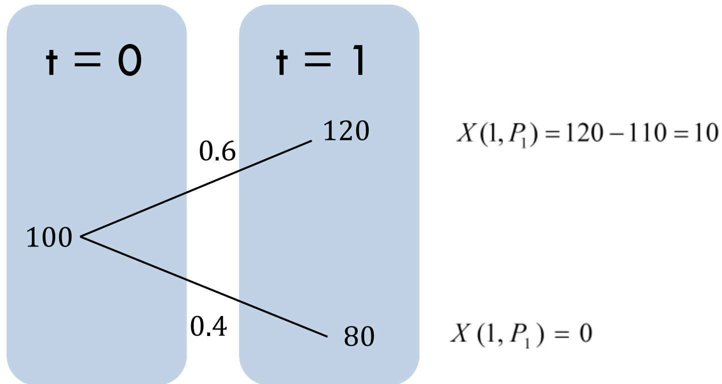


EXHIBIT 9. THE OPTION PRICE IN THE ONE-PERIOD BINOMIAL TREE.

If we compute the discount expected value under the objective probabilities $p_u = 0.6$ and $p_d = 0.4$, we get:

(9.21)

$$X(0, P_0) = \frac{1}{1+0}(10 * 0.6 + 0 * 0.4) = 6$$

If we use the risk neutral probabilities $\mathrm{q_u} = \frac{(1+r)-\mathrm{d}}{\mathrm{u}-\mathrm{d}} = 0.5,\ \mathrm{q_d} = 1 - \mathrm{q_u} = 0.5$, the option price is

(9.22)

$$X(0, P_0) = \frac{1}{1+0}(10 * 0.5 + 0 * 0.5) = 5$$

We see that the theoretical option price differs from the native price above. If we replicate this option by the underlying asset and the bond, we get the portfolio as given by:

(9.23) $$X(0, P_0) = x + yS$$

Where

$$x = \frac{1.2*0-0.8*10}{1.2-0.8} = -20 \qquad y = \frac{1}{100}\frac{10-0}{1.2-0.8} = \frac{1}{4}$$

This means that the replicating portfolio is formed by borrowing 20 dollars from the bank and investing this money in a quarter of a share in the stock. Thus the value of the portfolio at $t = 0$ is five dollars. And at $t = 1$ the value is

(9.24) $$V_1^h = -20 + \frac{1}{4}120 = 10, \quad if\ S_1 = 120$$

(9.25) $$V_1^h = -20 + \frac{1}{4}80 = 0, \quad if\ S_1 = 80$$

We have indeed replicated the option. If anyone invests six dollars to buy the option from us, then we can make a risk-free profit. We sell the option and get six dollars. We invest five dollars in the replicating portfolio and invest one dollar in the bank. At time $t = 1$, the option is completely balanced by the replicating portfolio, and we still have one dollar in the bank. We thus have an arbitrage profit. So, in the absence arbitrage, the fair price of the option is five dollars, which is what we had got with the risk-neutral probability.

5.1.2 - The multiperiod model

We now go on to give the general binomial algorithm. Suppose the dynamics of the stock price are as follows (the horizon time or expiration time is T):

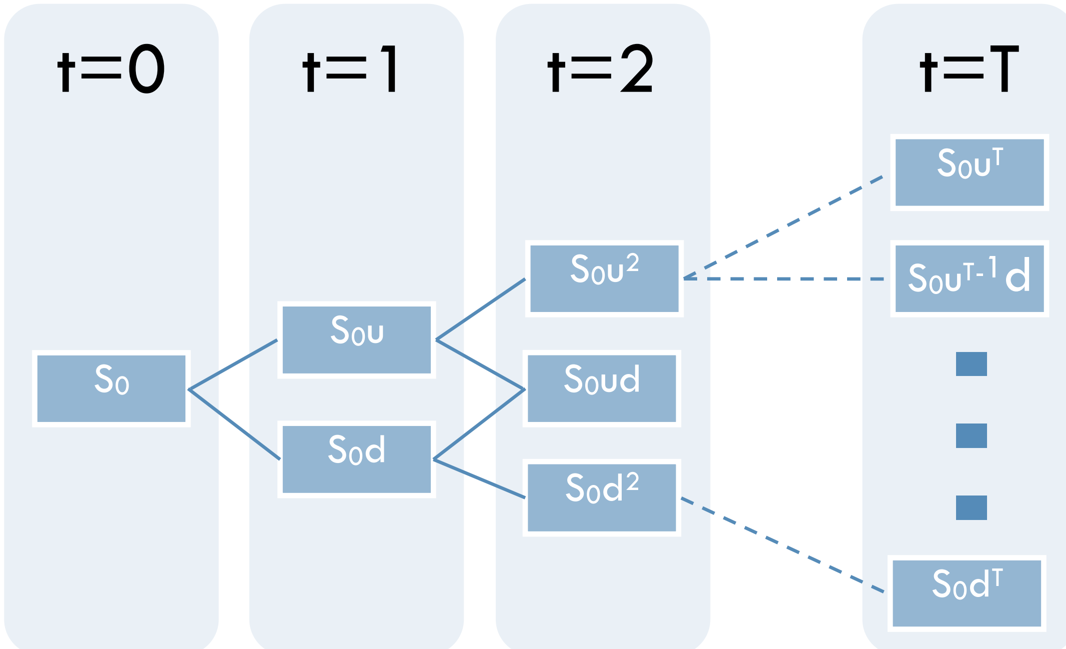


EXHIBIT 10. THE BINOMIAL MULTI-PERIOD TREE.

It is clear from the construction that the stock price at time t can be written as:

$$S_t = S_0 u^i d^{t-i} \text{ with } t = 0,1, \dots, T \text{ and } i = 0,1, \dots, t \tag{9.26}$$

where i denotes the number of up-moves that have occurred. Thus, each node in the binomial tree can be represented by a pair (t, i) with $t = 0,1, \dots, T$ and $i = 0,1, \dots, t$.

Just as we did for the one-period model, we calculate the risk-neutral probabilities. We then use them to find the option price at each node going backwards in the tree.

Suppose that the stock price at time $t = 0$ is S_0 and the exercise price of a European call option at expiration date T is K. The risk-neutral probabilities are:

(9.27)

$$\mathrm{q_u} = \frac{(1+r) - \mathrm{d}}{\mathrm{u} - \mathrm{d}}, \quad \mathrm{q_d} = \frac{\mathrm{u} - (1+\mathrm{r})}{\mathrm{u} - \mathrm{d}}$$

We denote option price as $X[(t,i), P_t]$ at node pair (t,i), then we have the following backward recurrence algorithm:

$$\mathrm{X}\big((\mathrm{T},\mathrm{i}), P_T\big) = \max\big(S_0 u^i d^{T-i} - K, 0\big), with\ i = T, \dots, 0 \tag{9.28}$$

Or:

(9.29)

$$\mathrm{X}\big((\mathrm{t},\mathrm{i}),P_t\big)=\frac{1}{1+r}\big[q_u X\big((\mathrm{t}+1,\mathrm{i}+1),P_t\big)+q_d X\big((\mathrm{t}+1,\mathrm{i}),P_t\big)\big]\ with\ t=T-1,\qquad ,0$$

At the $t=0$, we can get the option price:

(9.30)

$$\mathrm{X}(0,P_0)=\frac{1}{(1+r)^T}\sum_{i=0}^{T}\binom{T}{i}q_u^i q_d^{T-i}\max(Su^i d^{T-i}-K,0)$$

EXAMPLE Suppose the stock price at time $t=0$ is $S_0=100$. The dynamics of the stock price is illustrated below where $u=1.2$, $d=0.8$. Suppose the risk-free interest rate is $r=10\%$, the exercise price of a 3-year European call option $K=110$. We want to calculate the option price at time $t=\ 0$.

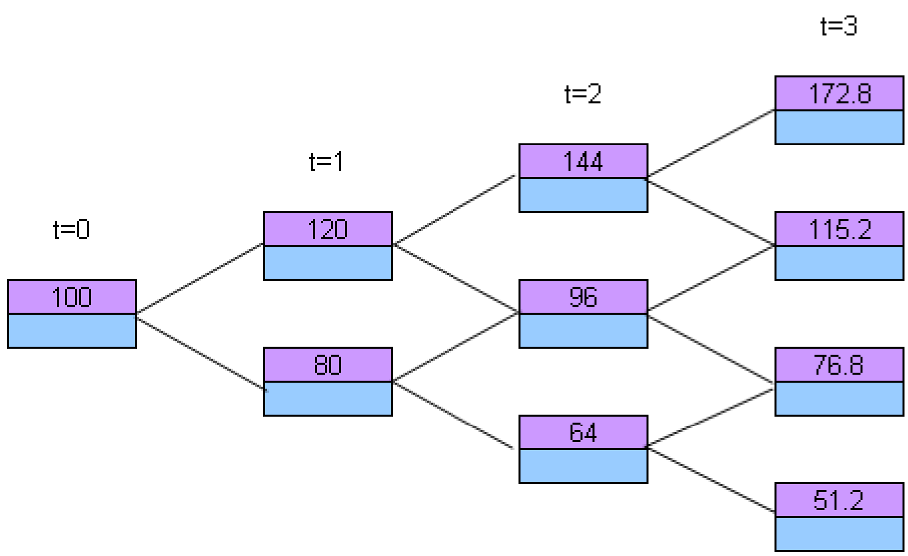


EXHIBIT 11. DYNAMICS OF THE STOCK PRICE.

The risk neutral probability is:

(9.31)

$$\mathrm{q_u}=\frac{1.1-0.8}{1.2-0.8}=0.75,\qquad \mathrm{q_d}=\frac{1.2-1.1}{1.2-0.8}=0.25$$

At time $t=3$ the option price is:

(9.32) $$X(3,P_3)=\max(S_3-K,0)$$

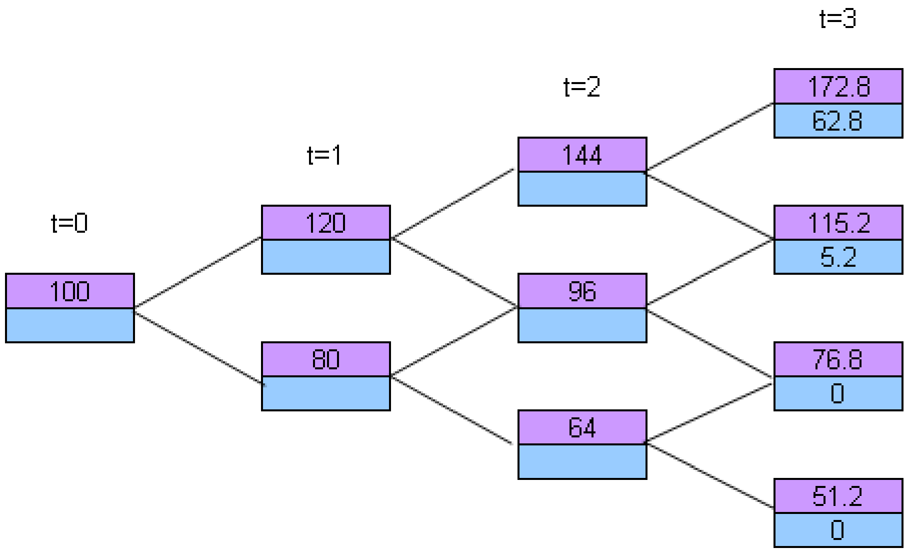


EXHIBIT 12. THE OPTION PRICE AT PERIOD 3.

At time $t = 2$ the option price is:

$$X\big((2,0),P_2\big) = \frac{1}{1.1}(0.75 \cdot 62.8 + 0.25 \cdot 5.2) = 44$$

$$X\big((2,1),P_2\big) = \frac{1}{1.1}(0.75 \cdot 5.2 + 0.25 \cdot 0) = 3.55$$

$$X\big((2,2),P_2\big) = \frac{1}{1.1}(0.75 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0) = 0$$

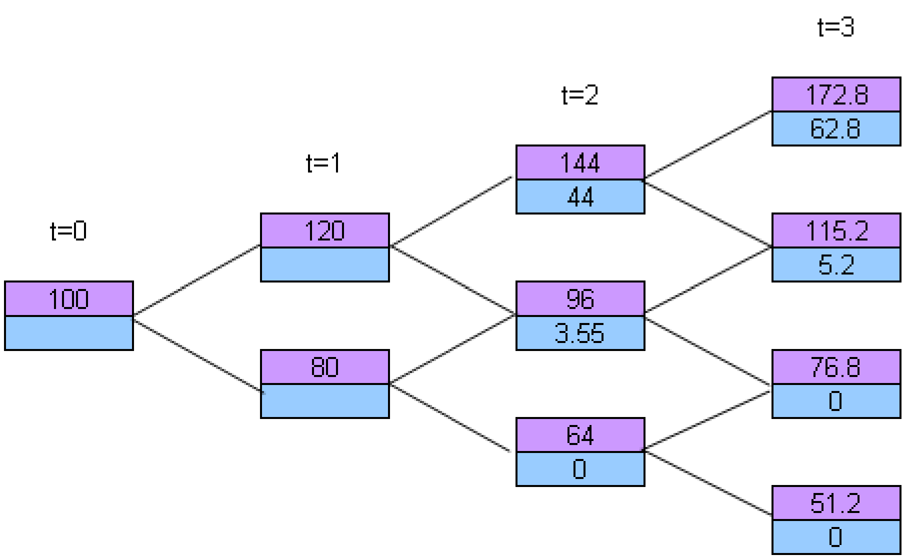


EXHIBIT 13. THE OPTION PRICE AT PERIOD 2.

At time $t = 1$ we get the option prices:

$$X((1,1), P_1) = \frac{1}{1.1}(0.75 \cdot 44 + 0.25 \cdot 3.55) = 30.8$$

$$X((1,0), P_1) = \frac{1}{1.1}(0.75 \cdot 3.55 + 0.25 \cdot 0) = 2.42$$

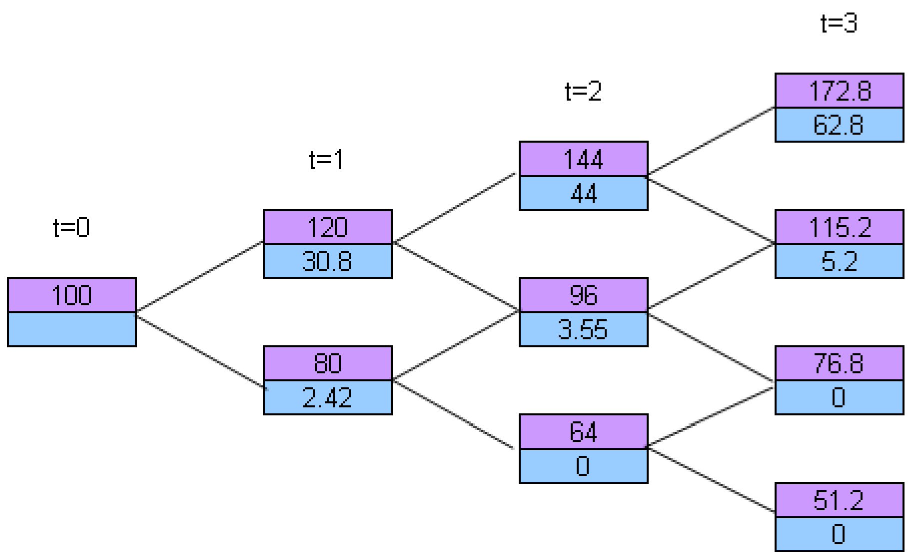


EXHIBIT 14. THE OPTION PRICE AT PERIOD 1.

At time $t = 0$ the option price is:

$$X((0,0), P_0) = \frac{1}{1.1}(0.75 \cdot 30.8 + 0.25 \cdot 2.42) = 21.55$$

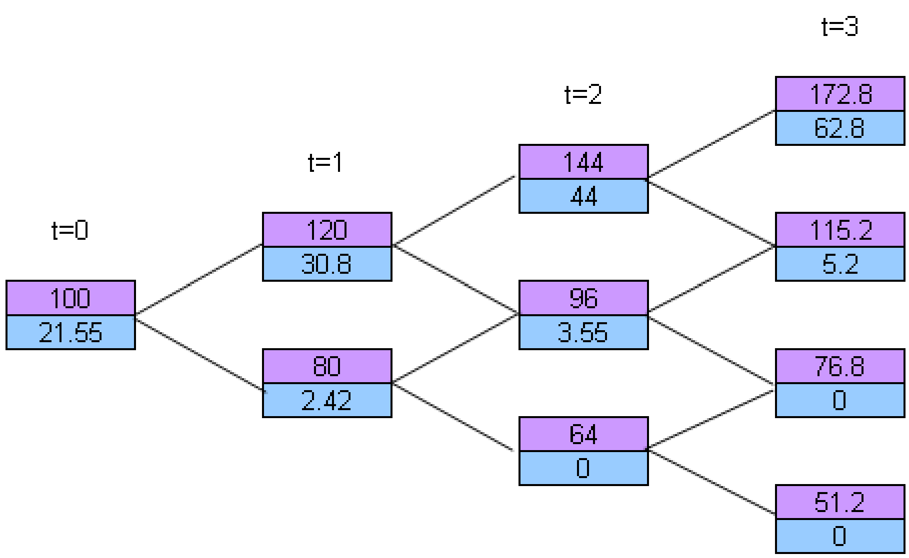


EXHIBIT 15. THE OPTION PRICE AT PERIOD 0.

About interest rates

Generally r denotes an annual interest rate. If we compound n times per year, then $n = 2$ is the semi-annual interest rate, $n = 4$ means quarterly compounding, $n = 365$ is daily compounding and so forth.

Thus the value of 1\$ after one year is $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$. If we let $n \to \infty$, we get the continuous-compounding interest e^r, because $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$.

For t years of compounding n times per year, the continuous-compounding interest rate is e^{rt}, because:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right]^t = [e^r]^t = e^{rt}$$

So the discount rate $1/(1+r)^t$ we have used above can be replaced by the continuous-compounding rate e^{-rt}.

If there are dividends

Consider a stock paying a known dividend yield at rate q. The total return from dividends and capital gains in a risk-neutral world is r. The dividends provide a return of q. Capital returns are therefore $r - q$. So the risk-neutral probability is: $q_u = \frac{e^{(r-q)t}-d}{u-d}$ $\quad q_d = \frac{u-e^{(r-q)t}}{u-d}$

How to choose uu and dd:

In practice, when constructing a binomial tree to represent the movements in a stock price, we choose the parameters u and d to match the volatility of the stock price. We suppose that the expected return on a stock (in the real world) is u and its volatility is σ, the step is of length Δt, thus:

$$u = e^{\sigma \Delta t} \qquad d = e^{-\sigma \Delta t}$$

5.2 - Black-Scholes model for the continuous case

The Black-Scholes option pricing model has been one of the most influential formulas in Finance since its initial publication in 1973. In 1997, Myron Scholes and Robert Merton won the Nobel Prize in Economics for their work.

The Black- Scholes model makes the following assumptions:

- The option type is European
- The evolution of share prices follows a continuous random process
- The model is based on a lognormal distribution of stock prices
- No commissions or taxes are charged
- Short-selling is permitted and the proceeds of such a sale are immediately available for use
- Stock prices move in smooth increments (there are no stock market crashes or bubbles)
- We can borrow or lend at the risk-free interest rate and this rate is constant
- Markets are efficient and there are no arbitrage possibilities.

Then the price of underlying asset S_t follows a geometric Brownian motion with constant drift r and volatility σ:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{9.33}$$

Or we can write it explicitly as (please refer to APPENDIX B):

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B_t} \tag{9.34}$$

Where B_t is standard Brownian motion with normal distribution i. e. $B_t \sim N(0,t)$. exhibit 16 gives a possible path of the Geometric Brownian Motion.

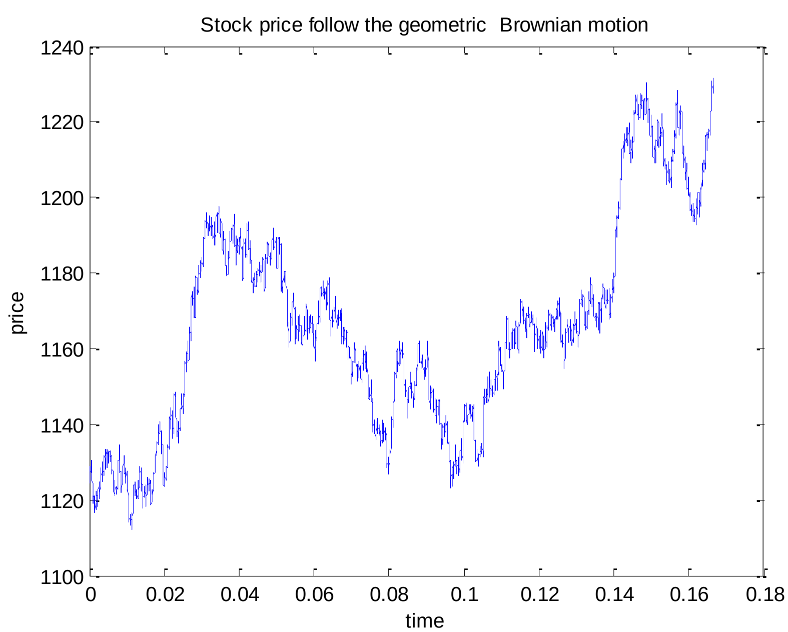


EXHIBIT 16. THE STOCK PRICE FOLLOWS A GEOMETRIC BROWNIAN MOTION.

Suppose that $f(t,S)$ is the price of a European option on an underlying stock S at time t. Then, by Itô's formula and risk-neutral evaluation, $f(t,S)$ satisfies the following partial differential equation (PDE):

(9.35)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0$$

Equation (9.35) is called the Black-Scholes-Merton differential equation. It has many solutions according to the different boundary conditions. In the case of a European call, the key boundary condition is:

(9.36) $$f(T,S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

In the case of a European put, the boundary condition is:

(9.37) $$f(T,S_T) = \max(K - S_T, 0)$$

By the differential equation (9.35) and boundary conditions (9.36) or (9.37), the price of a European call and of a European put on a non-dividend-paying stock are respectively:

(9.38) $$c = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

(9.39) $$p = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1)$$

where

(9.40)

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S_0/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

and $\Phi(\cdot)$ is the cumulative standard normal distribution function. The details are given in APPENDIX C

If there are dividends on the underlying asset S, suppose the dividend yield is q. Then Equations (9.33), (9.35), (9.38) and (9.39) change to:

(9.41) $$dS_t = (r-q)S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

(9.42)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0$$

(9.43) $$c = S_0 e^{-qT}\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

(9.44) $$p = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0 e^{-qT}\Phi(-d_1)$$

where:

(9.45)

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\log(S_0/K) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

The Black-Scholes model is very popular in Economics because it is easy to apply in many kinds of stock markets. It has some weaknesses though: it cannot be used in an incomplete market since it would contradict the assumptions made for the model and it cannot capture the heavy tail of the stock market distribution.

5.3 - Monte-Carlo simulation

The basis of Monte-Carlo simulation is the Strong Law of Large Numbers stating that the arithmetic mean of independent, identically distributed variables converges towards their mean almost surely.

If we want to calculate the expectation of the function $f(X)$, that is if we want to find $E[f(X)]$, we can independently take a large number of samples x_i from the distribution of X, and calculate the sample mean $\hat{f}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$. By the Law of Large Numbers, the sample mean is an estimator of $E[f(X)]$ because:

(9.46)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = E[f(X)]$$

For example, if we want to calculate the price of a European call with strike price K and expiration T underwritten on a stock S, at time T, the payoff is:

(9.47) $$f(T, S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

At time $t = 0$, the price of a European call is the discounted expectation of the payoff at time T, i. e.:

(9.48) $$f(0, S_T) = E^Q[e^{-rT}\max(S_T - K, 0)]$$

where Q is a risk-neutral probability measure (we also call Q a martingale equivalent measure).

Often there is no analytical solution with a closed form for this problem, especially when the measure Q is not easy to obtain. We have to calculate it numerically.

One way of doing this is applying Monte Carlo simulation. We simulate n independent realised payoffs $f_i(T, S_T), i = 1, 2 \dots n$ and then calculate $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} f_i(T, S_T).e^{-rT}$ as an approximation for the option price $E^Q(e^{-rT}f(T, S_T))$.

From Equation (9.47) we know that the payoff $f(T, S_T)$ is a function of the stock price S_T, and S_t follows the geometric Brownian motion:

(9.49)
$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$$

If we divide a time horizon T in N periods, then we will have the partition $\{t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \ldots, t_N = N\Delta t\}$ and we simulate a GBM (Geometric Brownian Motion) using the following equation:

(9.50)
$$S_t = S_{t-\Delta t} \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma N(0,1)\sqrt{\Delta t}\right], \qquad t = 1,2, \quad ,T$$

If we simulate independently N different paths according to the procedure above, then the price of a European call can be estimated by:

(9.51)
$$f(0, S_0) = e^{-rT} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \max\left(S_T^i - K, 0\right)$$

A similar procedure can be used to estimate the price of a European put.

In exhibit 17 we simulate 10 paths of the stock price following a Geometric Brownian Motion.

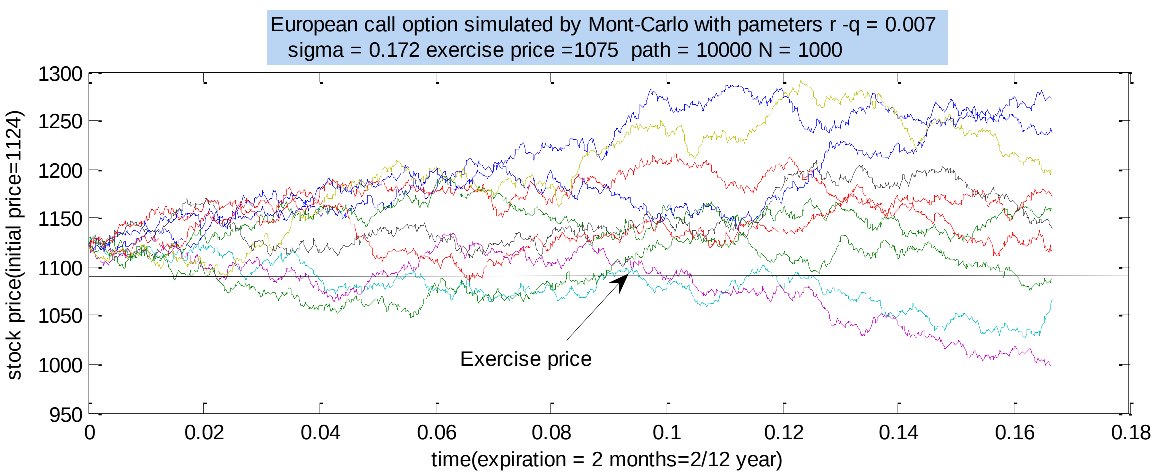


EXHIBIT 17. MONTE CARLO SIMULATION FOR THE EUROPEAN CALL.

Estimating an American option is much more complicate than a European option because it can be exercised at any time between the purchase date and the expiration date. Generally the holder of an American option optimally compares the payoff from immediate exercise with the expected payoff from continuation, and then exercises the option if the immediate payoff is higher. Thus the optimal exercise strategy is fundamentally determined by the conditional expectation of the payoff from keeping the option alive. (LONGSTAFF AND SCHWARTZ, 2001) use least-squares Monte-Carlo (LSM) approach to tackle this problem skilfully.

It is easy to get the payoff at the final date. The optimal exercise strategy at expiration is to exercise the option if it is in-the-money. Prior to the expiration, however, the optimal strategy is to compare the immediate exercise value with the expected cash flow from continuing, and then exercise the option if immediate exercise is more valuable. Thus, the key to optimally exercising an American option is identifying the conditional expected value of continuation. LSM method uses the cross-sectional information in the simulated paths to identify the conditional expectation function.

This is done by regressing on the subsequent realised cash flow from continuation. The estimated valued by this way is an efficient unbiased estimate of the conditional expectation function and allows us to accurately estimate the optimal stopping rule for the option.

For example, at the expiration date T the optimal exercise strategy is:

(9.52)
$$f(T, S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

At the time t prior to expiration T, the optimal strategy is to compare the payoff from immediate exercise with the conditional expectation of keeping the option alive i. e.:

(9.53).
$$f(t, S_t) = \max_{\tau \in [t,T]} \{max(S_t - K, 0), E_t^Q[F(\tau, S_\tau)]\}$$

The difficulty is how to estimate the conditional expectation $E_t^Q[F(\tau, S_\tau)]$where $\tau \geq t$. LSM method says that the conditional expectation $E_t^Q[F(\tau, S_\tau)]$ can be estimated by regressing on the subsequent realised cash flows. Suppose that the regressed polynomial based on the next cash flow is $P(X)$, then at each simulated path the value of $P(X)$is as an estimator for the conditional expectation $E_t^Q[F(\tau, S_\tau)]$.

5.4 - Finite difference method

We have seen the price of the option $f(t, S)$ follows the differential equation:

(9.54)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0$$

Where the stock price S_t follows the geometric Brownian motion:

(9.55)

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

If we take logarithm for the price of asset $X = \log S$ then Equation (9.54) changes into:[24]

(9.56)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} - rf = 0$$

We want to solve Equation (9.56) using the finite difference method. We approximate the derivatives by the *forward* differences:

(9.57)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}$$

[24] This substitution makes the computation more efficient.

(9.58)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{\Delta X^2}$$

(9.59)

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta X}$$

We substitute them into Equation (9.56) to get the finite difference equation:

(9.60)

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta X} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{\Delta X^2} - rf_{i+1,j} = 0$$

We can regroup the terms as follows:

(9.61)

$$f_{i,j} = \left[\Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta X^2} + \frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{2\Delta X}\right)\right] f_{i+1,j+1} + \left[1 - \Delta t\frac{\sigma^2}{\Delta X^2} - r\Delta t\right] f_{i+1,j} + \left[\Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta X^2} - \frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{2\Delta X}\right)\right] f_{i+1,j-1}$$

We can simplify the above equation, if we set:

(9.62)

$$p_u = \Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta X^2} + \frac{r - q - \frac{\sigma^2}{2}}{2\Delta X}\right)$$

(9.63)

$$p_m = 1 - \Delta t\frac{\sigma^2}{\Delta X^2} - r\Delta t$$

(9.64)

$$p_d = \Delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\Delta X^2} - \frac{r - q - \frac{\sigma^2}{2}}{2\Delta X}\right)$$

and Equation 0 becomes:

(9.65)

$$f_{i,j} = p_u f_{i+1,j+1} + p_m f_{i+1,j} + p_d f_{i+1,j-1}$$

From the last payoff of option at time T, we can calculate the price of option at time $t = 0$ by using the forward difference method of Equation (9.65). This process can be expressed as in the following figure, which is a trinomial tree:

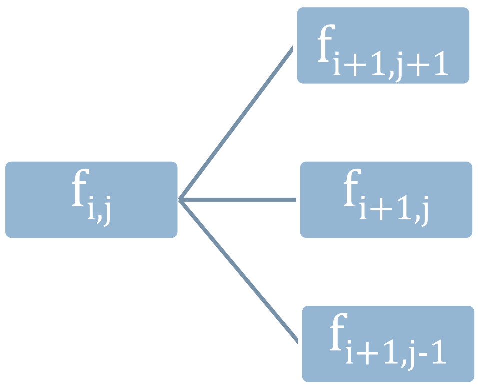


EXHIBIT 18. FINITE DIFFERENCE METHOD.

9:6 - OPTION SENSIBILITIES – THE "GREEKS"

The "Greeks" measure the sensitivity of an option with respect to the price change of the underlying asset and the change of model parameters. They are used by professional traders to create and hedge an option position, and they are used as well by investors to estimate how a change in market conditions will affect the value of their option positions. The "Greeks" are also used to help select appropriate options for implementing various option strategies.

Let $f(t,S)$ denote an option price function at time t based on an underlying asset with price S_t. The Greeks are defined as the following five parameters:

(9.66) $$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \quad \text{delta}$$

(9.67) $$\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \quad \text{gamma}$$

(9.68) $$\mathrm{P} = \frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{rho}$$

(9.69) $$\Theta = \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{theta}$$

(9.70) $$\mathcal{V} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{vega}$$

A portfolio which is insensitive to small changes in one of the parameters above is said to be neutral and this means that the corresponding Greek equals zero. A portfolio with zero delta, for example, is said to be delta-neutral.

For a European call on a non-dividend-paying stock with strike price K and time to maturity T we have the following relations:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} = \Phi(d_1) \tag{9.71}$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \tag{9.72}$$

$$\mathrm{P} = \frac{\partial f}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{9.73}$$

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{9.74}$$

$$\mathcal{V} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = S\phi(d_1)\sqrt{T-t} \tag{9.75}$$

where $\Phi(\cdot)$ denotes the cumulative standard normal distribution and $\phi(\cdot)$ denotes its density function.

6.1 - Delta (Δ)

From the definition, we see that delta is defined as the rate of change in the option price with respect to the price of the underlying asset. It is the slope of the curve that relates the option price to the underlying asset price. Now we give two examples to explain how to use delta in hedging option prices.

EXAMPLE Let us assume that we have sold an option with the price function $f(t,S)$, and that we wish to hedge it using the underlying asset itself. Suppose that we buy x shares of the underlying asset. Then we have created a portfolio $-f(t,S) + xS$. We want to immunize this portfolio against small variations in the underlying asset price S. In other words, we want to create a delta-neutral portfolio:

$$\frac{\partial}{\partial S}[-f(t,S) + xS] = 0 \tag{9.76}$$

with the solution:

(9.77)

$$x = \frac{\partial f(t,S)}{\partial S} = \Delta$$

We thus see that the delta of an option gives us the number of units of the underlying stock that is needed in order to hedge the option.

EXAMPLE Suppose an investor holds 600 shares of ABC trading at $50.00. The ABC 50 put option has a delta of -0.50. Calculate how many put options should we buy for delta-hedge. Please note that options are traded for a hundred shares of the underlying asset.

We first construct the portfolio as $600S + 100x \cdot f(t,S)$. If the portfolio is to be hedged to variations in the stock price, then we must have:

(9.78)

$$\frac{\partial}{\partial S}[600S + 100x \cdot f(t,S)] = 0$$

which yields:

(9.79)

$$x = \frac{600}{-100\dfrac{\partial f}{\partial S}} = -\frac{6}{\Delta} = -\frac{6}{(-0.50)} = 12$$

6.2 - Gamma (Γ)

Gamma, by definition, is the rate of change of delta with respect to the price of the underlying asset. If the gamma is small, delta changes slowly and adjustments to keep the portfolio delta-neutral need to be made relatively infrequently. If the gamma is large in absolute terms, delta is highly sensitive to the price of the underlying asset. It is then quite risky to leave a delta-neutral portfolio unchanged for any length of time.

So we can see that the gamma can be used as a measure of the accuracy of the delta equation for estimating the change in the price of an option for a small change in the price of underlying asset. Another use of gamma is that it gives traders a gauge for determining how frequently they need to update or renew their delta hedges on their option positions.

6.3 - Rho (P)

The rho of an option is the rate of change in value of an option with respect to the interest rates. It measures the sensitivity of the value of the option to the interest rate. For a stock option, rho is relatively unimportant because the value of a stock option changes very little for reasonable changes in interest rates. Rho is much more important to currency options, as changes in the interest rate can directly affect the exchange rate between two currencies.

6.4 - Theta (Θ)

Theta is the rate of change in value of an option with respect to the passage of time with all else remaining the same. Theta is sometimes called the *time decay* of an option, since the value of an option declines (all else being equal) as the time to maturity approaches. Theta is not important when there is a long time remaining to maturity; it becomes increasingly important as the time to maturity nears. The implication for investors is that they should expect the value of their options to fall more quickly as the maturity date approaches.

6.5 - Vega ($\mathcal{V}$)

The vega of an option is the rate of change of value of the option with respect to the volatility of the underlying asset. If vega is high in absolute terms, the option value is very sensitive to small changes in the volatility. If vega is low in absolute terms, volatility changes have relatively little impact on the value of the option.

Vega measures the sensitivity to perceive changes in market volatility. It is also a parameter for hedging an option position. To hedge their position against changes in volatility, traders calculate the vega of the option, and buy or sell other options with an offsetting vega value. This is different with delta and gamma, which hedge their position by buying or selling shares of the underlying asset.

9:7 - OPTION STRATEGIES

7.1 - Basic strategies

7.1.1 - Long call

Where the investor expects the price of the underlying stock to rise, the long call (that is, a call that was bought) can provide the leveraged exposure to the price rise. Buying a call option also locks in a maximum purchase price for the life of the option.

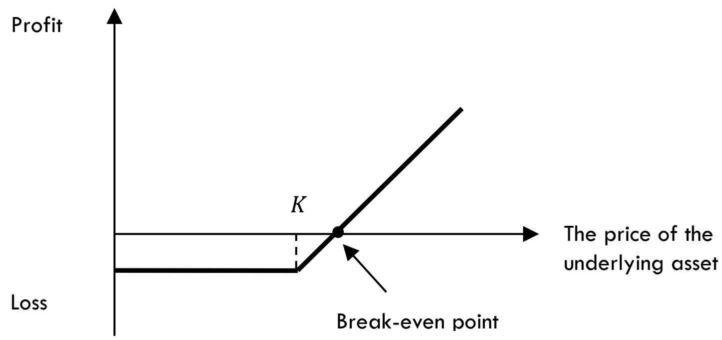


EXHIBIT 19. LONG CALL.

Profits and losses: The maximum loss the investor can suffer is the premium paid for the option, which will occur if the share price at expiration is below the strike price. The investor breaks even if at expiration the share price is equal to the strike price of the option plus the premium paid. As the share price rises beyond this point, the potential profits of the bought call are unlimited.

EXAMPLE An investor feels that the ABC stock price will rise over the coming months. To make profit out of these expectations, he could buy ABC stocks, which are currently priced at $16.00 per share. 100 common shares will cost $1600. Alternatively, six-month ABC options are available with strike price at $17. The premium (the price) of this option is $0.75 per share. It costs $75 to buy one ABC call option (100 common shares).[25]

For common shares, the break-even point is $16. When the price rises over $16, the investor will profit from the upward move in prices. For a call option, as the stock price rises over the break-even point $17.75, he can win the net profit from exercising the call. Whereas the stock price is between $17 and $17.75, he can still exercise the option to decrease his losses with what he paid for the premium of the option. When the stock price stays below $17 the call option will be worthless, but the investor cannot lose more than $0.75 per share.

Stock price	[0, 16]	[16, 17]	[17, 17.75]	[17.75, infinite]
Common stock (100 shares)	Losses from $1600 to $0	Profits from $0 to $100	Profits from $100 to $175	Profits from $175 to infinite
Option ABC (1 call option)	Losses no more than $75	Losses no more than $75	Losses from 75 to $0	Profits from $0 to infinite

TABLE 6. COMPARISON OF THE LOSSES AND PROFITS BETWEEN A COMMON STOCK AND THE CALL.

[25] Montréal Exchange. (n. d.) *Reference manual: Equity options.* Available at Montréal Exchange: http://www.m-x.ca/f_publications_en/en.guide.options.pdf

The investor would like to choose to invest in the common stock. On the other hand, if we consider the amounts invested in the common stock and the option and if we compare the net profit and the leverage between them, we would probably be better off by choosing the option.

Scenario1 Six months later, the ABC stock price rises to $20 per share.

Transaction	Investment	Net profits	Losses	Leverage
Common stock (100 shares)	$1600	$400	0	400/1600=25%
Option ABC (1 call)	$75	$225	0	225/75=300%

TABLE 8. COMPARISON OF THE NET PROFIT BETWEEN THE COMMON STOCK AND THE CALL.

We see that the net return of the option is 300%, much greater than that of the common stock, which is 25%.

Scenario 2 Six months later, the stock price falls below $16.

Transaction	Investment	Net profits	Losses	Leverage
Common stock (100 shares)	$1600	$0	Maximum $1600	0
Option ABC (1 call)	$75	$0	Maximum $75	0

TABLEAU 9. COMPARISON OF THE LOSSES BETWEEN THE COMMON STOCK AND THE CALL.

We see that the risk of losses of the call option in this case is no more than $75, much less than the risk of the common stock in the market, which is $1600.

7.1.2 - Long put

When the investor expects the price of the underlying stock to fall, the long put (that is, the put he bought) provides leveraged exposure to the price fall. Buying a put option is one of the few ways investors can speculate on a falling share price. Put options may also be used to protect an investor's holding in the underlying stock.

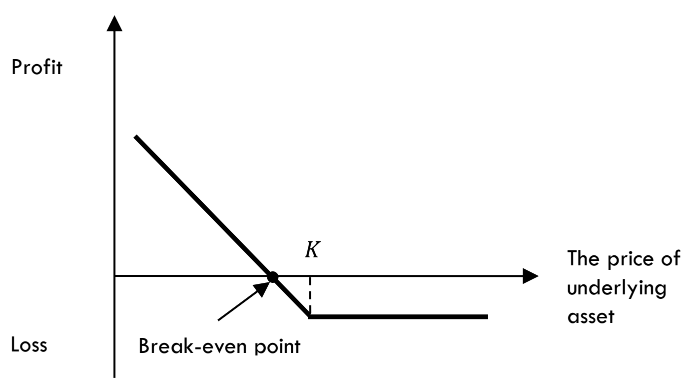


EXHIBIT 20. LONG PUT.

Profits and losses: The maximum loss the investor can suffer is the premium paid for the option, which occurs if the share price at expiry is above the strike price. The investor breaks even if at expiration the share price is equal to the strike price of the option less the premium paid. As the share price falls beyond this point, the potential profit of the bought put are limited only by a fall in the share price to zero.

EXAMPLE We change the call option in the previous example to a put and keep the currently common stock price in $16. There are put options with strike price $17 available. The premium of the put option is $0.75. Then we analyse the difference of the net profit and leverage between the common stock and the put option if buying 100 shares of the common stock and 1 put option.

We know that the break-even point of the common stock is $16.00. The investor will profit if the price rises over $16. For a put option, however, as the stock price falls below $16.25 (the break-even point of the option), he can win the net profit from exercising the put. Whereas the stock price is between $16.25 and $17, he can still exercise the option to decrease his losses with what he had paid for the premium of the option. When the stock price rises over $17.00, the put option will be worthless, but the investor cannot lose more than $0.75 per share.

Stock price	[0, 16]	[16, 16.25]	[16.25, 17]	[17, infinite]
Common stock (100 shares)	Losses from $1600 to $0	Profits from $0 to $25	Profits from $25 to $100	Profits from $100 to infinite
Option ABC (1 put)	Profits from $1625 to $25	Profits from $25 to $0	Losses from 0 to $75	Losses no more than $75

TABLE 10. COMPARISON OF THE LOSSES AND PROFITS BETWEEN THE COMMON STOCK AND THE PUT.

If the investor expects that the price of the underlying stock will fall, he can either short sell the common stock or buy the put options to profit from a drop in the underlying price. We analyse the difference of the profit between those two strategies.

For the short stock position, if the stock price falls after six months, for example if the stock price falls to $14, the investor sells 100 shares at price $16 per share, totalling $1600 for 100 shares. Then after six months, he buys 100 shares at the price $14 to return the short stock. He then profits $\$1600 - \$1400 = \$200$ from the drop in the stock price.

If he invests $75 to buy one put option (100 shares) of this stock, after six months when the underlying price falls to $14 per share, he exercises the put option and the profits are $\$1700 - \$1400 - \$75 = \$225$.

Transaction	Investment	Net profits	Losses	Leverage
Common stock (100 shares)	$1600	$200	0	200/1600=12.5%
Option ABC (1 put)	$75	$225	0	225/75=300%

TABLE 11. COMPARISON OF THE LOSSES BETWEEN THE COMMON STOCK AND THE PUT.

From the table above, we see that the net return of the option is 300%, much greater than that of the short sell, which is 12.5%.

On the contrary, if the stock price rises instead, the investor of a short stock will experience losses. The investor of a put option, on the other hand, could not lose more than $75, which is the premium he paid for the option.

7.1.3 - Short (selling) call

Short selling a call option means an obligation for sellers to sell the underlying stock with the strike price, any time up till expiry. In return, sellers receive a premium. A short call is another very popular strategy with investors. Short call is typically used by investors that hold the underlying shares to protect their securities from a declining market.

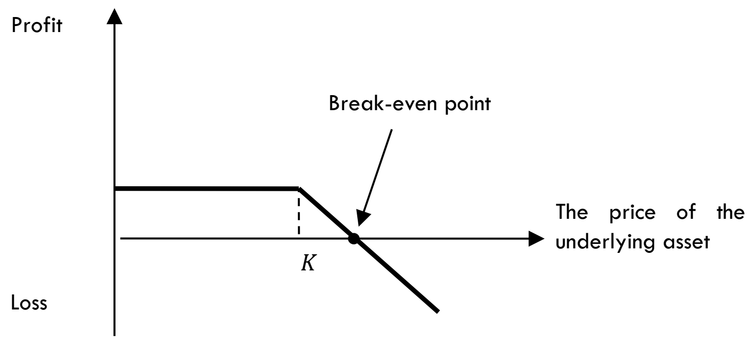


EXHIBIT 21. SHORT CALL.

Profit and losses: The maximum profit is limited to the premium received from selling the call. But the loss is unlimited in a rising market.

EXAMPLE An investor holds one hundred shares of ABC common stock. The current price is $14.00 per share. Concerned about stable to slightly weakening prices, he decides to write one (100 shares) call option with exercise price $15.00 at a premium of $0.50 per share.[26]

By this way the investor can protect his ABC shares against moderate declines in the share price down to $13.50 (i. e. $\$14.00 - \$0.50$) since losses on his stock will be compensated by the option premium he has received. The price of $13.50 is the break-even point for the seller.

If the stock price rises above $15.00, the investor will find that his shares are exercised by the buyer of the option. The buyer of the option can realise the net profit by selling the stock over $15.50 (i. e. $\$15.00 + \$0.50$). This is the break-even price for the buyer. Of course, the investor will lose the opportunity to sell his shares in the stock market.

If the stock price stays below $15.00, then the buyer of the call will not exercise his option and then the investor will retain the entire option premium, which protects his shares from the falling stock price.

Stock price	[0, 13.5]	[13.5, 14]	[14, 15]	[15, infinite]
Write 1 short call option	Losses from $1350 to $50 in the common stock but gets profits $50 from the written call	Losses from $50 to $0 in the common stock but gets profits $50 from the written call	Profits from $0 to $100 in the common stock and still profits $50 from the written call	Have to deliver the common stock to the option buyer and the losses from the written call are unlimited

TABLE 12. SUMMARY OF TRANSACTIONS FOR WRITING 1 SHORT CALL.

From above figure, we see that when the stock price fall into [13.5, 15], investor of selling call can obtain the net profit, otherwise when the stock price fall out of [13.5, 15], he will suffer either from the common stock price or from his written call.

---

[26] Montréal Exchange. (n. d.) *Reference manual: Equity options.* Available at Montréal Exchange: http://www.m-x.ca/f_publications_en/en.guide.options.pdf

7.1.4 - Short (selling) put

Selling (short) a put option means an obligation for sellers to buy the underlying stock with the strike price, any time up until expiry. In return, sellers receive a premium.

The written put can provide the investor with extra income in flat to rising markets. It can also be used as a way to buy stocks cheaply. This strategy is generally used when the investor expects the share price to remain steady or to slightly increase over the life of the option.

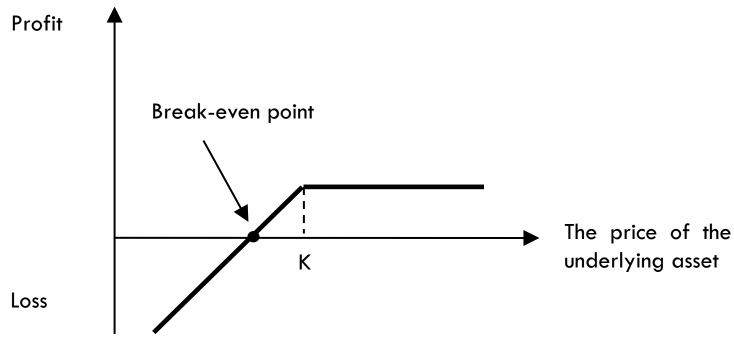


EXHIBIT 22. SHORT PUT.

Profits and losses: The maximum profit is limited to the premium received from selling the put option, but the loss is unlimited in the falling market.

EXAMPLE In the previous example, if the investor feels that the shares will slightly increase over a long term, he will decide to write 1 put option (100 shares) with strike price $15.00 at a premium $0.50 per share.

The common shares are trading at $14.00. If the stock price drops below $15.00, the investor will be assigned to take delivery of ABC shares at price $15.00, since the holder of the put will exercise his option. The investor will risk losing a large sum of money when the stock price drops substantially.

If the stock price stays above $15.00, the investor will retain his option premium but might regret not having purchased ABC shares at $14.00.

Stock price	[0, 14]	[14, 14.5]	[14.5, 15]	[15, infinite]
Written 1 short put option	Losses from $1400 to $0 in the common stock. Losses from $1450 to $50 in the written put	Profits from $0 to $50 in the common stock. Losses from $50 to $0 in the written put	Profits from $50 to $100 in the common stock, Profits from $0 to $50 in the written put	Profits from $100 to infinite. Profits $50 in the written put.

TABLE 13. SUMMARY OF TRANSACTIONS FOR WRITING 1 SHORT PUT.

7.2 - Complex strategies

7.2.1 - Bear call spread

An investor buys a call option B with strike price K_2 and simultaneously sells another call option A with strike price K_1 on the same stock with the same expiration but with a lower strike price (i. e. $K_1 < K_2$).

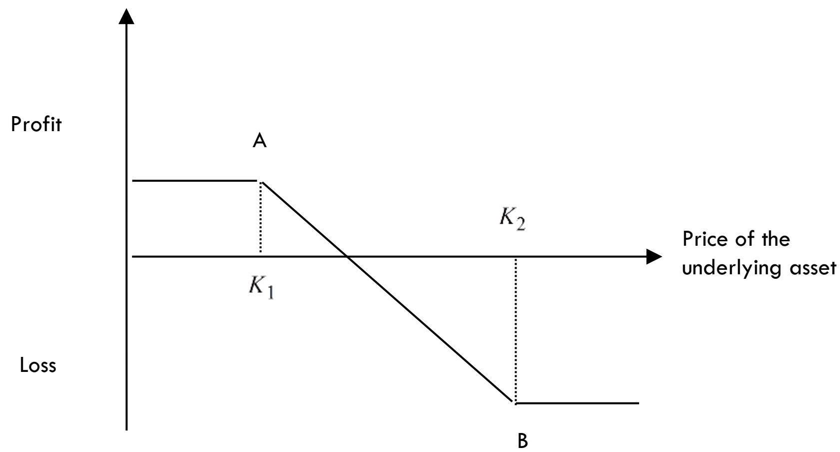


EXHIBIT 23. BEAR CALL SPREAD.

An investor expects that a stock market will fall moderately. He sells a call option A to take advantage of a bearish market and the premium gained affords some upside protection with buying a call option B. The spread offers a limited profit if the underlying asset falls and a limited loss exposure if the underlying rises.

Profits and losses: The profit is limited to the net premium credit. Maximum profit occurs where underlying asset falls to the level of the lower strike price or below. The loss is limited to the difference between the two strike minus the net credit received in establishing the position. Maximum loss occurs where the underlying asset rises to the level of the higher strike price or above.

7.2.2 - Bull call spread

An investor buys a call option A and simultaneously sells another call option B on the same stock having the same expiration but with a higher strike price (i. e. $K_1 < K_2$).

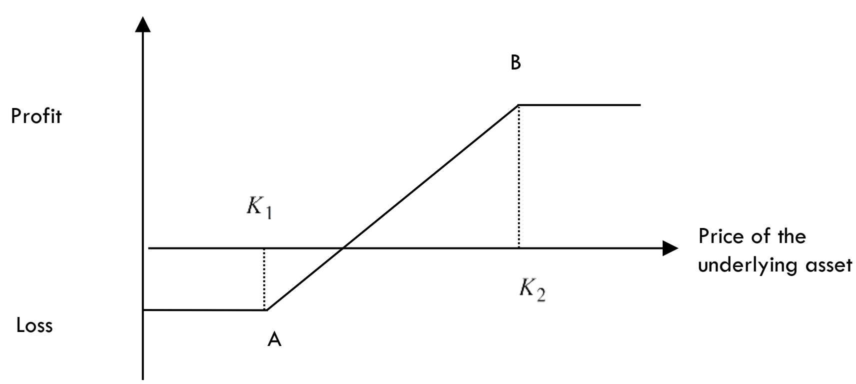


EXHIBIT 24. BULL CALL SPREAD.

An investor expects that the stock market will rise moderately. To profit from a bullish market he decides to buy a call option A and the premium gained from selling another call option B reduces the purchase price of the call. The spread offers a limited profit potential if the underlying asset rises and a limited loss if the underlying asset falls.

Profits and losses: The profit is limited to the difference between the two strike prices minus net premium cost. Maximum profit occurs where the underlying asset rises to the level of the higher strike price or above. The loss is limited to any initial premium paid in establishing the position. Maximum loss occurs where the underlying asset falls to the level of the lower strike price or below.

7.2.3 - Bear put spread

An investor buys a put option B and simultaneously sells another put option A on the same stock having the same expiration but with a lower strike price (i.e. $K_1 < K_2$).

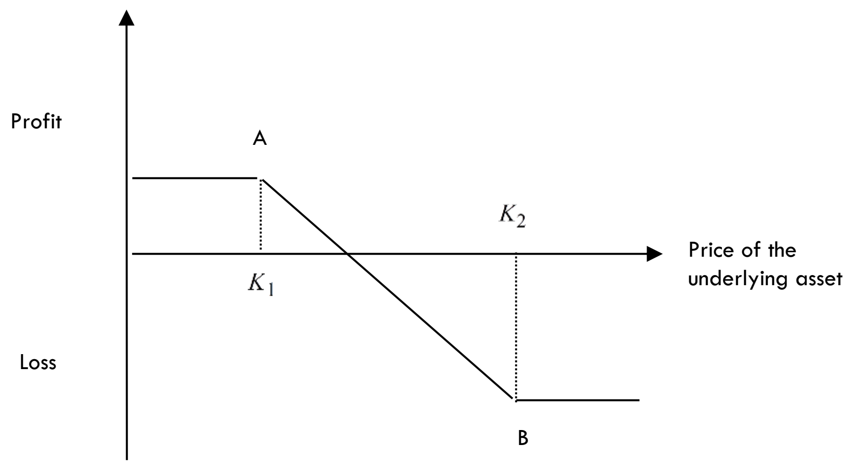


EXHIBIT 25. BEAR PUT SPREAD.

An investor expects that a stock market will fall moderately. He buys a put option B to make profit out of a bearish market[27] and the premium gained from selling another put option A reduces the purchase price of the long put. The spread offers a limited loss exposure if the underlying asset rises and a limited profit if the underlying asset falls.

Profits and losses: The profit is limited to the difference between the two strike prices minus the net premium cost. Maximum profit occurs when the underlying asset falls to the level of the lower strike price or below. The loss is limited to the initial premium paid in establishing the position. Maximum loss occurs when the underlying asset rises to the level of the higher strike price or above.

[27] A bearish market is a market whose prices are expected to fall.

7.2.4 - Bull put spread

An investor buys a put option A and simultaneously sells another put option B on the same stock having the same expiration but with a higher strike price (i.e. $K_1 < K_2$).

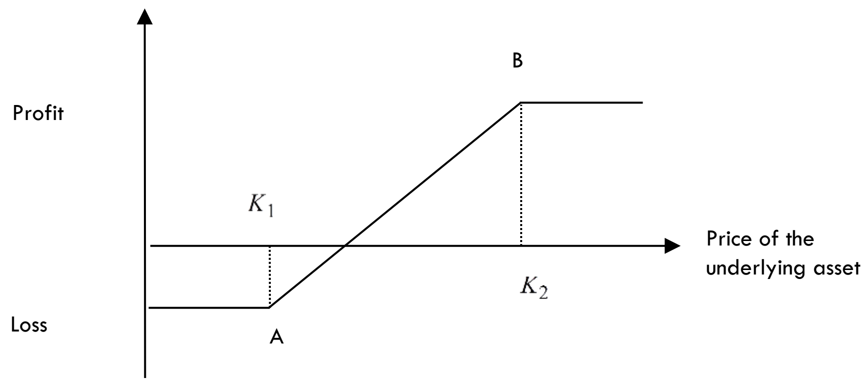


EXHIBIT 26. BULL PUT SPREAD.

An investor expects that a stock market will rise moderately. He sells a put option B to profit from a bullish market[28] and the premium gained affords some downside protection with a long put option A. The spread offers a limited profit potential if the underlying asset rises and a limited loss if the underlying asset falls.

Profits and losses: The profit is limited to the net premium credit. Maximum profit occurs when the underlying asset price rises to the level of the higher strike price or above. Maximum loss occurs when the underlying asset falls to the level of the lower strike price or below.

7.2.5 - Long straddle

An investor buys a call B and put A on the same underlying asset with the same strike price and the same expiration date.

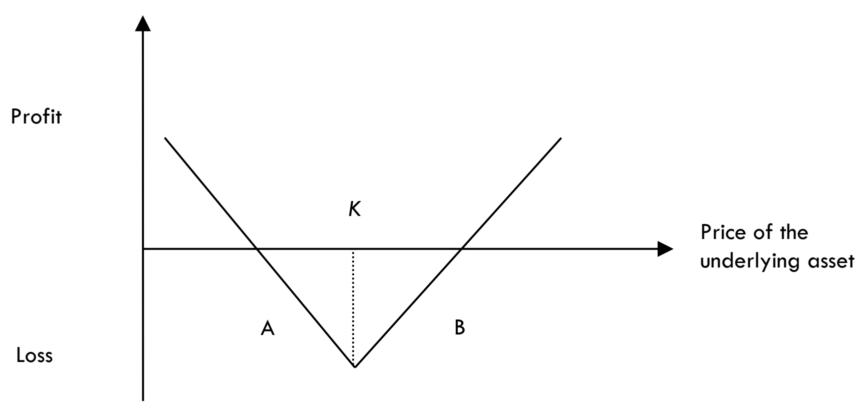


EXHIBIT 27. LONG STRADDLE.

An investor expects that a stock market price will have high fluctuations but he is unsure whether this move is favourable or unfavourable. So he buys a put and a call option to profit from the price volatility. The long straddle investor expects the future price fluctuations of the underlying stock to be greater than the cost of buying the option.

[28] A bullish market is a market whose prices are expected to rise.

Profit and losses: The profit is unlimited for an increase or decrease in the underlying asset price. The loss is limited to the premium paid in establishing the position. The loss will be greatest if the underlying asset is at the strike price of the put option at the expiration date.

7.2.6 - Short straddle

An investor sells a call and put option on the same underlying asset with the same strike price and the same expiration date.

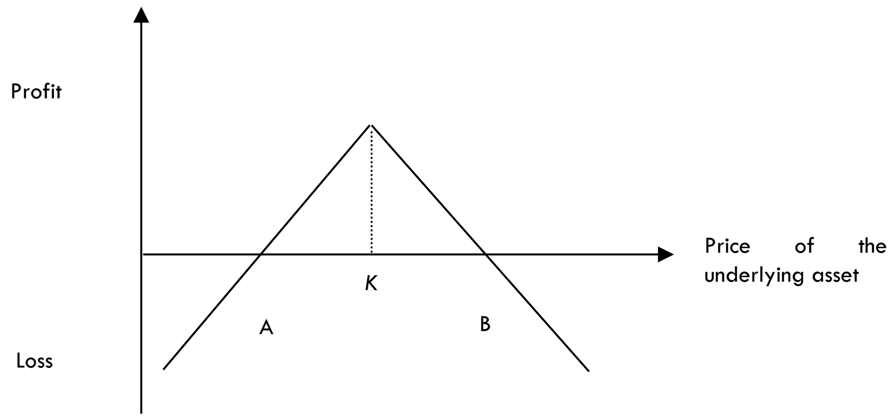


EXHIBIT 28. SHORT STRADDLE.

An investor expects that a stock market will keep on at a stable stock price. That means that the investor anticipates that the stock market will decrease the price volatility. He does not want to see the price of the underlying asset fluctuate dramatically.

Profit and losses: The profit is limited to the credit received from establishing the position. The profit will be highest if the underlying asset is at the strike price of the put option at expiration date. The loss is unlimited for either an increase or decrease in the underlying asset.

7.2.7 - Long strangle

An investor buys a call B and put A on the same underlying asset with the same expiration date but with a higher strike price for the call option B.

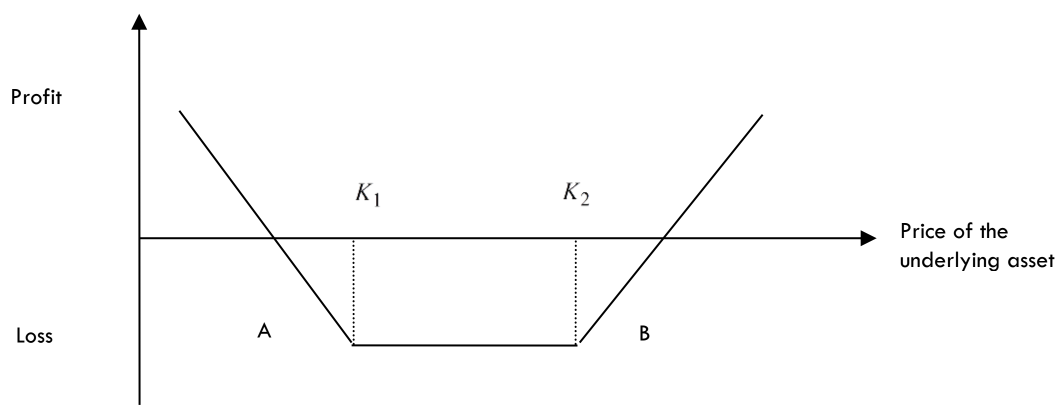


EXHIBIT 29. LONG STRANGLE.

An investor expects a major movement in the market but is unsure as to its direction. A large directional move is needed in a strangle in order to yield a profit for either a rise or a fall in the underlying asset price.

Profit and losses: The profit potential is unlimited although a substantial directional movement is necessary to yield a profit for either a rise or a fall in the underlying asset price. The loss occurs if the underlying asset is static, but it is limited to the premium paid in establishing the position.

7.2.8 - Short strangle

An investor sells a call B and put option A on the same underlying asset with the same expiration date but with a higher strike price for the call option.

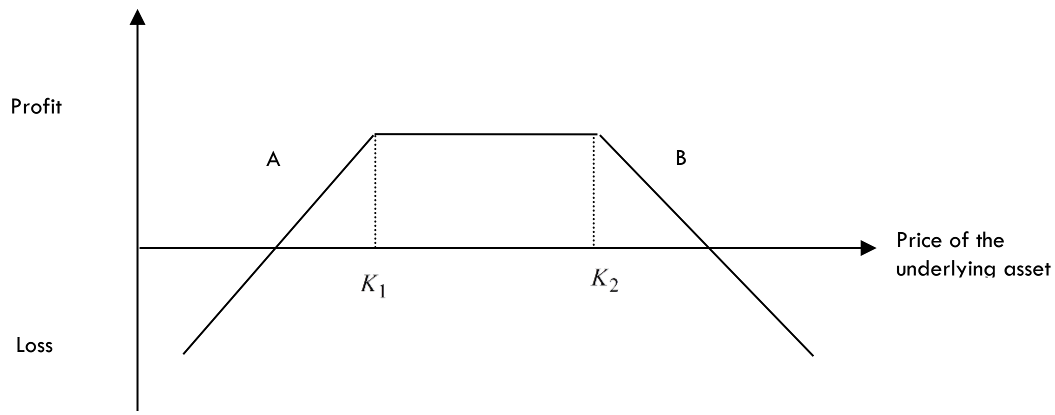


EXHIBIT 30. SHORT STRANGLE.

An investor expects that a stock market will have a low volatility and no major directional move. The investor will take more caution than a straddle because the profit potential spans a larger range. However, maximum potential profit will be lower.

Profit and losses: The profit is limited to the premium received. The profit will be highest if the underlying asset remains within the two strike prices. The loss is unlimited for a sharp move in the underlying asset price in either direction.

An introduction to Real Options

CHAPTER 10

This chapter was written in collaboration with Éric Gravel.

10:1 - A SIMPLE EXAMPLE: THE ORBECAN CASE

1.1 – Description du cas

Les noms en italique gras dans la description du cas correspondent aux paramètres à entrer dans la fenêtre conçue à cette fin.

Orbecan est une entreprise en démarrage dans l'industrie du logiciel qui n'a pas encore de produits sur le marché. Orbecan doit investir 4M$ (CD) ***(coût du développement)*** maintenant et un autre 14M$ ***(coût de lancement)*** dans deux ans (T) ***(temps (en années))*** pour développer et lancer son premier produit. Présentement, les dirigeants d'Orbecan croient que dans deux ans, la compagnie vaudra 18M$ (V_2) ***(valeur marchande)***. Inutile de mentionner que cette estimation est très incertaine. Nous supposons ici que le taux d'actualisation ajusté pour le risque (μ) est égal à 21% ***(taux ajusté pour le risque)***.

Si les dirigeants d'Orbecan emploient la méthode VAN, ils arrivent à la conclusion que la VAN ***(NPV)*** est négative. C'est-à-dire

$$(10.1) \qquad NPV = -4 - 14e^{-0.21\times 2} + 18e^{-0.21\times 2} = -1.37M\$ < 0$$

Sur la base de ce critère, le projet est rejeté.

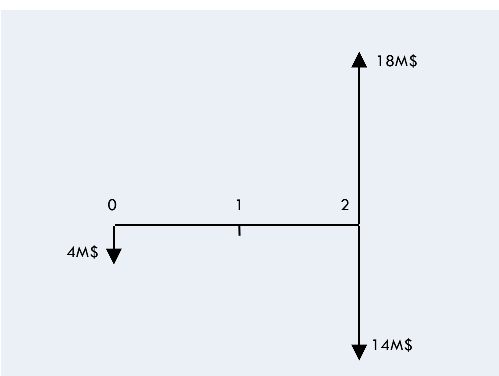


EXHIBIT 1. CASH FLOWS POUR LE PROJET ORBECAN.

En procédant ainsi, on évalue le projet en bloc comme si un contrat avait été signé entre Orbecan et une tierce partie pour la réalisation complète du projet. Si après deux ans, la valeur de la compagnie est inférieure à 14M$ ***(coût de lancement)***, l'investissement pour lancer le produit pourrait ne pas être fait (flexibilité). Dans ce cas, en investissant 4M$ ***(coût de développement)*** aujourd'hui, Orbecan acquiert l'option d'investir le 14M$ ***(coût de lancement)*** supplémentaire dans deux ans pour obtenir la valeur de la firme. Si V_2 ***(valeur marchande)*** représente la valeur de la firme dans deux ans, le «payoff» de l'option d'investir est égal à

$$(10.2) \qquad max\{V_2 - CL, 0\} \; avec \; E_0[V_2] = V_0 e^{\mu\times \mathrm{T}} = V_0 e^{0.21\times 2} = 18M\$$$

La valeur de la firme V_2 dépend par hypothèse de la taille du marché en t=2 et de la part de ce marché que la firme peut obtenir avec son produit, deux variables fort incertaines. Cette situation s'apparente à un problème d'évaluation d'option européenne. Le coût de l'option est de 4M$ ***(coût de développement)***, son prix d'exercice est de 14M$ ***(coût de lancement)*** et l'actif sous-jacent est la valeur de la firme dont l'espérance est de 18M$ ***(valeur marchande)***, la valeur en t=0 est donc de $V_0 = E_0[V_2]e^{-0.21\times 2} = 11.82M\$$. Supposons que le taux de croissance (μ) et la volatilité du sous-jacent (σ) ***(volatilité)*** sont respectivement de 21% et 50%. La formule d'évaluation de l'option d'investir dans deux ans ***(option)*** est

$$V_0 N(d_1) - CLe^{-\mu\times T} N(d_2) \tag{10.3}$$

où $N(x)$représente la fonction de densité cumulée pour une variable qui suit une distribution normale avec une moyenne de zéro et un écart-type de 1 (i.e., c'est la probabilité qu'une telle variable soit inférieure à x),

(10.4)

$$d_1 = \frac{\log(V_0/CL) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\log(11.82/14) + \left(0.21 + \frac{0.5^2}{2}\right)2}{0.5\sqrt{2}}$$

(10.5)

$$d_2 = \frac{\log(V_0/CL) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\log(11.82/14) + \left(0.21 - \frac{0.5^2}{2}\right)2}{0.5\sqrt{2}}$$

La valeur de l'option de lancer le produit est égale à 4.39M$ ***(option)***

$$V_0 N(d_1) - CLe^{-\mu\times T} N(d_2) = 11.82N(d_1) - 14e^{-0.21\times 2}N(d_2) = 4.39M\$$$

alors que le coût de l'option est de 4M$ ***(coût de développement)***. La valeur du projet est donc positive et égale à 0.39M$ ***(NPV-RO)***.

Si le critère de la VAN avait été utilisé pour prendre la décision d'investir ou non, Orbecan n'aurait pas investi et aurait renoncé à une opportunité de valeur positive. L'approche des options réelles tient compte de la flexibilité qui permet à un gestionnaire d'éviter de dépenser des sommes irrécupérables dans un contexte défavorable. Dans le cas présent, la valeur de cette flexibilité managériale est la différence entre la valeur calculée en bloc et la valeur du projet trouvée en incluant la flexibilité, ceci est égal à 1.76M$ (0.39M$-(-1.37M$)).

Finalement, ***simulation*** correspond à l'évaluation de ***option*** par simulation Monte-Carlo où ***Nbr. de tirage*** est le nombre de tirages N et ***option simulation*** OS est la valeur calculée par simulation. Si i représente le $i^{ième}$ tirage, on a

(10.6)

$$OS = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Max}\{V_2 - CL, 0\}\, e^{-\mu\times T}$$

Il est aussi possible de simuler manuellement avec le bouton ***Tirage*** et de voir l'évolution sur un graphique. Pour le cas étudié ci-haut, on obtient une solution sous une forme analytique, c'est l'approche privilégiée. Par contre, dans certains cas (par exemple, sans solution analytique), la simulation Monte-Carlo devient la seule méthode de solution.

Dans le cas décrit ci-haut, Orbecan doit prendre la décision de lancer le produit dès que le développement est terminé. Cependant, il est aussi possible que la firme puisse repousser le lancement et choisir une date ultérieure qui donnerait une valeur présente plus élevée (maximale). Dans cette situation, en dépensant le 4M$ ***(coût de développement)***, Orbecan achète l'option de lancer le produit à une date choisie après la période de développement. La nouvelle règle de décision est de lancer le produit lorsque la valeur V_t aura atteint un seuil critique de V^* ***(seuil 1)*** déterminé par l'approche des options réelles pour maximiser la valeur présente de l'entreprise. Avant cela, Orbecan doit attendre patiemment.

Voyons l'effet de cette extension sur la valeur du projet. Dans ce cas, nous faisons l'hypothèse, qu'à long terme, la firme établie versera un dividende δ ***(dividende)*** égal à 10% de sa valeur. De plus, si on suppose que le taux de rendement exigé restera constant à 21%, à l'équilibre, le taux de croissance anticipé μ_1 de la firme sera donc de 11%. Les autres paramètres du cas de base restent les mêmes. La valeur actuelle de l'option d'investir est maintenant égale à

(10.7)

$$e^{-\mu * T}\left[AV_0^{\beta_1} e^{\beta_1\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\beta_1\sigma^2 T\right)} * \left(1-N(d_3)\right) + V_0 e^{\mu T} N(d_4) - CLN(d_5)\right]$$

$$= e^{-0.21*2}\left[A * 11.82^{\beta_1} * e^{\beta_1\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\beta_1\sigma^2 T\right)} * \left(1-N(d_3)\right) + 18 * N(d_4) - 14 * (d_5)\right] = 9.85M\$$$

Avec

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(\mu-\delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{(\mu-\delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2\mu}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(0.21-0.1)}{0.5^2} + \sqrt{\left[\frac{(0.21-0.1)}{0.5^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2*0.21}{0.5^2}} = 1.3575$$

$$A = \frac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}}{\beta_1^{\beta_1} CL^{\beta_1-1}} = 0.1780 \; et \; V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1-1} CL = 53.15M\$$$

$$d_3 = \frac{\beta_1 \sigma^2 \mathrm{T} + \log\left(\frac{V_0}{V^*}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_4 = \frac{\log\left(\frac{V_0}{V^*}\right) + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_5 = \frac{\log\left(\frac{V_0}{V^*}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

La valeur du projet est donc égale à 5.85 M$ (9.85M$-4M$) et le produit sera lancé quand sa valeur marchande aura atteint le seuil critique de 53.15M$. La valeur de la flexibilité est maintenant égale à 7.22M$ (5.85M$ - (-1.37M$)), une différence de 5.46M$ avec le cas précédent qui représente la valeur de la flexibilité de choisir la meilleure date de lancement *T** .

La date de lancement est toujours incertaine, elle dépend de la vitesse à laquelle V_t atteindra *V** . Ce phénomène est illustré à la figure 1 avec un échantillon de cinq réalisations possibles de la valeur du projet (avec les paramètres de l'exemple). Pour trois des cinq réalisations, la valeur critique *V** est atteinte avant 5 ans et pour les deux autres, au moins sept ans passent avant le lancement.

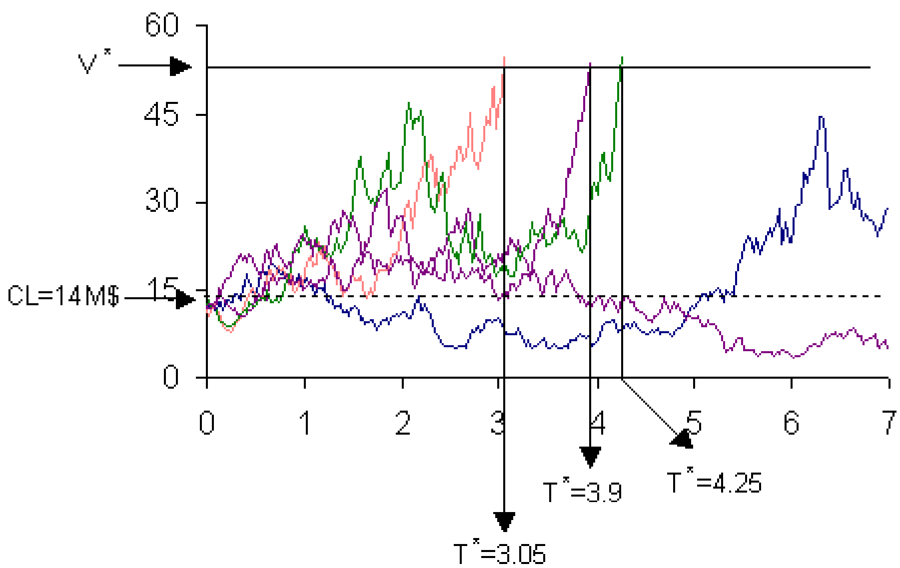


FIGURE 1. EXERCICE DE L'OPTION DE LANCEMENT SANS ECHEANCE

Les dirigeants d'Orbecan doivent donc effectuer une mise à jour fréquente de la valeur du projet et agir au moment où cette valeur atteint *V**. Le coût des revenus sacrifiés pendant l'attente doit être comparé au bénéfice d'attendre une valeur plus élevée afin de réduire la probabilité de se retrouver dans une situation fâcheuse ex-post.

Dans le cas décrit ci-haut, l'entreprise peut repousser le lancement du produit indéfiniment. Cependant, après l'étape de développement, il est possible que Orbecan soit contraint d'agir avant une date d'échéance prédéterminée T_E

(échéance) qui peut dépendre de contraintes réglementaires ou de caractéristiques propres au produit. Par conséquent, entre la fin du développement et la date limite de lancement, la firme doit choisir la date d'action qui donne la valeur présente la plus élevée (maximale). Semblable au cas précédent, la règle de décision optimale s'exprime en fonction d'un seuil critique $V^*(T_E - t)$ ***(seuil 2)*** qui dépend du temps restant avant l'échéance de l'opportunité de lancement. A chaque instant, si $V_t \geq V^*(T_E - t)$, Orbecan lance le produit.

Voyons l'effet de cette contrainte sur la valeur du projet en supposant que $T_E = 3$ et que les autres paramètres du cas de base restent les mêmes[29]. La valeur actuelle de l'option d'investir est maintenant égale à

$$e^{-\mu * T}\left[\int_0^{V^*(T)} \frac{F_L(V,T)}{V\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{-\left(log\left(\frac{V}{V_0}\right)-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T}} dV + V_0 e^{\mu T} N(d_6) - CLN(d_7)\right]$$

$$= e^{-0.21*2}\left[\int_0^{V^*(T)} \frac{F_L(V,T)}{V\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{-\left(log\left(\frac{V}{V_0}\right)-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T}} dV + 18N(d_6) - 14N(d_7)\right] = 5.67M\$$$

Avec

$$V^*(T) = 46.95M\$$$

$$d_6 = \frac{\log\left(\frac{V_0}{V^*(T)}\right) + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_7 = \frac{\log\left(\frac{V_0}{V^*(T)}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Pour leur part, les fonctions $F_L(V,T)$ et $V^*(T)$ représentent, respectivement, la valeur de l'option de lancer le produit et le seuil optimal d'investissement une fois le développement terminé. Avec une contrainte de temps pour le lancement, il est impossible d'obtenir $F_L(V,T)$ et $V^*(T)$ sous forme analytique, il faut donc procéder numériquement.

La valeur du projet dans ce cas est égale à 1.67M$ (5.67M$-4M$) et la valeur de la flexibilité est de 3.04M$ (1.67M$ - (-1.37M$)). Comme dans le cas précédent, la date de lancement est toujours incertaine, elle dépend de la vitesse à laquelle V_t atteindra $V^*(t)$ pour $t \in [T, T + T_E]$.

Avec les mêmes cinq réalisations qu'à la figure 1, la figure 2 illustre cinq décisions de lancement. Dans trois cas, il est optimal de lancer le produit et dans les deux autres cas, il vaut mieux laisser passer l'opportunité.

[29] La contrainte est relative au cas où Orbecan a l'option d'attendre indéfiniment.

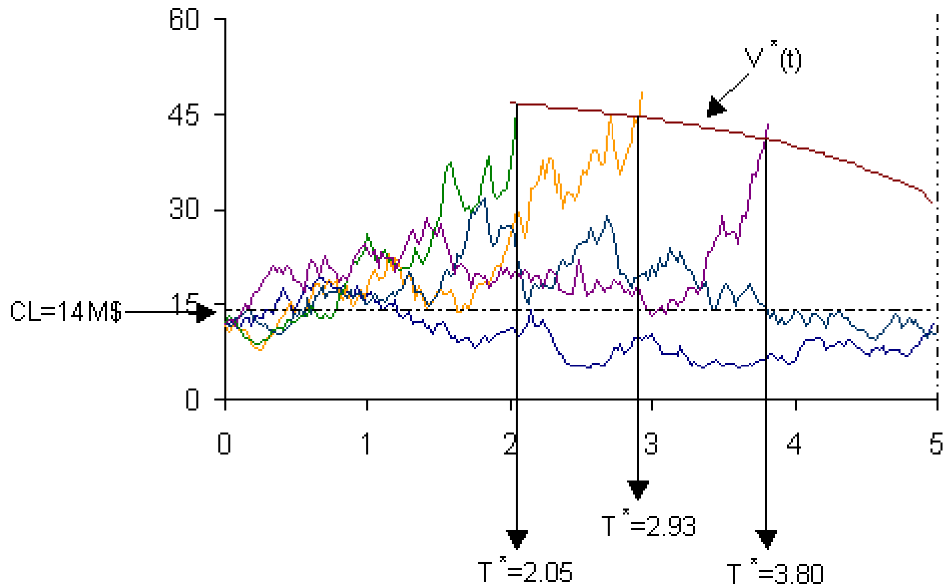


FIGURE 2. EXERCICE DE L'OPTION DE LANCEMENT AVEC ÉCHÉANCE DE TROIS ANS

La contrainte de temps enlève de la flexibilité au gestionnaire. En plus des revenus sacrifiés à l'attente, le danger de laisser échoir une opportunité rentable doit être tenu pour compte dans l'analyse coût/bénéfices d'attendre.

La flexibilité ajoute de la valeur au projet.

Un parallèle peut être dressé entre les options financières et les options réelles.

Option financière	Option Réelle
Valeur Présente du titre	Valeur Présente des flux attendus
Prix d'exercice	Coût d'investissement
Echéance	Durée jusqu'à échéance de l'opportunité
Incertitude de la valeur du titre	Incertitude de la valeur du projet
Taux d'intérêt sans risqué	Taux d'intérêt sans risqué

TABLEAU 1. COMPARAISON ENTRE OPTION FINANCIERE ET OPTION REELLE.

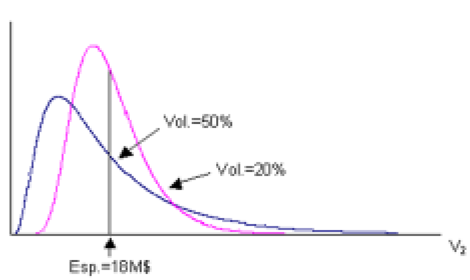
Le cas Orbecan

- Orbecan est une entreprise de l'industrie du logiciel qui veut lancer un premier produit;
- La séquence d'investissement nécessaire pour atteindre ce but est (horizon de 2 ans):

Le cas Orbecan

- Quelle sera la valeur de la firme après le lancement?

Valeur de la firme dans 2 ans?



Le cas Orbecan

- Si on utilise la VPN comme critère de décision, on a avec un taux d'actualisation ajusté pour le risque de 21% :

$$\boxed{VPN = 18e^{-0.21 \cdot 2} - \left(4 + 14e^{-0.21 \cdot 2}\right) = -1.37 M\$}$$

- Hypothèse implicite: projet en bloc;
- Attention! Orbecan pourrait ne pas réaliser le lancement si la valeur V_2 est faible;

Le cas Orbecan

- En investissant 4M$ pour développer le produit, Orbecan «achète» le droit (et non l'obligation) de le lancer dans deux ans;
- Dans ce cas, il y a incohérence entre le processus de décision et les hypothèses implicites de la méthode VPN;

Le cas Orbecan

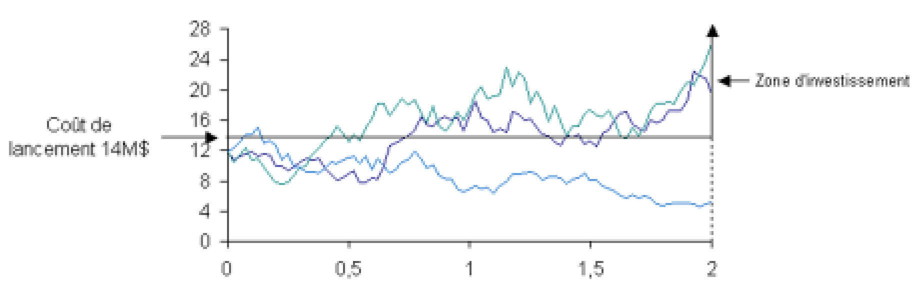
- Données de l'approche options réelles:

$$\boxed{\begin{gathered}\mu = 21\% \\ \sigma = 50\% \\ E[V_2] = 18M\$ \Rightarrow V_0 = 18e^{-0.21\cdot 2} = 11.82M\$ \\ CD = 4M\$ \quad et \quad CL = 14M\$\end{gathered}}$$

- Contrôle et évaluation des risques baissiers ($V_2 < 14$);

Le cas Orbecan

- Le graphique suivant représente le processus de décision dans 2 ans:



Le cas Orbecan

- Cette situation est semblable à un problème d'évaluation d'option européenne. Si on utilise une méthode semblable à celle de Black et Scholes, la valeur du projet est égale à:

$$\boxed{11.82N(d_1) - 14e^{-0.212}N(d_2) - 4 = 5.42M\$ - 4M\$ = 0.39M\$}$$

- Si Orbecan utilise la VPN comme critère de décision, une opportunité rentable est perdue, il faut tenir compte de la flexibilité;

Le cas Orbecan

- Si on ne tient pas compte de la flexibilité dans les projets, certains investissements peuvent être rejetés (VPN standard < 0) même si ils sont générateurs de valeur (VPN – OR > 0);

- Si deux projets sont mutuellement exclusifs, un mauvais choix peut être fait si on ne tient pas compte de leur flexibilité relative;

Le cas Orbecan

- Développements prochains:
  - Chute soudaine de valeur;
  - Option d'attendre avant d'investir (avec et sans contrainte de temps);
  - Coûts de lancement stochastiques;
  - Différents niveaux de capacité;
  - Etc.

10:2 - A WORD ON VOLATILITY

The real-option approach uses the same data as for the NPV method plus a new one: the volatility. When working with financial options and using the Black-Scholes formulae to evaluate a European option, one must have an estimate of the volatility of the underlying asset.

This may present a problem, as volatility is the only non-observable parameter in the Black-Scholes formulae. One can find the daily quotes for some stock index on the pages of The Wall Street Journal, but not an estimate of its volatility.

When it comes to estimating volatility there are several different methods: exponentially weighted moving average (EWMA), maximum likelihood methods or GARCH (Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) models. Alternatively, one can estimate volatility based on historical data.

Choosing an appropriate quantity of past data to use is not simple. If we choose a short period, data might not be representative or accurate enough. On the other hand, if we choose a period too long, volatility may change over time and old data will not be relevant for estimating future volatility. A period of 90 or 180 days generally works reasonably well. A rule-of-thumb is to use the same number of days of the period to which the volatility is to be applied. That is, if we are estimating volatility for the next 90 days, we use then the volatility of the past 90 days.

Real options, however, present an additional difficulty. Whereas we can generally find historical data for the underlying asset in the case of financial options, this is generally not true for real options. In the case of real options, volatility generally comes from uncertainties in productions costs or the price of the final product. But how to estimate the volatility of the price of a new medicine for which no historical data is available?

Unfortunately, there is no complete answer for that question. We must estimate volatility the best way we can, either by using a similar product or by having a rough estimate somehow. Companies pay for the services of research institutes who provide them with market data and information on their competitors. Information is valuable and the better information we have, the better estimate can we produce. As more data become available, we can update the volatility and have better valuations.

A sensitivity analysis can be applied to measure the impact of a bad volatility estimate. There are some cases that even some small variations in volatility present high oscillations in the option price (or the project value). Sensitivity analysis provides the range up to which the estimate is good. Beyond that range, data is not reliable and we should be more careful when taking our decisions.

10:3 - APPENDIX

Evaluating the expected value of the project with Monte Carlo Simulation

```
% ***************************************************************************
% Calculates the present value of the Orbecan project
%
% Authors             : Michael Benitah
%                       Jingmei Zhu
% Creation date       : 2007-08-08
% Last modified on    : 2007-10-05
% Version             : 1.1
%
% Inputs
% ------
% I                   : the value of the initial investment
% S0                  : the initial value of the project
% K                   : the value of the future investment
% r                   : the interest rate
% q                   : the dividend yield or capital cost
% sigma               : the volatility (or diffusion of the Brownian motion)
% t                   : the time after which investment can be made
% M                   : the number of paths to simulate
%
% Outputs
% -------
% V                   : the value of the project
%
% ***************************************************************************
function V = Orbecan(I, S0, K, r, q, sigma, t, M)

% initializes a vector to store all the paths
V = ones(M, 1);

lambda1 = 1/2 - (r - q) / sigma^2 + sqrt(((r - q) / sigma^2 - 1/2) ^ 2 + 2 * r /
sigma^2)
Sstar   = lambda1 / (lambda1 - 1) * K
c1      = (Sstar - K) / Sstar ^ lambda1

for i = 1:M

    % simulates a geometric Brownian motion with mu = r - q
    S = S0 * exp((r - q - sigma ^ 2 / 2) * t + sigma * sqrt(t) * randn);

    % defines the function in the integral according to the value of S
    if S <= Sstar
        V(i) = c1 * S ^ lambda1;
    else
        V(i) = S - K;
    end

end

% calculates the expected value
```

```
V = mean(V);

% calculates present value and subtracts initial investment
V = -I + exp(- r * t) * V;
```

Running the program, we obtain:

```
>> Orbecan(4, 11.8268, 14, 0.21, 0.10, 0.50, 2, 10000)

lambda1 =

    1.3575


Sstar =

   53.1569


c1 =

    0.1780


ans =

    1.0693
```

MONTE CARLO SIMULATION FOR THE ORBECAN CASE.

The Types of Options in Capital Budgeting

CHAPTER 11

This chapter was written in collaboration with Éric Gravel.

References to the books and papers cited in this chapter are provided at the end of the second volume.

11:1 - TYPES OF REAL OPTIONS

We have seen that financial options come in a variety of types. Likewise, when dealing with real options, a manager has a plethora of decisions that can be made in order to account for uncertainty and flexibility and maximise value in the company. Real options give the right, but not the obligation to invest in a project in a later date. They are classified primarily by the type of flexibility that they offer. For example, a manager can:

- ***defer, expand or contract:*** according to market conditions, a manager can temporarily halt the production or change its size, either by producing more units to meet a larger demand or by decreasing the number of units produced and reduce the surplus in dim periods.
- ***abandon or terminate unprofitable projects:*** if market conditions decline severely, the manager might decide to abandon the project and sell equipments and other assets on secondhand markets. For example, if a product is replaced by a new technology the demand for it will sharply drop. Also, a chemical industry may face changes in environmental regulations that make their operations unviable.
- ***switch, change inputs or outputs:*** this option is generally used in response to price or demand changes in the inputs or outputs. A manager can change the output mix of a facility (product flexibility) or produce the same outputs using different types of inputs (process flexibility).
- ***pilot:*** this refers to starting with a prototype project and, if successful, following up with a full-scale project. This is equivalent to test marketing before investing in full production.
- ***grow:*** this involves investing in an initial market, product line or technology to develop a platform for future growth opportunities. This is common in the hi-tech industry and infra-structure projects, which demand high initial investments for projects that will not have an immediate return. For example, telecommunications companies are developing fibre-optic cable networks to deliver content today and to exploit future opportunities.
- ***stage:*** the company breaks up its investment into incremental phases, where the payoff occurs only after the project is completed. During each phase, the manager can undertake any of the other decisions. For example, when you set out to build a factory, you can choose to do so in phases — a design phase, an engineering phase, and construction. You have the option to stop, or defer the project at the end of each phase. The value of each option is affected by uncertainties in the price of outputs, the quantity that might be sold, and by fluctuations of interest rates that affect the present value of the project.

11:2 - EVALUATION OF THE DIFFERENT TYPES OF OPTIONS

The idea of this section is to relate the different types of real options seen in the previous section with the types of financial options.

2.1 - Option to defer investment

If the manager has the option to defer an investment up to a date T in the future, in any moment from now until that date T, he will decide whether or not to invest. That is, for a date $t \in [0, T]$, he will compare the cost K of investing with the value S_t of the project. The payoff will be $\max(S_t - K, 0)$. The option to defer is thus analogous to the American call option.

2.2 - Option to expand

Similarly, the option to expand at any time from now until a fixed date T in the future is also equivalent to an American call option. The manager will compare the value S_t of the expanded project with the investment cost K and he will decide to invest if $S_t \geq K$.

2.3 - Option to contract

If market conditions turn weaker than initially expected, managers can decide to operate below capacity and save the investment outlays. If the manager had planned to spend K dollars in investments at any time $t \in [0, T]$, the option to contract and not to invest will "earn" him K (he doesn't really earn it, but he does not spend what he had originally planned to). If S_t represents the value of the project lost with contraction, the payoff will then be $\max(K - S_t, 0)$. That is, the option to contract is analogous to an American put option.

2.4 - Option to abandon

If market conditions become even fiercer, the manager can choose to permanently abandon the project in exchange for its salvage value. He can sell all the equipments and other assets on the secondhand market. Say the salvage value is K. If S_t represents the value of the project at time t, abandoning it will cost S_t. The payoff is then $\max(K - S_t, 0)$. Hence, abandoning a project is equivalent to an American put option.

2.5 - Option to switch

Switching may involve decisions that change the product mix that the company produces, or changes in its processes. Those changes may be equivalent to either calls or puts, or more probably, both. That is, the option to switch is equivalent to a portfolio of options. For example, the company may decide to relocate its operations in another region where production costs are cheaper. They shut down their current facility, which is modelled by an American put (see 2.4 - Option to abandon), and open a new one. The process of opening the new facility is equivalent to an American call.

2.6 - Option to pilot, grow or stage

These are compound options, that is, options on options. Each phase of the project is modelled by one or more financial options. The value of an earlier option is affected by the value of options later in the investment. Those options interact with each other so their combined value may differ from the sum of their separate value.

Real Option	Related financial option
Defer	American call
Expand	American call
Contract	American put
Abandon	American put
Switch	Portfolio of options (calls and puts)
Pilot	Compound options
Grow	Compound options
Stage	Compound options

TABLE 1. REAL OPTIONS AND THEIR CORRESPONDENT FINANCIAL OPTIONS.

11:3 - THE EVALUATION TECHNIQUES

In this section, we are providing some of the mathematical tools for evaluating real options.

3.1 - Decision trees

Perhaps the easiest way to evaluate real options is to use decision trees, which can also be employed in traditional capital budgeting.

EXAMPLE. Flexibility when there is an option to abandon[30]

A pharmaceutical company initially invests 0.1M$ in research. Further investments of 1.1M$ will be required in the following year to complete the development a new product. The company must decide whether or not it will carry on the project after observing the initial results and analysing the commercial feasibility of the product. The company plans to sell the product licence, two years from now, to the highest bidder and right now it expects revenue within two years of:

- 2M$ with 50% probability
- 0.1M$ with 50% probability

We assume a constant annual discount rate of 10%.

With traditional capital budgeting, if the company decides to fund the project it will generate an expected NPV of -0.232M$:

(11.1)

$$NPV = -0.1 - \frac{1.1}{1.1} + 0.5 \times \frac{2}{(1.1)^2} + 0.5 \times \frac{0.1}{(1.1)^2} = -0.232$$

[30] (DE NEUFVILLE, CLARK AND FIELD, n. d.).

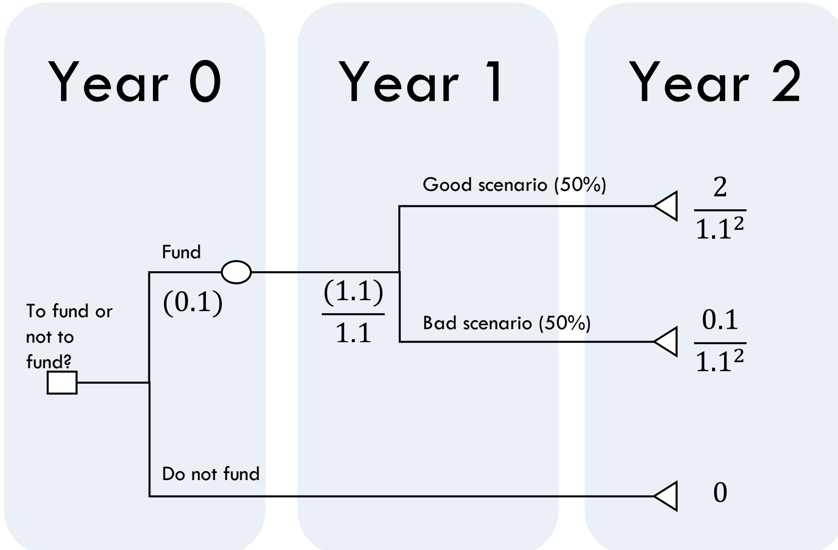


EXHIBIT 1. DECISION TREE WITH TRADITIONAL CAPITAL BUDGETING.

Say now that the company can abandon the project at no cost and that it will continue the project only if it expects to get the 2M$ licence. By Year 1, the company can have an idea of the impending scenario and managers can come to a decision of whether to proceed with investments or not. Considering the flexibility opportunity, the NPV rises to 0.226M$ making the project viable.

(11.2)

$$NPV = -0.1 + 0.5 \times \left[-\frac{1.1}{1.1} + \frac{2}{(1.1)^2}\right] + 0.5 \times 0 = 0.226$$

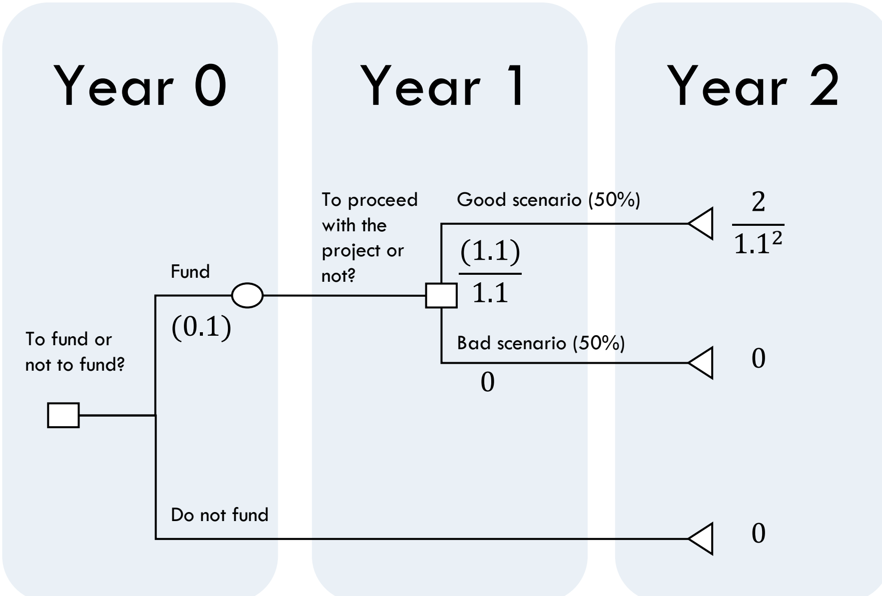


EXHIBIT 2. DECISION TREE CONSIDERING FLEXIBILITY IN YEAR 1.

For large projects, decision trees can quickly become out of hand. Complex decision trees can be solved with dynamic programming techniques by evaluating the end node and going backwards to the first node.

3.2 - Waiting to invest: the option to defer

Consider a project whose value depends on a price that varies stochastically according to a geometric Brownian motion:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{11.3}$$

with $\mu = r - q$ where r is the discount rate and q can be considered as a dividend yield or an opportunity cost.

If, at any given time t the company decides to invest, the company must incur in the investment cost K (which is fixed and does not vary with time) and have a payoff equal to $S_t - K$.

For every time t, there is a critical value S_t^*, above which (i. e. for $S_t \geq S_t^*$) it is optimal to invest and below which the company would choose to defer investments. The problem of the firm is to maximise the expected present value of the payoff:

$$F(S) = \max_{S_t} E_0[e^{-rt}(S_t - K)] \tag{11.4}$$

where t is the (unknown) time that the investment will be made.

The problem is an optimal stopping problem in continuous time. From the starting period until the investment time (if it does happen), there are no cash flows. The project value F then appreciates at the risk-free rate:

$$E_0[dF] = rFdt \tag{11.5}$$

This equation states that the expected change in the value of the investment is equal to the risk-free rate applied on the project value over a period of time.

On the other hand, by Ito's formula, the differential dF can be written as:

$$dF = \frac{dF}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dS^2}(dS)^2 \tag{11.6}$$

From Equation (11.3):

$$\begin{aligned}(dS)^2 &= (\mu S dt + \sigma S dB_t)^2 \\ &= \mu^2 S^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dB_t + \sigma^2 S^2 (dB_t)^2 \\ &= \sigma^2 S^2 dt\end{aligned} \tag{11.7}$$

It follows that:

$$dF = \frac{dF}{dS}(\mu S dt + \sigma S dB_t) + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dS^2}\sigma^2 S^2 dt \tag{11.8}$$

and if we take expectations, the dB_t term disappears since $E_0[dB_t] = 0$, thus:

$$E_0[dF] = \mu S \frac{dF}{dS}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2F}{dS^2}dt \tag{11.9}$$

Now we use Equations (11.5) and (11.9) and divide by dt to the differential equation:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2F}{dS^2} + \mu S \frac{dF}{dS} - rF = 0 \tag{11.10}$$

This can only be done because we have not imposed any limit date T for undertaking the project. If there are no time constraints, the project is said to be perpetual and the solution does not depend on t anymore.

Replacing $\mu = r - q$, Equation (11.10) can also be written as:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2F}{dS^2} + (r - q)S \frac{dF}{dS} - rF = 0 \tag{11.11}$$

This differential equation must satisfy the following boundary conditions:

$$\lim_{S \to 0} F(S) = 0 \tag{11.12}$$

$$F(S^*) = S^* - K \tag{11.13}$$

$$F'(S^*) = 1 \tag{11.14}$$

Condition (11.12) states that the project has no value when $S = 0$. In other words, one cannot make money out of nothing. This follows directly from Equation (11.3). If the process ever goes to zero, it will stay at zero.

Condition (11.13) states that at the time the investment is made, that is when $S = S^*$, the project value is the payoff $S^* - K$. The last condition ensures smoothness and continuity of the solution.

Normally, a second-order differential equation would require only two boundary conditions. Note, however, that the position of the second condition is not known. It depends on S^*, which remains to be found. This is why we need the third condition.

The solution of the differential equation (11.11) is:

$$F(S) = c_1 S^{\lambda_1} \tag{11.15}$$

where c_1 is a constant yet to be determined and λ_1 is a known constant that depends on the coefficients of the differential equation.

You can check that this solution is true by replacing it in the differential equation (11.11). A more detailed explanation on how to find this solution is given in APPENDIX A.

Boundary conditions (11.13) and (11.14) are used to determine c_1 and S^*:

$$S^* = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} K \tag{11.16}$$

$$c_1 = \frac{S^* - K}{(S^*)^{\lambda_1}} = \frac{(\lambda_1 - 1)^{\lambda_1 - 1}}{(\lambda_1)^{\lambda_1} K^{\lambda_1 - 1}} \tag{11.17}$$

And the constant λ_1 is given by (please refer to the appendix for the details):

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{r-q}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r-q}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \tag{11.18}$$

(MCDONALD AND SIEGEL, 1986) generalise this result for the case where the investment cost K varies stochastically as well. (DIXIT AND PINDYCK, 1994) present also the case where the value of the project follows a mean-reverting process in lieu of the Geometric Brownian Motion in Equation (11.3).

If there is a time constraint for the investment, that is, if investment must be made until a fixed time T in the future, the dt term cannot be simplified from Equation (11.10) and there is no analytical solution for the problem. Numerical methods must be used instead.

3.3 - Monte Carlo Simulation

When the stochastic differential equations behind a real-option valuation problem are too complicated or when there is no analytical solution for them, Monte Carlo simulation can be applied. Monte Carlo simulation is neither the only numerical method employed for solving stochastic differential equation nor the more efficient. However, its simplicity makes it one of the most frequent methods for solving real-option problems.

The method has already been explained in the Chapter 9. In this chapter, we will show an example of this method applied to real-option valuation. The example we will consider is again the Orbecan case, which we revisit in the next section.

11:4 - THE ORBECAN CASE REVISITED

Now we go back to the Orbecan case discussed in the previous chapter. We will try to answer the question: "what if the company deferred the investment?" That is, if by the end of the initial period of two years the company is not forced to immediately invest but can wait up to a certain date T in the future, what is the value of waiting?

In the previous chapter, we treated the Orbecan case as if it were a European option, and we applied the same techniques used for the valuation of the European call, the Black-Scholes formula.

However, now managers are not forced to make the decision at time $t = 2$ but have the *option* to wait until a more favourable time in the future. The problem is a case of compound options. At the end of year 2, the managers are faced with the option to wait, to invest immediately or the option not to take any further investments.

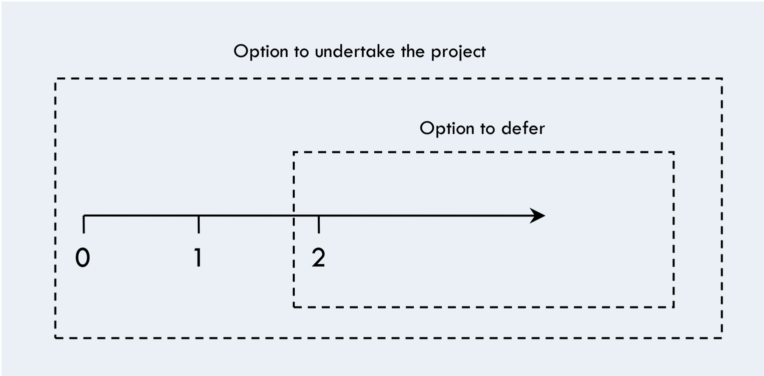


EXHIBIT 3. COMPOUND OPTION FOR THE ORBECAN CASE.

If there is no time constraint, that is, if $T = \infty$, then the inner rectangle shown in exhibit 3 can be evaluated analytically with the methods just detailed in the previous section. We now proceed to evaluating the compound option of undertaking the project or not.

We have seen that managers will choose to invest if the project generates values higher than S^*. In that case, they will pay the investment cost of K dollars and have a payoff $S - K$.[31] If, by any chance, the values generated happen to be lower than S^*, then managers will choose to keep the option alive and will defer investments. Considering the initial cost of 4M$, the value of the project will be:

$$(11.19) \qquad V(S_0) = -4\text{M\$} + e^{-r\times 2}\left[\int_0^{S^*} c_1 S^{\lambda_1} f(S|S_0, t=2)dS + \int_{S^*}^{\infty}(-K+S)f(S|S_0, t=2)dS\right]$$

where $f(\cdot)$ is the log-normal density function given by (see APPENDIX B):

$$(11.20) \qquad f(S|S_0, t) = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\left[\log S - \log S_0 - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]^2}{2\sigma^2 t}}$$

Note that the expression between brackets in Equation (11.19) is nothing more than the expected value of the project at time $t = 2$, the first integral corresponding to those values of S that keep the option alive and the second integral corresponding to the case where investment is made.

If we solve the two integrals between brackets in Equation (11.19), we find:

$$(11.21) \qquad V(S_0, t) = -4\text{M\$} + e^{-rt}\left[c_1 S_0^{\lambda_1} e^{\lambda_1\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \lambda_1\frac{\sigma^2 t}{2}\right]}\Phi(d_0) + S_0 e^{(r-q)t}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right]$$

where $\Phi(\cdot)$ is the cumulative standard normal distribution and the constants d_0, d_1 and d_2 are defined by:

$$(11.22) \qquad d_0 = -\frac{\lambda_1\sigma^2 t + \log\left(\frac{S_0}{S^*}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$(11.23) \qquad d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{S^*}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

[31] Note that the value invested is always K, no matter when the investment is made.

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{S^*}\right)+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (11.24)$$

Calculating the two integrals in Equation (11.19) is cumbersome. The details are given in APPENDIX D.

The expression in (11.21) must be evaluated for $t = 2$, which gives $V(S_0 = 11.82, t = 2) = 1.07\text{M\$}$. This value should be compared with the value of 0.39M$, which is the value of the project should investments be made exactly at time $t = 2$. Thus, the flexibility to wait generated a value of:

$$1.07 - 0.39 = 0.68\text{M\$} \quad (11.25)$$

If investments must be made until a fixed date T in the future, there is no analytical solution for evaluating the option to defer (the inner portion of exhibit 3). Thus, no analytical expression like that of Equation (11.19) can be found. Monte Carlo simulation must be used instead.

4.1 - Solving by Monte Carlo simulation

You should not worry if you found too complicate to calculate the integrals as shown in APPENDIX D. Fortunately, there is an alternative for calculating those integrals numerically. The alternative is to use Monte Carlo simulation, which can be applied as well where there is simply no analytical solution to the integral.

APPENDIX in Chapter 10 shows how to perform a Monte Carlo simulation in MATLAB® for evaluating the expression (11.19). Evidently, as the result depends on a random sampling, it will change at each time we execute the procedure, but if we take a sufficiently high number of samples, the result should not oscillate too much.

In fact, the error of the Monte Carlo simulation can be calculated and it is inversely proportional to the square root of the number of samples. This means that increasing the number of samples too much does not considerably help to improve accuracy. However, there are some techniques (such as the use of antithetic variables) that are more effective to reduce the simulation error.

Identifying, Creating and Managing Real Options

CHAPTER 12

Some of the references cited in this chapter are provided at the end of the second volume.

12:1 - STRATEGIC PLANNING

The main role of managers is to decide the best investments and strategies the company must take to maximise its value. Managers must assess the current situation in the company and find the best alternatives for the future. They must evaluate all those choices and undertake those that might provide a competitive advantage. It is their job to distinguish the good from the bad choice. More important, it is their job to constantly re-evaluate the situation, and make frequent adjustments as needed. This is strategic planning.

It is not that easy though. We have already seen the fallacies of discounted cash flow (DCF) method and the misleading conclusions it may offer. We have seen that one of its major problems is that DCF evaluates a project as a whole and does not take flexibility sources in the project into account.

However, it is exactly the flexibility opportunities that may provide some competitive advantage. Managers must identify those sources and act accordingly in order to be always ahead of their competitors. When taking flexibility into account, real-option analysis comes as a natural choice.

Another important aspect is synergy. Large projects often interact with one another. Much in the same way managers must deal with flexibility, they also have to identify synergy opportunities among projects and take advantage of the cost reductions or higher profits they might offer. Again, real-option analysis offers the tools managers need to evaluate those benefits.

> **STUDY CASE.** *The synergy of Google Video and YouTube*
>
> *Google is best known for offering a search service to make information in the internet available and accessible to anyone. YouTube, on the other hand, is a content provider of videos with a blooming community of worldwide users. Google also has its own video service, called Google Video. In November 2006, Google acquired YouTube. Now YouTube videos appear on Google Video search index. Moreover, both services now share their technologies enhancements to offer better quality videos.*

Bill Tancer evaluates the synergy between Google Video and YouTube: "On the Saturday prior to the Google Video index integration (January 20th) YouTube received .54% of all Internet visits in the U.S., and 37.98% of all visits to the Entertainment - Multimedia category. For the Saturday following the integration (January 27th) YouTube's market share rose to .64% for all site visits in the U.S. a one week growth rate of 18.5%. To what degree was Google Video responsible for that 18.5% Increase? On Wednesday January 24th, the day before the index integration went live, Google Video was responsible for .73% of all of YouTube's traffic, by Saturday Google Video was responsible for 8.68% of all of YouTube's upstream traffic (MySpace is still the #1 upstream provider of traffic to YouTube at 17.54% of all traffic for that same day)."

When it comes to strategic planning, however, **planning** is not everything. It is also about **control**. During the process of strategic planning, managers must continually reassess the situation, see the effects of their previous decisions and check for any new conditions that may have arisen. For that, managers make use of some indexes such as Growth or Return over Assets (ROA) to measure performance and adjust their original plan. Later, they will once again check the same indexes and make further adjustments, if necessary, in a continuous cycle of planning, analysis and control.

EXHIBIT 1. STRATEGIC PLANNING

(Luehrman (1998) compares managers who use strategic planning to active gardeners in a tomato garden:

"A purely passive gardener visits the garden on the last day of the season, picks the ripe tomatoes, and goes home. The weekend gardener visits frequently and picks ripe fruit before it rots or the squirrels get it. Active gardeners do much more. Not only do they watch the garden but, based on what they see they also cultivate it: watering, fertilizing, and weeding, trying to get more of those in-between tomatoes to grow and ripen before time runs out. Of course, the weather is always a question, and not all the tomatoes will make it. Still, we'd expect the active gardener to enjoy a higher yield in most years than the passive gardener."

We must cultivate our gardens. This command, aired by Voltaire in *Candide ou l'optimisme,* implied that man was not born to be idle.[32] Of course, man does not work just for the sake of it either. He works because he expects something in return. The active gardener waters, fertilizes and weeds the garden because he expects his profit to be higher that way. If the cost of going to the tomato garden was too high, however, the passive gardener would probably be the one with the highest yield. When applying strategic planning we must consider all factors: both revenues and expenses, both sources of synergy and flexibility. And we must always keep an eye on the market for any change of weather.

We conclude with a simple (and rather obvious) formula:

Expanded (strategic) NPV = base NPV + strategic planning premium

That is, strategic planning adds value to the company. The premium obtained with strategic planning incorporates the impact of volatility, flexibility and synergy as well as the outcomes of managerial decisions in that uncertain environment. All those elements generate value and, thus, increase the base NPV.

Study Case. *Flexibility, volatility and the American and Japanese managers*

We have seen the rôle of the managers in adding value to the company. It is their decisions and how they perceive flexibility that can generate sources of revenue. It may be surprising, however, that their own income might also be a consequence of the real options valuation.

In (Christoffersen and Pavlov, 2003), the authors analyse a study published by Towers Perrin that compares worldwide total remuneration. What they find is that managers in United States earn much more than those in Japan. There are several factors that can explain that difference, such as cost of living, taxes or culture. But even when those factors are considered and adjusted accordingly, they still find a considerable difference in the remuneration of the two countries.

[32] « Je sais aussi, dit Candide, qu'il faut cultiver notre jardin. – Vous avez raison, dit Pangloss : car, quand l'homme fut mis dans le jardin d'Eden, il y fut mis *ut operaretur eum*, pour qu'il travaillât, ce qui prouve que l'homme n'est pas né pour le repos. » (Voltaire). http://www.proz.com/kudoz/latin_to_french/art_literary/112654-operaretur.html

The authors argue that managerial compensation will be higher in countries with a low degree of unionisation and with open capital markets. Put differently, managers are better compensated when they are more flexible to carry decisions. By adding value to the firm, they end up by adding to their own salaries.

Another aspect is the variability of input prices and the level of adjustment costs in production. If adjustment costs are too high or if variation of input prices is too low, there is little managers can do to change anything. Their decision scope is limited. That is, higher volatility forces more decisions and provides better compensations.

12:2 - IMPLEMENTING A ROV SYSTEM AND CULTURE

So we can evaluate a project either by using the traditional method of discounting cash flows (DCF) or by applying real options. We have seen that, when adopting the real-option approach, the project has a higher value due to the flexibility offered with real options. But what is the best method: real-option valuation or discounted cash flows? Real-option valuation surely offers a better prognosis of the project.

A patient goes to the doctor and hears a bad diagnostic. He then goes to another doctor only to hear a better one. He decides to stay with the doctor who gave the best diagnostic. Is it the same with real options and discounted cash flows? Are we just staying with the good diagnostic, which perhaps may be somewhat overvalued? The answer is no. Real-option valuation does not invalidate the traditional DCF analysis; it merely considers information the other disregards. The flexibility is there, we simply do not use it when we apply DCF.

Overlooking flexibility means losing the opportunity to make some profit because it means passing over some projects with negative NPV.

This may be a serious mistake, especially in high competitive markets where margins are frequently slim. Thus, real-option valuation offers a competitive advantage in the sense that it better values projects and allows the company to undertake projects it would not otherwise. However, there are some situations in a competitive environment where managers would opt not to exercise their flexibility lest it would show their competitors a sign of weakness.

Notwithstanding, real-option valuation is crucial especially when dealing with highly uncertain and expensive projects. A typical example is R&D. If traditional DCF were to be applied, probably there would not be any research whatsoever. Of course, R&D has been done for a long time though, even before the theory of real options emerged. What managers did back then was to calculate the project's NPV (the discounted cash flows), while all the way applying concepts of real options in a naïve manner. It is important to notice that real-option valuation does not invalidate the NPV procedure; it simply takes into account flexibility issues the DCF method disregards. On intuitive grounds, managers:[33]

---

[33] BOYER, M., CHRISTOFFERSEN, P., LASSERRE, P. et A. PAVLOV (2003), "Value Creation, Risk management and Real Options", CIRANO 2003RB-02, http://cirano.qc.ca/files/publications/2003RB-02.pdf (also published in *ICFAI Journal of Management Research*, ICFAI University Press, October 2004)

- attached importance to the timing of decisions
- identified and evaluated downside risks and upside opportunities associated with the project
- identified, evaluated and optimised future decisions that may affect exposition to downside or upside fluctuations

To sum up, what they did, albeit intuitively, was to optimally manage the creation and use of flexibility as a device to exploit uncertainty. Not until some years later did real-option theory come into existence and started being implemented in some major companies such as Merck and Kodak.

Nevertheless, real-option valuation is still not widely implemented. One of the reasons might be the difficulties with the mathematics involved. Most often than not, real-option valuation problems present complex cases of compound options that, if analytically solved, would require sound knowledge of stochastic differential equations. Yet, many of them have no analytical solution or none has been found so far, as it is a field where research is still blooming, and numerical procedures must be used instead. **Monte Carlo simulation**, on the other hand, reduces the burden of solving complex stochastic differential equations and with the advent of faster computers, solving a real-option valuation problem by Monte Carlo simulation is now quite often just a question of minutes. Moreover, experience has shown that companies would always apply the required mathematical knowledge, however difficult it may be, if they are convinced that it is the right solution.

Thus, what seems to be a more striking reason for why real options are not used more frequently is that companies are not yet prepared for implementing real-option valuation. The culture of using real options has not been widely spread. Managers either are not yet convinced of the benefits of real-option valuation or they do not know how to put it into practice. That should be a much easier obstacle to overcome than mathematics, but apparently, it is not. The main difficulty is that the process of real-option valuation depends on a careful exercise of analysis, evaluation and decision, which sometimes presents more difficulty than the mathematics itself. This is the subject of our next section: *12:3 - The* Real Option Chain.

12:3 - THE REAL OPTION CHAIN

We begin by discussing the following situation, inspired by an example from MUN (2002):

> *You are the Chief Technology Officer of a large company and you would like to replace the operating systems off all computers (some of them running Windows XP and some of them still running the old Windows 2000) for the new state-of-the-art Windows Vista. Why? Well, Windows Vista is nice, is sleek, is reliable and you are pretty sure that employees will be happier and, consequently, more productive.*
>
> *You go to the company's CEO and present him with your proposal explaining to him all the benefits the new operating system would bring. You made an excellent exposition and it seems you have convinced him of the advantages of upgrading. He then asks two very natural questions: "How much does it cost and how much should it save us?" While the first question is pretty straightforward, the second one is not.*

It is certain that the new version of Windows will make your boss's secretary work happier. But so will a bonus check or two round-trip tickets to Hawaii, and for a fraction of the cost. Besides, how can you measure her increase of productiveness with the new system? It is certain that the new reliable and self-fixing system will reduce help-desk costs. You work hard to finally produce a number and you expect that you can reduce help-desk costs by 20%. However, in the first few weeks you actually expect them to increase with the calls of users who are not yet used to the new system. Furthermore, in a company with a thousand employees but no more than five people in help-desk, the 20% reduction would represent a mere single cut-off! Hardly an effective cost reduction.

Yet, you know (and perhaps even the CEO knows it too as he is certainly not paying Hawaii trips to every employee!) that adopting the new system is probably the best strategy. How do you justify it? The answer lies in real options.

The real-option analysis depends, first of all, on correctly identifying the option. In that case, the firm has an **expansion option** – it has the right, but not the obligation – to invest in a new technology.

The second, and perhaps more difficult step, is to correctly evaluate the benefits acquired with the new technology. Some of them are easy to measure (as the help-desk cost reduction); others may present more subjective characteristics.

This is a big challenge and there is no precise methodology for overcoming this technical difficulty. The best advice would be dividing the project in small, easier to evaluate, parts. Each part assembles a number of similar features, and in particular, they will all be executed at the same time. The project is then viewed as a series of **compound options**. The value of a part depends on the success of the previous ones. This divide-and-conquer technique is highly useful because if, by any chance, any subjective misevaluation has been made, it can be easily corrected as just a small part of the project would change. More important, dividing the project into small parts enables managers to handle flexibility more easily, which is exactly the advantage obtained with real options.

A sensitivity analysis can be used to measure the impact of some misevaluation. Volatility can be a highly subjective measure and can greatly benefit from sensitivity analysis.

The third step in the real-option chain is much easier: analysis and control. Once the real option has been correctly evaluated and put into practice, managers must continually watch them. They must as well continually observe the market for any new situation such as the entrance of a new competitor, the creation of a new legislation or a change in market prices. And they must constantly adjust their options and decisions to reflect those changes. That is, it all comes back again to strategic planning and its continuous cycle of analysis, planning and control.

EXHIBIT 2. THE REAL OPTION CHAIN.

Obviously, all of this is easier said than done. A 2006 survey conducted by McKinsey[34] showed that “fewer than half of respondents are satisfied with their company’s approach to making strategic decisions.” Among those who are happy enough with strategic planning are, not surprisingly, the top-level executives themselves, that is, the ones who came up with the plan in the first place.

Lower-ranked executives who are less than happy with strategic planning in their companies start pinpointing problems. The one that perhaps deserves the greatest attention is the alignment of employees with the strategic plan devised by the board of directors. Companies do not keep to their plan. Either because workers were not well instructed on the strategy to follow or because managers chose a wrong plan to begin with.

The first reason evidences that not only must managers inform their plan to the whole company but they must also convince their employees that it is a good plan and that it must be followed. The second reason seems to be due to a more difficult issue: the human factor.

(Lovallo and Sibony, 2006), in another McKinsey survey, point that decision makers are often afraid of taking risky decisions that may jeopardize their careers should the project fails, even though all analysis and calculations point the project as a good one. Other fearless managers, on the contrary, may be over-optimistic about some project causing heavy losses for the company in the future, possibly because they do not consider their jobs in danger. Over-optimism is a natural characteristic of the human being. Or would you rather say you do not belong to the group of the 20% best drivers?

In order to eliminate the human factor (or at least reduce it), the authors suggest improving the company’s ability to identify critical elements by fostering a culture of open debates. During those debates, the company should try to:

- identify the decisions that are truly strategic
- track expectations of individuals against actual outcomes and calibrate their levels of risk aversion
- determine the company’s exposure to human error

[34] McKinsey & Company (2006).

- pinpoint real problems
- review the processes if forecast and results differ significantly
- learn from the past, especially if the company tends to be over-optimistic (learn from its mistakes)
- provide feedback
- value second opinions, even from outsiders (outsiders can be more impartial and not prone to over-optimism or fear)
- include alternatives: the “next-best” ideas
- ensure that the right questions get asked and answered

It should be clear now that strategic planning, in spite of all the mathematics used to corroborate managers’ decisions, is *not* an exact science. It involves quite often subjective decisions and gut feeling. Those decisions require great responsibility and are not, by any means, just a simple matter of calculating present values. Managers are paid high wages for all their knowledge, the insight they have into the market and their ability to decide. In the words of Richard Rumelt, professor of strategy at UCLA’s Anderson School of Management: “if we could actually calculate the financial implication of such choices, we wouldn’t have to think strategically; we would just run spreadsheets.”[35]

It is the CEO’s job to think strategically and to keep the good health of his business. He can only do that by finding the good strategy, by identifying the right opportunities, by detecting the market breaches and digging up the open niches where his business can grow. It is his job to devise a plan based on the best information he can gather, either based on objective or subjective facts. The concept of *good strategy* may still be a little subtle, however. What makes a good strategy? Professor Rumelt proposes this answer:

> **“A good strategy [...] is one that is responsive to change and that builds, builds upon, and stretches the resources that yield competitive advantage.”**

[35] LOVALLO AND MENDONCA (2007).

Real Options in Telecoms-Analysis of TransEuropean Wireline Video Deployment

CHAPTER 13

This chapter is based on the report of Marcel BOYER and Eric GRAVEL (2012), " A Real Options Analysis of TransEuropean Telecommunications Wireline Video Deployment ", CIRANO 2012s-25.

The business case analyzed in this chapter is fictional.

13:1 - INTRODUCTION

The goal of this project was to demonstrate how the RO methodology can be applied to evaluate TransEurope Communications (TEC) investment projects. Although realistic, the business case analyzed in this paper is fictional.

We focus on the consumer side of a footprint expansion and wireline video (WV) deployment for the Berlin area. This project encompasses the following steps: (1) the expansion of the footprint to enable the deployment of WV (including the development of the technology necessary to offer WV), (2) the deployment of WV which requires the completion of the preceding step and (3) the possible addition of a value-added service (VAS).

The main elements we have identified to evaluate this investment are: the capital expenditures (CAPEX) for the footprint expansion and the WV technology development, the CAPEX for the WV and VAS deployments, the operating expenditures (OPEX) for the supply of WV and the VAS, the monthly revenue per subscriber for WV and the VAS and the number of subscribers for WV and the VAS. Furthermore, we assume that a competitor is currently offering video, voice and data transmission services (not identical to TEC) and that TEC is losing voice and data subscribers by not offering the complete bundle of services (video, voice and data).

Among the aforementioned elements, we consider that the main sources of uncertainty are: (1) the CAPEX required for the WV and VAS deployments, (2) the monthly revenue per subscriber for WV and the VAS and (3) the number of WV and VAS subscribers. Furthermore, we assume that the duration of the cash inflows from WV and the VAS is random because technological improvements will eventually render the current technology obsolete. The technology is obsolete in the sense that a better standard becomes available.

We make use of a Geometric Brownian Motion (GBM) to model the evolution of the WV and VAS CAPEX. The interesting characteristic of GBMs is that they can represent many real/empirical phenomena with only two parameters: one for the trend and one for the volatility around this trend. A GBM is also used to model the evolution of the monthly revenue per subscriber.

For the number of subscribers in the Berlin area, it is not appropriate to use a GBM. In fact, one expects that the number of subscribers will initially be low and that it will tend to converge to an equilibrium level. To reproduce such a phenomenon, it is appropriate to use a mean reverting process which replicates the desired behavior without excluding random shocks.

To model the arrival of obsolescence we make use of a Poisson process. At each moment there is a certain probability (constant for a given interval) that the technology will become obsolete. When the technology becomes obsolete, there is a phasing out period during which subscribers progressively migrate towards the new standard and therefore revenues do not immediately fall to zero.

Contrary to the NPV, the strength of the RO methodology lies in its capacity to account for the optimal management of flexibility under uncertainty. For this project, three sources/point of managerial flexibility are immediately apparent: (1) the flexibility to delay the footprint expansion and WV technology development, (2) the flexibility to realize or not and to delay the WV deployment and (3) the flexibility to realize or not and to delay the introduction of a VAS.

We present a numerical analysis illustrating the application of the RO methodology to the current project. For matter of simplification and without loss of generality, we shall not consider the option of deploying a VAS in this paper, but rather only the option of expanding the footprint and deploying WV will be analyzed. For this, two RO models will be considered; these are: (1) the option to deploy WV is a European option[36] and the decision to expand the footprint or not must be taken immediately; (2) the option to deploy WV is a European option and the option to invest in the footprint expansion is an American option.

In this context, a European option reflects the flexibility of realizing (or not) a subsequent step at a given fixed date and therefore optimal timing to exercise the option is not considered. For example, in the first RO model, when it decides to invest in the footprint expansion, TEC purchases or ac- quires a European option, namely the option to deploy or not WV, an option which can be exercised only after the first investment is completed. In a sense, the footprint expansion is the cost of the real option to deploy later on the WV service. In contrast, the NPV implicitly assumes that if TEC decides to expand its footprint, WV will be deployed notwithstanding market conditions at the end of the first step. In the second model, the option to expand the footprint is an American option in the sense that TEC can decide to realize the footprint expansion at any time within a given period.

Because the goal of this study is to demonstrate how the RO methodology can enhance TEC current investment valuation practices, we shall compare the RO valuations with the NPV valuations.

In order to determine the base case values for the model's parameters, we conducted an exchange session with TEC experts in different fields such as technology, marketing, sales and finance, through TEC Business Decision Support Group (BDS). Following this meeting, we determined that: the time to complete the first step (the footprint expansion) is equal to 9 months and costs 206M€; the time needed to deploy WV once the first step is completed is equal to 1 year at an expected cost of 181M€ (random variable); the number of subscribers (random variable) in the Berlin area who would currently be willing to purchase WV services is 38 000; the expected long term equilibrium number of subscribers in the Berlin area is equal to 1.12M; the expected value of the monthly revenue (random variable) per subscriber is 45€/month; TEC will make a markup of 40% on WV services; the expected lifetime of the technology (random variable) is equal to 10 years.

[36] A European option can be exercised at a given fixed date while an American option can be exercised at any time before its expiry date.

We assume that 15% of WV subscribers are voice and data protect sub- scribers and that 35€/month in net revenues per voice and data protect subscribers is kept by offering WV services. Note that a 15 % discount rate is used[37].

For the base case, we find that it is optimal to realize the first step immediately (expand footprint and start developing WV technology) because the NPV (482.43M€) and the value of the first RO model (482.43M€) are superior to the value of the second RO model (476.13M€) which considers the flexibility of waiting to invest at any time within a given period (0.5, 1 or 2 years). The cost of forgone cash-flows during the delay period exceeds the benefit of waiting for more favorable market conditions. Moreover, we find that in this case, the flexibility of not investing after the end of the first phase (captured by the first RO model) has no value because it is very unlikely that the WV CAPEX will exceed the expected value of the cash-flows from WV.

In addition to the base case valuation, we consider five other cases to examine how changes in the parameters affect the value of the project. We find that the optimal investment strategy can vary significantly with changes in the parameters. For example, if we suppose that the long term equilibrium number of subscribers in the Berlin area is equal to 0.6M with the other parameters left unchanged, we find that even though the NPV and the value of the first RO model is positive, it is optimal to wait before realizing the first phase. If we reduce the expected lifetime of the technology from 10 to 6 years with an equilibrium number of subscribers of 0.6M, the NPV and the value of the first RO model become negative. However, because the value of the second RO model is positive, the project has value and it should not be discarded on the basis of its negative NPV. TEC should then wait before investing in footprint expansion but keep the project alive because there is high enough probability that the business environment will eventually favor investment. In this situation, TEC must periodically reassess the state of the market, rerun the model and see if the time to invest has arrived.

The main conclusion and lesson of this exercise is:

One cannot determine a value maximizing investment strategy if one does not value managerial flexibility in an appropriate way.

13:2 - THE BUSINESS CASE OF TEC WV DEPLOYMENT

In the current document, we shall focus on the consumer side of a footprint expansion and wireline video (WV) deployment for Berlin. In its simplest version, the project encompasses the following steps.

- 1. Expansion of the footprint to enable the deployment of WV (this step includes starting the development of the technology necessary to offer WV).
- 2. The deployment of WV which requires the completion of step 1.

[37] Currently, a theoretically more appealing method called certainty equivalent valuation (CEV) is gaining ground in RO analysis. The difference between the risk adjusted discount rate and CEV is that with the latter, we adjust for risk at the source of risk (stochastic state variables) and we discount the certainty equivalent cash-flows at the riskless interest rate.

- 3. The possible addition of one or more value added services (VAS) which requires the completion of steps 1 and 2[38].

Based on internal TEC documents and on discussions with TEC BDS group, the main elements we have identified to evaluate this investment are the following.

- 1. The capital expenditures (CAPEX) for the footprint expansion and the WV technology development.
- 2. The CAPEX for the WV and VAS deployments.
- 3. The operating expenditures (OPEX) for the supply of WV and the VAS.
- 4. Both the number of subscribers and the monthly revenue per subscriber for WV and the VAS.

We assume that a competitor is currently offering a service similar (not identical) to WV and that this competitor is also offering voice and data transmission services (also not identical to TEC services). Accordingly, we suppose that consumers can be divided into the following three groups.

- A. The consumers preferring to purchase WV services from TEC and willing to wait until the service is available, note that these consumers will not change providers for their voice and data transmission services;
- B. The consumers preferring to purchase WV services from TEC and who are currently purchasing video, voice and data transmission services from the competitor, if TEC decides to offer WV, these consumers will switch and purchase all three services from TEC;
- C. The consumers who are currently purchasing voice and data services from TEC and who are willing to switch and purchase all three services (voice, data and video) from the competitor if TEC does not offer WV, if TEC offers WV, these consumers will remain with TEC for all three services (revenue protect).

2.1 - The sources of uncertainty and flexibility

In order to build an appropriate RO model for a particular investment, one must start by identifying the project's underlying sources of uncertainty and the underlying sources or points of flexibility. These are the model's main ingredients. In accomplishing this exercise, the decision maker must strike the right balance between practicality and realism. If the model is too complex, it may be difficult to solve and if it is too simple, a bad representation of reality may be given and wrong decisions can end up being made.

In this section, we shall identify the main sources of uncertainty and points of flexibility for the project described in the preceding section. This will be followed by a short valuation example to demonstrate how uncertainty and flexibility are combined to structure and solve a RO problem.

2.1.1 - The sources of uncertainty

The first source of uncertainty is the level of CAPEX required for the WV and VAS deployments and our understanding is that the volatility in these costs stems from both input cost and technological uncertainty. For given equipment specifications, input cost uncertainty affects the price of building the equipment whereas technological uncertainty stems from the unknowns surrounding final equipment specifications.

[38] Examples of such VAS are: VoD (Video on Demand), D-PVR (Digital - Personal Video Recorders), home services, VoIP (Voice over IP), gaming, security and other interactive services in addition to broadcast video.

The second source of volatility is the level of revenues from WV and VAS; these revenues are the product of the number of subscribers and the monthly revenues per subscriber. We assume here that both the number of subscribers and the revenues per subscriber are uncertain.

The third source of uncertainty concerns the duration of the cash inflows from WV and the VAS. The duration is random because technological improvements will eventually render the current technology obsolete[39].

Finally, we assume for matter of simplicity that the level of CAPEX needed to expand the footprint and to start the development of the WV technology is known and that the OPEX are a deterministic known percentage of revenues.

2.1.2 - The Sources/Points of flexibility

For this project, three sources/points of flexibility are immediately apparent.

- 1. The flexibility to delay the footprint expansion and WV technology development.
- 2. The flexibility to realize or not and to delay the WV deployment.
- 3. The flexibility to realize or not and to delay the introduction of VAS.

The above sources of flexibility confer to TEC the option of realizing or not and delaying an investment; for each stage, the decision maker must decide between:

- 1. investing or abandoning;
- 2. postponing the decision to the next period (if possible).

2.1.3 - The Importance of Considering Uncertainty and Flexibility

Contrary to the NPV, the strength of the RO methodology lies in its capacity to account for the optimal management of flexibility under uncertainty. If management can modify its course of action with the arrival of new information, discounting a single average scenario or predetermined course of action can give a misleading indication of the project's value. In fact, if we employ the NPV rule (even in its simulated form) for decision making purposes, we can only consider two courses of action, these are:

- 1. invest if the NPV is superior to zero;
- 2. reject the project if the NPV is smaller than or equal to zero.

If there is uncertainty and it is possible to postpone the investment, the strategy prescribed by the aforementioned rule may be suboptimal. Let's see why.

First, even though the NPV is positive, it may be optimal to wait before investing. In fact, if the NPV is "barely" positive, the manager may want to wait and gain more insurance about the profitability of his project. With the option of waiting to invest, the decision maker can temporarily avoid embarking in an adventure that presents a high turnaround risk (positive but low initial NPV).

The value of the option of waiting to invest (timing option) is positively related to the level of uncertainty in the value of the project and to the irreversibility of CAPEX. If the investment is totally reversible, it is not necessary to wait in

[39] The technology is obsolete in the sense that a better standard becomes available.

order to diminish the probability of a negative turnaround; perfect reversibility implies that capital can be transferred without costs to more profitable activities[40].

When the NPV is initially positive, the cost of waiting is equal to the cash flows that would otherwise be realized if the project were operational. The real options methodology enables the manager to assess the optimal trade-off between waiting and investing.

In the second case, the initial NPV can initially be negative but the option to wait can still be valuable; in the future, a favorable turnaround can render the investment opportunity interesting (positive NPV). As a result, it is important not to abandon the project before its expiration date even if the current NPV is negative.

It is important to note that the value of the option to wait can be zero if strategic considerations force the firm to act rapidly to preempt competition. In a strategic environment, the real options methodology has to be combined with a game theoretic analysis. Finally, other sources of flexibility may potentially exist, for now, we will only consider the flexibility of waiting to invest[41].

13:3 - A SIMPLE EXAMPLE OF THE OPTION "WAITING TO INVEST"

As mentioned in the previous section, to undertake an investment, the NPV rule requires that the expected discounted value of a project's net cash-flows be positive. Under uncertainty, the NPV rule is satisfactory only if one of the following conditions is satisfied:

- 1. the manager can later reverse his decision and recuperate his original investment at a negligible cost;
- 2. the investment is a now or never proposition.

If the first condition is fulfilled, we say that the investment is perfectly reversible and it is not difficult to imagine situations in which this first condition is violated. Consider an investment in an optical fibre network. It is hard to imagine that the network can be closed and dismantled without losing a substantial part of the original investment. If the manager has the option to delay, we must not ignore the possibility of realizing the project at a subsequent date when market conditions may be more favorable than presently.

For example, consider the opportunity to irreversibly invest I =1 600M € in a project that cannot be altered once it is operational[42]. In addition, suppose that one year after the initial investment I, the asset starts producing 1 million

[40] It is important to mention that the reusability of capital is not a sufficient condition for reversibility. Even if capital is reusable, it may be impossible to recuperate invested sums if the capital is industry-specific. The capital's resale value may be tightly connected to current industry conditions; this makes other potential users also willing to divest and/or unwilling to invest in adverse conditions.

[41] An interesting analogy can be made between a project that has a negative NPV with the option to wait and an out of the money call option on a share of stock. This parallel permits in some way to validate the idea that a project can still have value even though its NPV is currently negative. For example, on September 15 2004 at 11:33AM a share of Verizon Communications (VC) common stock was trading for 39.98US$. At the same time, one could purchase for 1US$ call options to buy one share of VC stock at a strike price of 42.50US$ any time before April 2005. The NPV of the call option is the difference between the current share price and the option's strike price, this gives -2.52US$. Even though the option's NPV is currently negative, the option has a value of 1US$ because there is a probability that before April 2005 the VC stock will rise above 42.50US$.

[42] It is straightforward to draw a parallel between this generic project and the opportunity to deploy a VAS.

units of a good and we assume that the price of this good will evolve according to Exhibit 1. Exhibit 1 provides us the following information.

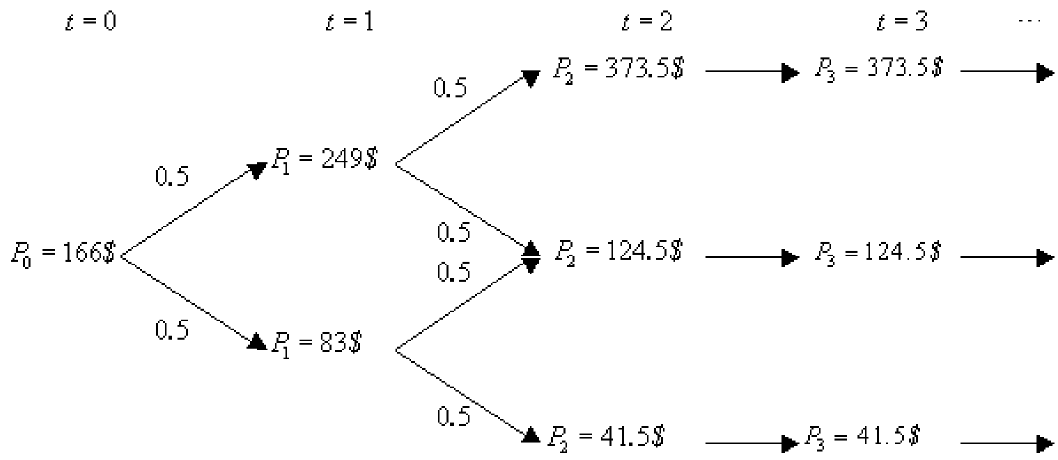


EXHIBIT 1. EVOLUTION OF THE OUTPUT PRICE

1. The uncertainty surrounding the price of the firm's output is totally resolved after year 2 (t = 2). For example, if the price falls to P_2 = 41.5€ it will remain at that level forever.

2. The price of the output in year 0 (t = 0) is known (P_0 = 166€).

3. Starting from each point (state), the two possible price changes have a 50% chance of occurring. For example, if P_1 = 83€, there is a 50% probability that it will rise to P_2 = 124.5€ and a 50% probability that it will fall to P_2 = 41.5€.

4. The expected value at t = 0 of the price P_t (denoted by $E_0\,[P_t]$) for each period t is equal to 166€, that is

$E_0\,[P_1]$ = 0.5 • 249€ + 0.5 • 83€ = 166€

$E_0\,[P_2]$ = 0.5 • (0.5 • 373.5€ + 0.5 • 124.5€) +0.5 • (0.5 • 124.5€ + 0.5 • 41.5€) = 166€.

We assume that in periods 0 and 1, the firm can either invest or postpone the decision to the next period and the discount rate is equal to 10%.

If one ignores the fact that the investment is irreversible and that it is possible to wait, he will invest immediately because

$$NPV_0 = -1{,}600\ M€ + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{166\ M€}{(1.1)^t} = 60\ M€ > 0$$ [43]

However, if the manager considers the option to wait before investing, his time t decision will be based on the following criterion:

$$decision_t = \max\ \{invest_t, wait_t\}\ ,$$

[43] Remember that at t = 0, the expected cash flow for every period is equal to 166€

where $invest_t$ is equal to the value of investing immediately and $wait_t$ is the value of waiting; those values are determined below.

To compare the t=0 value of the dynamic and static strategies, a simple dynamic programming argument will be used. Even though this example is simplified, the solution method used is very similar to those employed to resolve more complex American option problems.

Referring to Exhibit 1, because the market is stable after t=2, there is no point in delaying the investment past t=2, the project becomes a now or never proposition. If the manager has not yet invested, the optimal decision is to invest if P_2 = 373.5€ because the NPV is equal to

$$NPV_2 = -1{,}600\ M€ + \sum_{t=3}^{\infty} \frac{373.5\ €}{(1.1)^{t-2}} = 2{,}135\ M€$$

and to abandon if P_2 = 124.5€ or 41.5€ because $NPV_2 < 0$. Going back one period (t = 1), if the manager has not yet invested, he then has to decide either to invests at t =1 or to wait until t = 2. Let us compare the value of both strategies: if P_1 = 249€ (this price corresponds also to the expected price for t > 1), then the value of investing immediately is equal to

$$Invest_1 = NPV_1 = -1{,}600\ M€ + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{249\ €}{(1.1)^{t-1}} = 890\ M€$$

and the value of waiting is equal to

$$Wait_1 = \left[0.5 * \left(max\left\{0, -1600\ M€ + \sum_{t=3}^{\infty} \frac{373.5\ €}{(1.1)^{t-2}}\right\}\right) + 0.5\left(max\left\{0, -1600\ M€ + \sum_{t=3}^{\infty} \frac{124.5\ €}{(1.1)^{t-2}}\right\}\right)\right] * \frac{1}{(1.1)}$$

$$= [0.5 * (2\ 135\ M€) + 0.5 * (0€)] * \frac{1}{(1.1)}$$

$$= 970.45\ M€$$

if P_1 = 83€ (this price corresponds also to the expected price for t > 1), the NPV is negative and it will always be negative because P_2 can only equal 124.5€ or 41.5€[44]. Consequently, if P_1 = 249€, it is optimal to wait another period. The manager should then invest at t = 2 if and only if P_2 reaches 373.5€.

Let us now consider the optimal decision at t = 0. We determined above that NPV0 = $invest_0$ = 60M €. If the manager decides to wait, the value of waiting is equal to

[44] To compute the value of $wait_1$, we calculated the discounted expected value of the t =2 optimal investment strategy

$$wait_0 = [0.5 * max\{wait_1\ if\ P_1 = 249€, invest_1\ if\ P_1 = 249€\} + 0.5 * \\ * max\{wait_1\ if\ P_1 = 83€, invest_1\ if\ P_1 = 83€\}] * \frac{1}{(1.1)}$$

$$= [0.5 * (970.45\ M€) + 0.5 * (0M€)] * \frac{1}{(1.1)} = 441.11\ M€$$

At t = 0, because $wait_0 > invest_0$, it is optimal to wait until the next period before making a decision. In the next period (t=1), we determined above that if we have not yet invested, then the optimal strategy is to postpone the decision to the next period (t=2). Consequently, the strategy that gives the highest expected value at t=0 is to wait till t=2 and invest if and only if P_2 reaches 373.5€.

13:4 - THE REAL OPTION VALUATION

We mentioned in the preceding section that to build a RO model, the first crucial steps were to identify the sources of uncertainty and the sources/points of flexibility. We then emphasized the importance of considering the interaction between uncertainty and flexibility when valuing an investment. Finally, a simple example was given to show that considering flexibility can alter a manager's decision.

In this section, we shall bring together the project specific elements described previously and build the RO model for the footprint expansion and wireline video (WV) deployment or Berlin. To do this, we will make use of several tools. First, to enlighten the presentation, symbols will be used to represent the variables and parameters entering the model[45]. Second, the evolution of the sources of uncertainty will be modelled by using different types of stochastic processes, the main characteristics of these processes will be described.

Third, we will describe the RO model for the footprint expansion and WV deployment project. Note that in this model, the type B and C consumer categories will be merged and their number will be expressed as a percentage of total consumers. This is the case because the effect on incremental revenues of type B and C consumers is the same.

Finally, in order to design a RO model, it is useful to lay out a diagram of the firm's decision process in both its state-of-the-system space and its time space. To build these diagrams, different building blocks are used. In appendix A

the different building blocks are described and a diagrammatic representation of TEC decision process will be given.

4.1 - The Symbols and the Sources of Uncertainty

From here on, the letter t will be used to represent time in years with t = 0 indicating current time and R designates the risk adjusted discount rate. The other symbols used to represent the model parameters are given in Table 1.

[45] Contrary to a variable, the value of a parameter does not change with time, it is constant throughout the model.

Symbol	Definition
$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$	Time to complete first three phases, respectively
$T_1 + T_2$	Time limit to delay footprint expansion and VAS deployment, respectively
I	CAPEX for first phase (footprint expansion)
$\psi_w + \psi_v$	Units of capital for WV and VAS deployments, respectively
$\theta_w + \theta_v$	Variable cost multiples for WV and VAS, respectively
λ	Percentage of type B and C consumers
P_{DV}	Net monthly revenues from data and voice
γ	VAS revenue multiple

TABLE 1. PARAMETER DEFINITIONS

4.1.1 - CAPEX

As we mentioned, the level of CAPEX for the WV and VAS deployments is stochastic. For tractability, we assume that the same random factors (input cost and technological) will affect the level of CAPEX for both services. This is a reasonable assumption if we expect that the same type of components are used for both technologies and that their development presents similar technical challenges. Because of this, a single Geometric Brownian Motion (GBM) may be used to model the evolution of the cost per unit of capital which we denote as K (t).

To determine the level of CAPEX at a date t for a particular service, we multiply the cost per unit of capital (K (t)) by ψ_w or ψ_v. For example at t, the cost of deploying WV and the VAS will be equal to ψ_w • K (t) and ψ_v • K (t), respectively.

The interesting characteristics of GBMs is that they can represent many real/empirical stochastic phenomena with only two parameters: one for the trend and one for the volatility around this trend[46].

Exhibit 2 shows three possible CAPEX patterns that were generated by a GBM with a declining trend. A declining trend can be used to account for the fact that many telecommunications and information technology equipment costs tend to fall over time as a result of technological improvements and increasing competition between suppliers. A positive trend is used to model the evolution of prices that have a tendency to rise (in real terms).

[46] For example, if we expect CAPEX to decrease by 2% per year with a volatility of 20%, the percentage change in CAPEX (ΔR/R) in one year can be expressed as: (ΔR/R) = 0.02 + 0.20 . ε, where ε is a draw from a standard normal distribution.

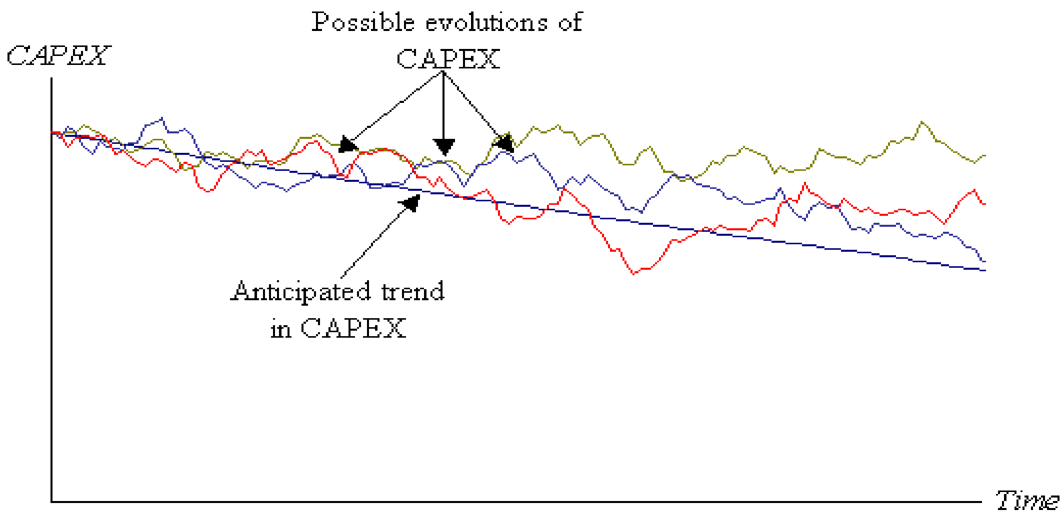


EXHIBIT 2. EVOLUTION OF CAPEX

4.1.2 - Monthly Revenue Per Subscriber

We also use a GBM to represent the evolution of the monthly revenues per subscriber R (t). Note that the monthly revenue per subscriber for the VAS is a multiple of the monthly revenue per subscriber for WV, using the symbols of Table 1, the monthly revenues from the VAS at time t are equal to $\gamma \bullet R(t)$ (compared to R (t) for WV).

4.1.3 - Number of subscribers

For the number of subscribers in the Berlin area, denoted by S (t), it is not appropriate to use a GBM. In fact, one expects that the number of subscribers will initially be low and that it will have a tendency to converge to an equilibrium level S.

To model such a phenomenon, it is appropriate to use a mean reverting process which replicates the desired behavior without excluding random shocks. Exhibit 3 illustrates mean reversion in S (t) for an initial number of subscribers that is lower than the long term equilibrium value S. The expected evolution of the number of subscribers curve illustrates the expected convergence phenomenon, the number of subscribers is expected to grow in a stochastic or volatile way, at a positive but decreasing rate towards S. The possible paths illustrated on Exhibit 3 and the 95% confidence interval for subscribers illustrates the randomness of the process. We suppose that all WV subscribers will subscribe to the VAS.

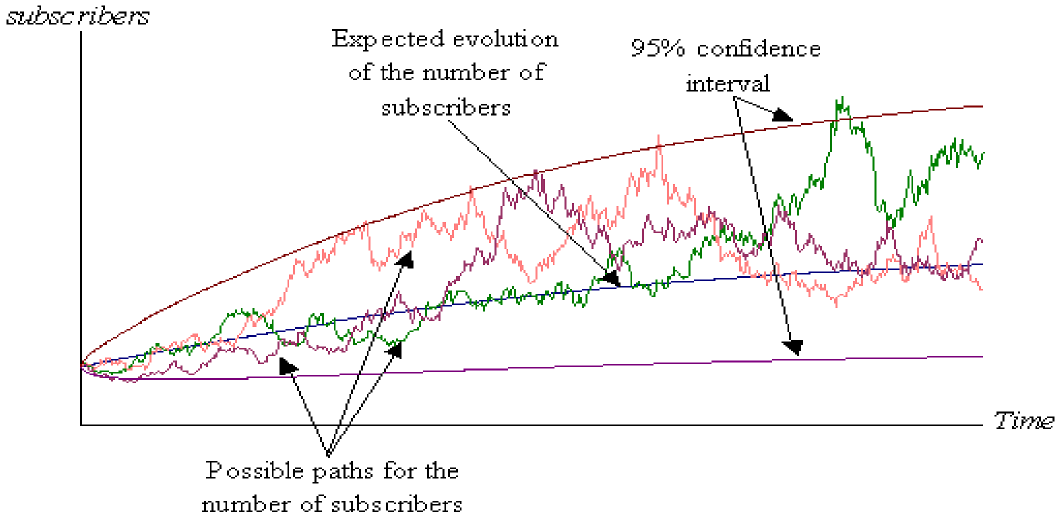


EXHIBIT 3: EVOLUTION OF THE NUMBER OF SUBSCRIBERS

4.1.4 - Obsolescence

Finally, we model the arrival of obsolescence with a Poisson process, at each t there is a certain probability (constant for a given interval) that in the next instant the technology becomes obsolete. When the technology becomes obsolete, there is a phasing out period where subscribers progressively migrate towards the new standard, revenues do not fall to zero immediately.

4.2 - The Footprint Expansion and WV Deployment Project

In this section, we propose two RO models which differ according to their degree of flexibility. In both models, the monthly incremental cash-flows from WV at time t is equal to the monthly revenue per subscriber for WV times the number of subscribers and the markup on WV services plus the net revenues on voice and data times the number of type B and C consumers. For the VAS, the monthly incremental cash-flows at time t is equal to the monthly revenue per subscriber for VAS times the number of subscriber and the markup on the VAS. Note that the duration of the cash-flows for both WV and the VAS is stochastic because of the possibility of obsolescence[47].

4.2.1 - The first model

In the first model, we assume that all the options embedded in the project are European. In this context, a European option reflects the flexibility of realizing (or not) a subsequent step at a given date, optimal timing is not considered. For example, if TEC decides to expand the footprint at t = 0, it buys the European option of deploying WV at t = τ_1 and the value of this option stems from the possibility of obtaining cash-flows from WV at t $=\tau_1 + \tau_2$ plus the European option to add a VAS at t $=\tau_1 + \tau_2$.

In this first model, the first decision TEC has to take is whether or not to invest I at t =0 to expand the footprint. After the expansion is terminated (in τ_1 years), TEC must decide whether to deploy WV or not. If TEC decides to deploy WV, it must invest ψ_w• K (τ_1) at t = τ_1 and this service will start generating revenues at t = $\tau_1 + \tau_2$ (this includes incremental revenues from type B and C consumers). The third decision TEC has to take after completing the WV

[47] Mathematically, the monthly incremental revenues at time t for WV and VAS are respectively equal to:
R (t) S (t) (1 − θw) + λS (t) PDV and γR (t) S (t) (1 − θw).

deployment (at t = $\tau_1 + \tau_2$) is either to invest ψ_v • K ($\tau_1 + \tau_2$) to add the VAS or not, in which case TEC only receives the revenues from WV. The VAS will start generating revenues at t = $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$.

Note that from t = 0 to t = $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, the random variables keep fluctuating according to changes in the business environment and there is always a possibility that the technology becomes obsolete. If the technology becomes obsolete, subsequent investments will not be made and no additional cash-flows will be realized. For example, if the technology becomes obsolete before t = τ_1, WV and the VAS will not be deployed and I will be lost.

In the above model, the value of investing I stems from the European options to deploy WV and the VAS. At this point, it is important to contrast this model with a simulated NPV approach. According to NPV, when I is invested, it is implicitly assumed that all subsequent investments will be made notwithstanding the future state of the market. Consequently, the decision maker is discounting the expected cash flows of a predetermined course of action. In contrast, the European option model considers that subsequent investments will be made only if they are profitable at that future point in time.

4.2.2 - The second model

For the second model, we suppose that TEC has the option to delay the footprint expansion during some period of time T_1. This option is of the American type, that is, TEC can invest I at any time between t = 0 and t = T_1 to acquire the European options to deploy WV and the VAS.

Compared to the previous case, TEC has the flexibility of waiting for more favorable market conditions before investing I. If the project has a negative NPV at t = 0, it is possible that a favorable turnaround will render the investment attractive and therefore TEC must then consider keeping the option alive[48].

For matter of simplification and without loss of generality, we shall not consider the option of deploying a VAS, but rather only the option of expanding the footprint and deploying WV will be analyzed. Hence the two RO models considered are:

- 1. Model 1: the option to deploy WV is European and the decision to expand the footprint or not must be taken immediately;
- 2. Model 2: the option to deploy WV is European and the option to expand the footprint is American (TEC can decide to invest I in footprint expansion at any time during a period of length T_1).

4.2.3 - The Expected NPV

Because the goal of this study is to demonstrate how the real options methodology can enhance TEC current investment valuation practices, we shall compare the RO valuations to those computed according to the NPV rule.

To compute the expected NPV, we first determine the discounted expected value of the WV cash-flows and we deduct of this amount the discounted expected value of the WV CAPEX and I. This is consistent with traditional NPV analysis as we implicitly assume that once I is invested, all subsequent investments (deployment of WV) will be made notwithstanding market conditions at t = τ_1. We use a risk adjusted discount rate of 15% to compare the NPV results with the RO results. However, a theoretically more appealing method called certainty equivalent valuation (CEV) is gaining ground in RO analysis. The difference between the risk adjusted discount rate and CEV is that with the latter,

[48] In a waiting to invest context, keeping the option alive means doing what is necessary (information updates, meetings, etc.) to eventually reconsider investing in the project.

we adjust for risk at the source of the risk (stochastic state variables) and we discount the certainty equivalent cash-flows at the riskless interest rate.

All the aforementioned sources of uncertainty are considered including obsolescence. Furthermore, note that the timing of obsolescence can result in two types of outcomes. First, if the technology becomes obsolete before t = τ_1, WV will not be deployed and only I will be lost. Second, if obsolescence occurs after WV is deployed, we suppose that revenues at the date of obsolescence will gradually phase out. In this example, we assume that revenues at the date of obsolescence will have a half-life of one year[49].

4.3 - Determination of the Base Case Parameter Values

As mentioned, to determine the base case values for the model's parameters, we conducted a meeting analogous to the IVA sessions organized by TEC BDS group. It is important to mention that the simulated IVA session that we held gave us "ball park" figures and in reality, more information (if possible) should be obtained to supplement and validate this first pass. The questions that were asked (and the answers) are the following:

4.3.1 - Questions relative to step 1

1. How much time will it most likely take to complete the first step of the project (expansion of footprint and development of the WV technology) for the Berlin area? That is, upon starting the first step, in how many months can TEC be ready to start the WV deployment?

Answer: The expected time to complete the first step is 9 months, consequently, we have τ_1 = 0.75.

2. What amount will most likely need to be invested to complete step 1 (to get the network ready to start WV deployment) for the Berlin area?

Answer: This amount is equal to 206M€, this includes the investment necessary to get the network ready plus the cost of starting the development of the WV technology, consequently, we have I = 206.

4.3.2 - Questions relative to step 2

3. Once the network is ready, how much time will it most likely take to deploy WV for the Berlin area? Note that at the beginning of the second step, only the necessary bandwidth is available and the WV technology is assumed developed.

Answer: The expected time span between the start of WV deployment and the reception of cash flows from WV is equal to 1 year, consequently, we have τ_2 = 1.

4. As seen from today, what amount would most likely need to be in- vested to realize the second step (in τ_1 years)? That is, starting from raw bandwidth and a developed WV technology, how much would TEC need to invest to have WV available in the Berlin area?

[49] If revenues have a half-life of one year, then they will be down to 50% of what they were at obsolescence one year after obsolescence, down to 25% after two years, down to 12.5% after three years, etc.

Answer: As seen from today, by the time TEC is ready to deploy wireline video (in 9 months), the expected cost is 181M€. Note that the BDS group consider a 2% growth factor to account for expected real changes in this type of costs. Consequently, α = 0.02 (expected growth rate of CAPEX) and if we suppose that K (0) = 1, we have

ψ_w • K (0) = 181e− 0.02•0.75 ' 178 ⇒ ψ_w = 178.

5. With 95% confidence, what are the highest and lowest values for the cost of deploying WV in 9 months?

Answer: The 95% confidence band is estimated to be ± 10 to 15 percent of the starting 178M€ cost. With this information we estimate that σ_K (volatility parameter of CAPEX) is between 0.05 and 0.10.

6. Assume that WV is available today. How much revenues (the revenues variable is equal to the number of subscribers times the annual revenue per subscriber) would TEC most likely get from it in the next year?

Answer: In its first year of availability, it is expected that 38 000 households in the Berlin area will subscribe to wireline video, it is also expected that the average revenue per household will be 45€ per month, consequently, the expected initial monthly revenue is equal to 1.71M€. Note that no growth is expected in the average revenue per household, consequently, μ = 0, R (0) = 45 and S (0) = 0.038.

7. With 95% confidence, what are the highest and lowest values for the average monthly revenue per subscriber in 1 year and 9 months?

Answer: The 95% confidence band is estimated to be ± 15 percent of the 45€ figure provided in the previous answer. With this information we estimate that σ_R (volatility parameter of monthly revenue per subscriber) is around 0.06.

8. We expect that the number of WV subscribers will grow during part of the lifetime of the product. However, we think that the number of subscribers will start relatively low and that it will converge to a constant long term number of subscribers. What would be the most likely long term equilibrium number of subscribers?

Answer: The most likely long term equilibrium number of subscribers is estimated at 1.12M (28% share of the 4M households in Berlin), consequently, (ϱ = ln (1.12) = 0.1133 (logarithm of long term equilibrium number of subscribers).

9. In how much time do you expect that the growth rate will converge to its long term value?

Answer: It is expected that by 2010 WV will have reached its equilibrium penetration rate (we suppose that the study starts in 2004). It is difficult only with this information to estimate κ (mean reversion rate). For this, we will consider the average time it takes for the current spread between the actual and the equilibrium number of subscribers to be reduced by half (from 38 000 subscribers to 579 000 subscribers), for different average times, we have the following table:

Average time	κ
1	1.63
2	0.82
3	0.54

According to the above table and the answer to the current question, the most plausible value for κ is 0.82.

10. With 95% confidence, looking ahead to 2010, what are the highest and lowest values for the number of subscribers in the Berlin area?

Answer: By 2010, with 95% confidence the number of subscribers will be between 0.6M and 2M, consequently with $\kappa = 1.63$, σ_S (volatility parameter for the number of subscribers) should be approximately equal to 0.55.

11. Suppose that two types of costs must be incurred to offer WV: the first type of costs is positively related to revenues (variable costs) and the second is independent of revenues and it must be incurred to keep on offering WV in the Berlin area (fixed costs).

i. Suppose that WV is available to a customer that hasn't yet sub- scribed. If this customer decides to subscribe, what are the costs to TEC of serving this customer on an ongoing basis? Can this be ex- pressed as a percentage of revenues per customer?

Answer: We suppose that variable costs are 60% of monthly revenues (markup of 40% often used by economic study group), consequently, $\theta_w = 0.6$.

ii. What is the most likely annual recurring fixed cost of keeping WV available in the Berlin area, independently of demand?

Answer: We suppose that these costs are included in the initial investment cost.

4.3.4 - Question related to the technology

12. What is the expected lifetime of the WV technology?

Answer: As seen from today, the expected lifetime of the technology is 10 years. Consequently, we will consider a value of $\phi = 1/10$ as the base case value.

Finally, we suppose for the base case that the number of type B and C consumers is equal to 15% of type A consumers (S (t)) and that the net monthly revenue from data and voice services is equal to 35€.

4.4 - Results and sensitivity analysis

The difference between the first model (the option to deploy WV is European and the decision to expand or not the footprint must be taken immediately) and the expected NPV is that in the first model we explicitly take into account the fact that TEC will deploy WV only if market conditions at $t = \tau_1$ justify the investment. Instead of discounting the expected value of a single predetermined course of action (like in the traditional NPV approach), we discount the expected value of an optimal course of action which is to invest if and only if the NPV of WV at t = τ_1 is positive. We label the value computed from the first model as NPV-RO-1.

For the second model (the option to deploy WV is European and the option to expand the footprint is American), we add the possibility of choosing the date of the footprint expansion investment during a period of length 0.5 year, 1 year, or 2 years. We label the value computed from the second model as NPV-RO-2.[50]

In addition to the base case valuation, we include five other cases to examine how changes in the parameters affect the value of the project and the differences between valuation methods. Furthermore, for each case, we give the following information:

- 1. The value of the parameters (Tables 2.X where X stands for the case number considered);
- 2. The 95% confidence intervals for the stochastic variables at t = τ_1 (Tables 3.X) and the expected value of the cash-flows from WV (EVCFWV) evaluated at the lower bound of the 95% intervals for the number of subscribers (S (t)) and the monthly revenues per subscriber for WV (R (t)) at t = τ_1 (conditional on the technology not being obsolete at t = τ_1). Because S (t) and R (t) are independently distributed and that the EVCFWV is increasing in S (t) and R (t), there is a 95.1% probability that the EVCFWV will be superior to the one evaluated at the lower bounds of the 95% confidence intervals for the number of subscribers (S(t)) and the monthly revenues per subscriber for WV (R (t)).
- 3. The valuation results for the NPV, the NPV-RO-1 and the NPV-RO-2 (Tables 4.X).

Note that after case 1, (base case) the tables are always up updated from the previous case.

4.4.1 - The Computation of RO-Valuations

For both RO models (NPV-RO-1 and NPV-RO-2), the first step consists in computing the EVCFWV at the date WV is operational (τ_2 years after TEC decides to deploy WV) conditional on the technology not yet being obsolete. To do this, we start by calculating the EVCFWV for a general cash-flow duration of T and we then take the expectation of this EVCFWV with respect to the distribution of T. Note that the distribution of T is determined by ϕ (expected lifetime of the technology).

The second step is to establish the EVCFWV at the date TEC decides to deploy WV (τ_1 years after TEC decides to expand the footprint). In this case, we take the expected discounted value of the EVCFWV found in the first step, considering that the technology can become obsolete in the interval of time (τ_2) it takes to deploy WV.

The third step for the NPV-RO-1 model is to take at t=0 the expected value of the optimal investment strategy (WV deployment) in τ_1 years. In this case, we proceed by Monte-Carlo simulation, the steps are:

- 1. Generate a large number of trajectories (10 000 or more) for the value at τ_1 of: (1) the number of subscribers, (2) the monthly revenue per subscriber for WV and (3) the WV CAPEX;
- 2. Compute the second step EVCFWV conditional on the τ_1 values generated in the previous step;

[50] Note that the value NPV-RO-2 is computed conditional on not having invested at t = 0.

- 3. For each trajectory, take the maximum between (i) the EVCFWV at τ_1 minus the WV CAPEX and (ii) zero, discount that maximum back to t = 0 and weight it by the probability that the technology will not become obsolete in the interval of time τ_1;
- 4. Sum the values for each trajectory, divide by the number of trajectories and deduct I to obtain NPV-RO-1.

Finally, to compute NPV-RO-2 we proceed in the same spirit as in the section *A Simple Example of the Option "Waiting to Invest"*. In this case, the value of investing immediately is equal to the value computed in the third step for the NPV-RO-1 and we determine by backward induction the optimal investment date and the value of NPV-RO-2. Note that while we wait, it is also possible that the technology will become obsolete.

4.4.2 - Case 1 (base case)

We have the following tables for case 1:

Parameter	Value of the Parameter
τ_1	0.75
τ_2	1.00
R	0.15
I	206 M€
ψ_w	178
θ_w	0.6
λ	0.15
P_{DV}	35€
α	0.02
σ_K	0.05
σ_R	0.06
$\overline{S}$	1.12 M subscribers
K	0.82
σ_S	0.55
ϕ	1/10
K (0)	1M€
R (0)	45€/month
S (0)	0.038M subscribers

TABLE 2.1. PARAMETERS FOR CASE 1

The 95% confidence intervals are:

Variable	Lower bound	Upper bound
K (τ_1)	165.83M€	196.51M€
R (τ 1)	40.59€/month	49.76€/month
S (τ_1)	0.09M subscribers	0.37M subscribers

TABLE 3.1. CONFIDENCE INTERVALS AT τ_1 FOR CASE 1

The EVCFWV evaluated at the lower bounds of the 95% confidence intervals for the number of subscribers (S (τ_1)) and the monthly revenues per subscriber for WV (R (τ_1)) is equal to 885.55M€.

The valuation results are

NPV	NPV-RO-1	NPV-RO-2
482.43M€	482.43M€	476.13M€ ($T_1 = 2.0$)
		476.13M€ ($T_1 = 1.0$)
		473.19M€ ($T_1 = 0.5$)

TABLE 4.1 VALUATION RESULTS FOR CASE 1

In this case, because the NPV is superior to the NPV-RO-2 for all length T_1's, it is optimal to start the footprint expansion (invest I) immediately. The cost of forgone cash-flows during the delay period exceeds the benefit of waiting for more favorable market conditions.

Moreover, notice that the NPV and the NPV-RO-1 are equal; by simply comparing the EVCFWV (885.55M€) to the upper bound of the confidence interval for K (τ_1) (equal to 196.51M€), we see that it is very unlikely that K (τ_1) will exceed the EVCFWV. As seen from t = 0, the optimal strategy at τ_1 will probably always be to invest. Consequently, the flexibility of not investing at τ_1 if market conditions are poor does not have any value in this case.

Case 2

In case 2, we suppose that the equilibrium long term market penetration ($\bar{S}$) is equal to 0.8M subscribers (compared to 1.12M subscribers for case 1). This changes the τ_1 confidence intervals for S (τ_1). We have the following tables for case 2 (update of case 1):

Parameter	Value of the Parameter
$\bar{S}$	0.8M subscribers

TABLE 2.2. PARAMETERS FOR CASE 2

The 95% confidence intervals are:

Variable	Lower Bound	Upper Bound
S (τ_1)	0.08 subscribers	0.31M subscribers

TABLE 3.2. CONFIDENCE INTERVALS AT τ_1 FOR CASE 2

The EVCFWV evaluated at the lower bounds of the 95% confidence intervals for the number of subscribers (S (τ_1)) and the monthly revenues per subscriber for WV (R (τ_1)) is equal to 642.79M€.

The valuation results are:

NPV	NPV-RO-1	NPV-RO-2
251.80M€	251.80M€	247.83M€ (T_1 = 2.0)
		247.74M€ (T_1 = 1.0)
		247.63M€ (T_1 = 0.5)

TABLE 4.2. VALUATION RESULTS FOR CASE 2

As in case 1, the optimal decision is to start the footprint expansion immediately (NPV > NPV-RO-2 for all T_1). Furthermore, by comparing the EVCFWV (equal to 642.79M€) to the upper bound of the confidence interval for K (τ_1) (equal to 196.51M€), the same can be said about the equality between NPV and NPV-RO-1.

Case 3

In case 3, we suppose that the equilibrium market penetration ($\bar{S}$) is equal to 0.6M subscribers (compared to 0.8M subscribers for case 2). This changes the τ_1 confidence intervals for S (τ_1). We have the following tables for case 3 (update of case 2):

Parameter	Value of the Parameter
$\bar{S}$	0.6M subscribers

TABLE 2.3. PARAMETERS FOR CASE 3

The 95% confidence intervals are:

Variable	Lower Bound	Upper Bound
S (τ_1)	0.07 subscribers	0.27 M subscribers

TABLE 3.3. CONFIDENCE INTERVALS AT τ_1 FOR CASE 3

The EVCFWV evaluated at the lower bound of the 95% confidence interval for the number of subscribers (S (τ_1)) and the monthly revenues per subscriber for WV (R (τ_1)) is equal to 487.73M€.

The valuation results are:

NPV	NPV-RO-1	NPV-RO-2
105.80M€	105.80M€	109.34M€ (T_1 = 2.0)
		109.34M€ (T_1 = 1.0)
		109.34M€ (T_1 = 0.5)

TABLE 4.3. VALUATION RESULTS FOR CASE 3

Here even if NPV and NPV-RO-1 are both positive, it is optimal to wait before investing because the value of NPV-RO-2 is superior for all T_1. However, the values of NPV-RO-2 are identical for all T_1; extra time to wait past 0.5 years does not add any value to the investment. This phenomenon can be explained by the small difference (3.35%)

between NPV-RO-1 and NPV-RO-2. In fact, the small difference signals that a slight improvement in market conditions would be sufficient to trigger the investment; the expected time it takes to attain the threshold at which the cost of waiting becomes superior to the cost of foregone cash-flows should be in the interval t =0 and t = T_1 = 0.5, so that having the extra flexibility of a larger T_1 is of no value.

The best strategy for TEC is to wait, rerun the model in ω years (1 month is equal to 1/12 years) with $T_1 = 0.5 - \omega$ and see if NPV-RO-1 (or NPV) is superior to NPV-RO-2, if not, wait again and repeat. Finally, the same as in cases 1 and 2 can be said about the equality between NPV and NPV-RO-1.

Case 4

In case 4, we reduce the expected lifetime of the technology from 10 years to 6 years, while the value of the other parameters are as in case 3. We have the following tables for case 4 (update of case 3):

Parameter	Value of the Parameter
$\boldsymbol{\phi}$	1/6

TABLE 2.4. PARAMETERS FOR CASE 4

There is no need to update table 3.3 (confidence intervals for case 3). The EVCFWV evaluated at the lower bound of the 95% confidence interval for the number of subscribers (S (τ_1)) and the monthly revenues per subscriber for WV (R (τ_1)) at t = τ_1 is equal to 370.66M€.

The valuation results are:

NPV	NPV-RO-1	NPV-RO-2
-10.96M€	-10.96M€	18.92M€ ($\boldsymbol{T_1}$ = 2.0) 14.51M€ ($\boldsymbol{T_1}$ = 1.0) 7.79M€ ($\boldsymbol{T_1}$ = 0.5)

TABLE 4.4. VALUATION RESULTS FOR CASE 4

In case 4, both the NPV and the NPV-RO-1 are negative. If TEC does not have the option to wait, market conditions at t = 0 do not justify the investment. However, if TEC can wait before investing, there is a probability that the business environment will eventually favor investment and as compared to case 3, there is a value in having extra time to wait past 0.5 years. Finally, the same as in cases 1, 2 and 3 can be said about the equality between NPV and NPV-RO-1.

Case 5

For case 5, many parameters have been changed: the time to complete the first phase (τ_1) is increased from 0.75 to 1.50 years, the volatility parameter for WV CAPEX is increased from 0.06 to 0.6, the mean-reversion factor is reduced from 0.82 to 0.54 and the expected lifetime of the technology is equal to 8 years. We have the following tables for case 5 (update of case 4):

Parameter	Value of the Parameter
$\bar{S}$	1.50
σ_K	0.60
κ	0.54
ϕ	1/8

TABLE 2.5. PARAMETERS FOR CASE 5

The 95% confidence intervals are:

Variable	Lower Bound	Upper Bound
$K(\tau_1)$	33.16 M€	591.16 M€
$R(\tau_1)$	39.84€/month	50.64€/month
$S(\tau_1)$	0.07 M subscribers	0.44 M subscribers

TABLE 3.5. CONFIDENCE INTERVALS AT τ_1 FOR CASE 5

By examining table 3.5, we see that the 95% confidence interval for K (τ_1)) is much wider than in the previous cases: two factors account for this difference. First, it takes more time to complete the footprint expansion and to develop the WV technology and therefore, everything else being equal, there is more uncertainty the further we look ahead. Second, the value of the volatility parameter has been increased by a 10-fold factor. Both of these changes have been done to illustrate that there can be a difference between the NPV and the NPV-RO-1.

The valuation results are:

NPV	NPV-RO-1	NPV-RO-2
-3.55M€	3.53M€	45.31M€ (T_1 = 2.0)
		36.31M€ (T_1 = 1.0)
		26.48M€ (T_1 = 0.5)

TABLE 4.5. VALUATION RESULTS FOR CASE 5

In this case, there is a difference between the NPV and the NPV-RO-1. The t = 0 value of the WV investment opportunity computed according to the NPV is equal to 202.45M€ and the one computed by considering that TEC has the option to invest or not at τ_1 is equal to 209.53M€. Using 200 000 trajectories to compute NPV-RO-1, we found that 4.65% of the trajectories result in the EVCFWV being inferior to K (τ_1) compared to 0.00% in the previous cases.

Finally, even though NPV-RO-1 is superior to 0, the optimal strategy is to wait and gain more assurance concerning the profitability of the project. In addition, a longer time to wait has more value.

Case 6

In case 6, we reduce the proportion of type B and C consumers from 15 % to 0.00%. We have the following tables for case 6 (update of case 5):

Parameter	Value of the Parameter
λ	0.00

TABLE 2.6. PARAMETERS FOR CASE 6

There is no need to update table 3.5 (confidence intervals for case 5).

The valuation results are:

NPV	NPV-RO-1	NPV-RO-2
-76.68M€	-64.83M€	11.28M€ (T_1 = 2.0)
		4.41M€ (T_1 = 1.0)
		0.81M€ (T_1 = 0.5)

TABLE 4.6. VALUATION RESULTS FOR CASE 6

Compared to case 5, the difference between the NPV approach and the NPV-RO-1 has increased. Using 200 000 trajectories to compute NPV-RO-1, we found that 9.19% of the trajectories result in the EVCFWV being inferior to K (τ_1) compared to 4.65% in the previous case. As in case 5, the option of waiting to invest is quite valuable.

13:5 - CONCLUDING REMARKS ON THE RO VALUATION, COMPETITION, STRATEGIC PLANNING, AND IMPLEMENTATION ISSUES

To show the potential of the RO valuation methodology as a complementary tool in defining an optimal value maximizing investment strategy for TransEurope Communications (TEC), we retained six evaluation scenarios of the WV deployment project, which provide an interesting array of outcomes. Many other scenarios with different parameter combinations could of course be analyzed.

First, the study shows that the value maximizing strategy is not always to wait, that is, the NPV can sometimes give the right answer (cases 1 and 2).

Second, it illustrates that if one has to pay for extra flexibility, it may not always be a good idea to do so. For example, scenario 3 shows that if one can purchase extra time to wait, it may not be optimal to do so.

Third, scenarios 1 to 4 show that if one can obtain more favorable conditions from suppliers by committing to invest in the future, the value of the flexibility given up may be negligible.

Fourth, the optimal investment strategy can vary significantly with changes in the parameters. Hence, the value maximizing strategy may be to invest immediately and in others it may be to wait until business conditions are more favorable either to diminish the probability of a negative turnaround hat will render the investment unprofitable or to allow a possible positive turnaround which will make a currently unprofitable investment profitable.

The main conclusion and lesson is:

ONE CANNOT DETERMINE THE VALUE MAXIMIZING INVESTMENT STRATEGY IF ONE DOES NOT VALUE MANAGERIAL FLEXIBILITY IN AN APPROPRIATE WAY.

Strategic Competition

There seems to be a necessity to introduce WV before a cable company (CC) deploys voice over the internet protocol (VoIP). TEC considers that if it does not deploy WV before the CC deploys VoIP, the CC will temporarily offer a voice, video and data bundle that will cause TEC to lose a significant amount of actual and potential subscribers.

We did not explicitly consider competitive interactions between TEC and the CC and its effect on the optimal timing of the footprint expansion. The focus was on the basic modelling process which consists in identifying and combining the sources of uncertainty and flexibility into a RO valuation model.

If there is a first mover advantage (FMA), the RO model must be able to assess the optimal trade-off between the value of waiting to invest and acting early to preempt competition. Even if there is a competitive threat, preempting competition does not always dominate waiting. Consequently, one cannot at the outset dismiss the RO value of waiting. To take into account competitive interactions, the RO methodology must be combined with a game theoretic analysis. For such an endeavor, we need a good understanding of the specific nature of competition.

A financial option cannot have a negative value because its owner has the possibility of exercising it, but never the obligation to do so. Nonetheless, one important characteristic of real options in a strategic competitive environment is that a firm may be less valuable if it holds a real option than if it does not. This paradox arises as follows. The value of real options derives from the active management of a project's steps and variations as uncertainty unfolds over time. However, the possibilities of modifying the planned course of a project imply that the firm's commitment to develop and eventually complete the project is relatively low. This lack of commitment may invite more aggressive behavior from competitors, whose objective may be to drive the firm out of the project or market, or more aggressive attacks from the opponents to the project. Active management means that such options, although valuable in a competitive non-reactive business environment, may not be valuable in an oligopolistic reactive business environment: managers must sometimes burn their bridges.

It is a major responsibility of higher level managers to identify which options should be closed in favor of strong commitment and which options should be kept open in favor of flexibility.

Strategic Planning

A good strategic plan is a plan that builds real options into the foreseeable future of the firm and sets up an optimized decision making process to fruitfully exploit those options. Again, real options should be recognized, built in and evaluated for each major step of every project: alliances, acquisitions and mergers, spin-offs, technology development and management, organizational restructuring, etc. The real options approach considers strategic management and decision-making as a process aimed at actively reducing exposition to downside risk and promoting exposition to upside opportunities. It stands at the hinge between pure finance and other areas of decision making under risk such as project evaluation, market entry and exit, organizational restructuring and re-engineering, technology adoption, climate change and biodiversity decisions, etc. The value of strategic planning itself is determined by the quality of the real options designed and imbedded in the plan and by the quality of the evaluation procedure of those real options. It is in this precise sense that the design and management of real options, through the exploitation of uncertainty, create value for the firm and that they represent the most important responsibilities of the managers in determining a strategic plan.

Strategic planning is an exercise in managing flexibility. Plans should specify decision nodes, that is to say future steps that may or may not be taken, at dates that may be given but are mostly to be chosen optimally as the future environment of the firm unfolds in a stochastic way. Furthermore, preparing a strategic plan is not a passive exercise in anticipating the future; it is an exercise in shaping the future or, more precisely, an exercise in preparing the way, in due time, the future will unfold to the decision maker's advantage. That is, managers are planting the seeds of future flexibility by identifying and creating real options. This is again a key difference between real options and financial options: with real options, managers are creating the tool or using existing tools in highly creative ways; in the case of financial options financial executives usually pick their tools in the - sometimes highly exotic - kit of available instruments.

Implementation

The real options methodology is emerging as a potentially powerful tool for the executive. However, this potential will only be realized by decision makers who combine the "*real option state of mind*" with both a good grasp of technical skills and a good information system. The implementation of a real options approach could be very valuable but at the same time is a challenging task. The RO approach is relevant to a very large array of management and strategic decisions involving competition, uncertainty, flexibility and irreversibility. However, implementing a real options approach is not easy. Each application of the RO approach is likely to be context specific. The available options must be envisaged and described; the relevant information must be identified and collected carefully; the user of the RO approach must have the required knowledge and training to adapt the standard procedures to each particular situation. This being said, we think that with some training and some strategic support, TEC has the human resources necessary to start implementing the RO approach.

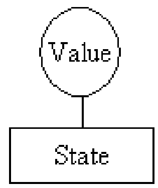
Finally, we believe that real options approach has high potential for value creation because the RO methodology is not only a valuation method but also a tool that provides a common language between finance and strategic planning. The approach underlines a frame of mind and uses methodologies that appeal to a wide array of managers, thus providing a common language. Real options have applications in many areas that are central to modern corporations: market coverage and development, finance, human resources management, technology management, R&D and knowledge management, etc. Thinking in terms of real options represents a major development in strategic but remains relatively unknown in spite of its adoption by firms such as Airbus, GE, Hewlett Packard, Intel, Toshiba and others.

13:6 - APPENDIX

6.1 - A Diagrammatic Representation of Real Options

To build the decision process diagram, we will use a method inspired by Leppard and Cannizzo (2002)[51]. Each diagram is constructed by combining the following building "blocs":

<u>Bloc 1</u>: value as a function of the system state:



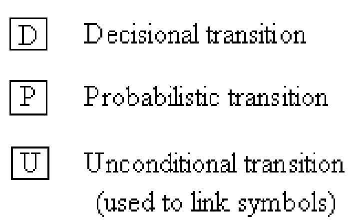
<u>Bloc 1</u>

This symbol represents the value of an asset as a function of the state variables. In this particular case, the state variables are CAPEX, monthly revenues per subscriber, the number of subscribers and obsolescence and value can be that of the expected cash flows for WV.

<u>Bloc 2</u>: Punctual cash-flows:

<u>Bloc 2</u>

<u>Bloc 3</u> : Decisional D, probabilistic P and unconditional U transition boxes:

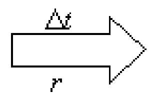


<u>Bloc 3</u>

[51] Leppard, Steve and Fabio Cannizo (2002), "Diagrammatic Approach to Real Options," in Ehud I. Ronn (ed.), Real Options and Energy Management: Using Options Methodology to Enhance Capital Budgeting Decisions, Risk Books, London.

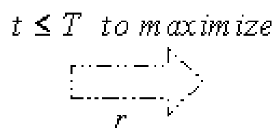
A probabilistic transition (P) indicates a movement in the stochastic state variable space and it is used to represent the stochastic nature of variables like revenues, CAPEX or obsolescence. For its part, a decisional transition (D) represents a movement in the decision space, for example the passage from the inactive to the investment state. Finally, an unconditional transition is used to link symbols.

<u>Bloc 4:</u> Passing of a known fixed period of time Δ t with discounting at a rate of r:



<u>Bloc 4</u>

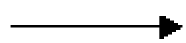
<u>Bloc 5</u>: Passing of a period of time that is currently unknown and chosen optimally (can be constrained by a length of time T) with discounting at a rate of r:



<u>Bloc 5</u>

This symbol can be used to denote the time before an "American" option is exercised.

<u>Bloc 6</u>: Result emanating from a transition:



<u>Bloc 6</u>

6.2 - Diagrammatic Representation for the Current Case

Diagram 1 (parts 1 and 2) positions TEC decision process in the system state and time spaces when all the options embedded in the project are European. In this context, a European option reflects the flexibility of realizing (or not) a subsequent step at a given date, optimal timing is not considered. For example, at t = 0 if TEC decides to expand the footprint, it buys the European option of deploying WV at τ_1.

For this model, the system state is characterized by the level of the state variables and by the "contractual" space. The "contractual" space depends on TEC current and past decisions, for example, an element of the "contractual" space can be

$$\{\text{expand footprint, deploy WV, abandon the option of deploying VAS}\}.$$

In part 1 of diagram 1, the first decisional transition (D_1) marks the passage from the inactive state to the abandon or footprint expansion state. If TEC decides to expand its footprint, I must be invested at t = 0 (indicated after U_1) and after the expansion is terminated (in τ_1 years), TEC must decide at D_2 whether or not to deploy WV. If TEC decides to deploy WV, it must invest $\psi_w \cdot$ K (τ_1) at t = τ_1 and this service will start generating revenues at t = $\tau_1 + \tau_2$ as indicated in part 2 of diagram 1 (above unconditional transition U_5).

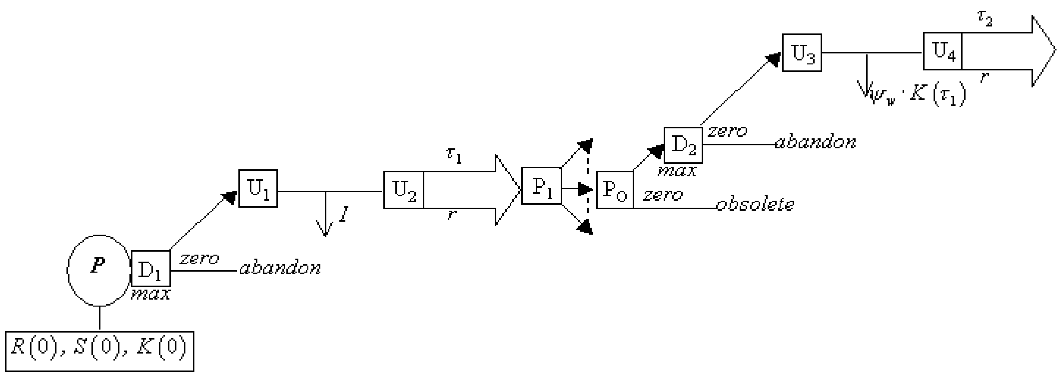


EXHIBIT 4. DIAGRAM 1 (PART 1): DECISION PROCESS WHEN PROJECT OPTIONS ARE OF THE EUROPEAN TYPE

For its part, the third decisional transition (D_3 in part 2 of diagram 1) indicates that after completing the footprint expansion and the WV deployment (at t = $\tau_1 + \tau_2$)), TEC must decide either to invest ψ_v • K ($\tau_1 + \tau_2$) to add the VAS or to abandon and only receive the revenues from WV. The VAS segment will start generating revenues at t = $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$.

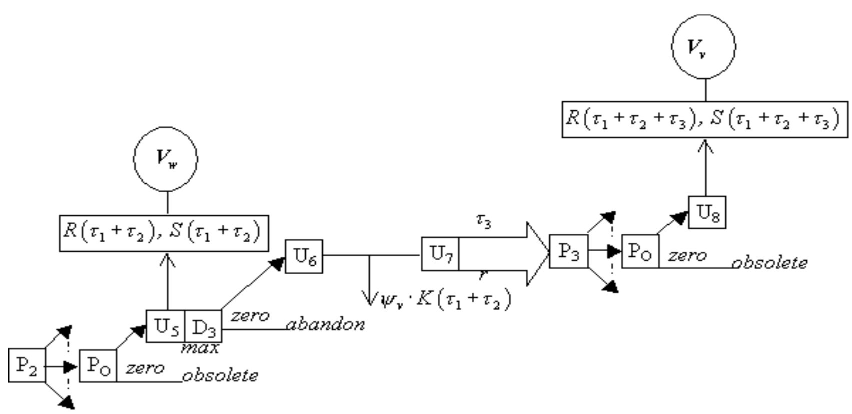


EXHIBIT 5. DIAGRAM 1 (PART 2): DECISION PROCESS WHEN PROJECT OPTIONS ARE OF THE EUROPEAN TYPE

Note that in each diagram, the probabilistic transitions P_0 denote the probability of obsolescence and P_1, P_2 and P_3 indicate that there is uncertainty in the per unit cost of capital, in revenues and in the number of subscribers. Note that if the technology becomes obsolete, subsequent investments will not be made and no other cash-flows will be realized. For example, if the technology becomes obsolete before the end of τ_1, WV and VAS will not be deployed and I will be lost.

The initial value P (R (0), S (0), K (0)) of the project (part 1 of diagram 1) stems from the European options to deploy WV and the VAS and the cost of acquiring these options is I (footprint expansion and development of the wireline video technology).

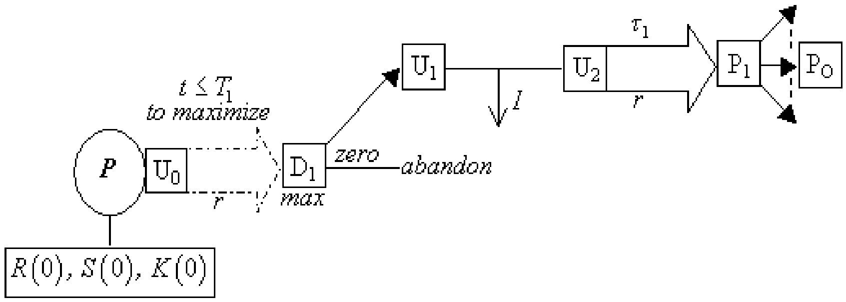


EXHIBIT 6. DIAGRAM 2: DECISION PROCESS WHEN THE OPTION TO EXPAND FOOTPRINT AND BACKFILL IS OF THE AMERICAN TYPE WITH OTHER OPTIONS EUROPEAN

In diagram 1, TEC had to decide at t = 0 whether or not to expand the footprint, that is, purchase the downstream options. However, it may be possible for TEC to delay the footprint expansion during some time period T_1 , this is illustrated in diagram 2 by a bloc 5 starting at U_0 . Here TEC has the option to delay the footprint expansion and this option is of the American type, that is, TEC can invest I at any time between t = 0 and t = T_1.

In diagram 3, we add to the American footprint expansion option an American feature to the option to deploy the VAS, this stems from U_5. Note that the time intervals Δ_1 and Δ_2 denote the optimally chosen waiting times (unknown at t = 0) for the footprint expansion and the VAS deployment, respectively.

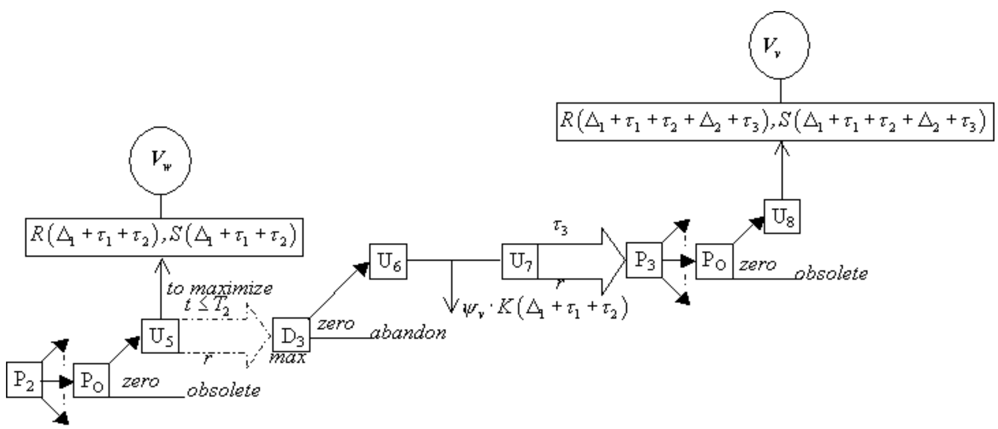


EXHIBIT 7. DIAGRAM 3: DECISION PROCESS WHEN THE OPTIONS TO EXPAND FOOTPRINT AND BACKFILL AND VAS DEPLOYMENT ARE OF THE AMERICAN TYPE WITH WIRE- LINE VIDEO DEPLOYMENT AS A EUROPEAN OPTION

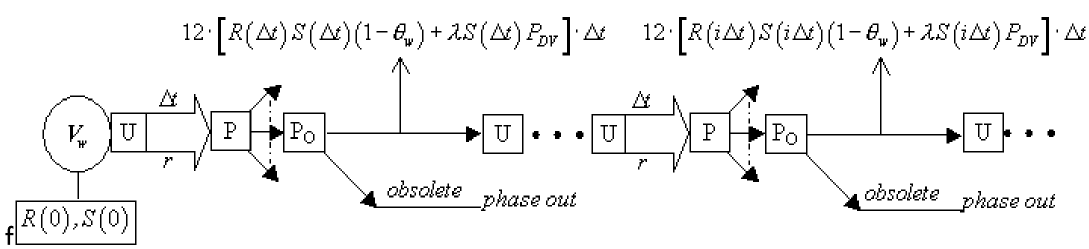


EXHIBIT 8. DIAGRAM 4: DIAGRAMMATIC REPRESENTATION OF THE VALUE OF THE VAS BUSINESS SEGMENT

Finally, diagram 4 illustrates the source of value for the WV business segment. At each time step Δ t TEC receives from the operation of WV the following incremental cash flows (revenues minus costs plus the type B and C subscriber effects):

$$12 * [R(i\Delta t)S(i\Delta t)(1-\theta_w) + \lambda S(i\Delta t)P_{DV}] * \Delta t$$

Here $i \in \{0,1,2 \ldots n-1, n \ldots\}$ is an integer multiple of the time increment Δt which is equal to a fraction of a year. There are two probabilistic transitions in diagram 4; the first P is to indicate that revenue ($R(i\Delta t)$) and the number of subscribers ($S(i\Delta t)$) are random variables and the second one P_0 is to indicate that there is a probability that the technology will become obsolete causing cash flows to phase out. The same type of diagram can be used to represent V_v.

Options Réelles dans le Pétrole & Gaz

CHAPTER 14

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Éric Gravel

14:1 - LA DÉCISION DE METTRE EN PRODUCTION UNE RÉSERVE PROUVÉE DE GAZ NATUREL

Une entreprise d'exploration et de production gazière vient de terminer un programme de forage. Une présence commercialement suffisante de gaz a été trouvée et l'entreprise veut appliquer une méthodologie options réelles pour analyser la décision de mettre le puits en production. L'évaluation options réelles est un processus qui comprend les quatre étapes suivantes :

1. la réalisation d'une description élaborée du projet;
2. l'identification et la caractérisation des différentes sources d'incertitude;
3. l'identification des sources de flexibilité, et;
4. la combinaison des éléments des étapes 2 et 3 pour évaluer la valeur du projet conditionnel à une gestion optimale de la flexibilité.

Dans ce qui suit, nous analysons la décision de mettre un puits de gaz naturel en production en appliquant les étapes du processus options réelles susmentionné. Notez que plusieurs éléments techniques (processus aléatoires, algorithme LSM, etc.) de ce cas sont discutés ailleurs dans cette monographie.

1.1 - Étape 1 : réalisation d'une description élaborée du projet

Tel que mentionné, l'entreprise a l'option de mettre en service (forage et installation de l'équipement nécessaire à l'extraction du gaz) un puits de gaz naturel à un coût de I dollars. De plus, il est possible d'attendre T années avant de prendre la décision d'effectuer l'investissement.

Une fois terminé, le puits permettra d'extraire à chaque instant t la quantité de gaz suivante (en termes annuels) :

(14.1)

$$q_t = q_0 e^{-\left(u_q\left(t-t_p\right)\right).1_{\{t>t_p\}}}$$

où

(14.2)
$$1_{\{t>t_p\}} = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ t \le t_p \\ 1 \ \ si \ \ t > t_p \end{cases}$$

Les expressions (14.1) et (14.2) signifient que le puits permet d'extraire un volume annuel de gaz de q_0 mcf (milliers de pieds cubes) pendant les t_p premières années de production (plateau de production) et que ce volume décline à un taux annuel de $\mu_q > 0$ par la suite.

Dans le cas présent, nous avons les valeurs suivantes pour les paramètres de l'équation (14.1) : $q_0 = 47{,}450\ mcf$, $t_p = 3$ et $\mu_q = 0.06$. Graphiquement, nous avons le profil de production suivant:

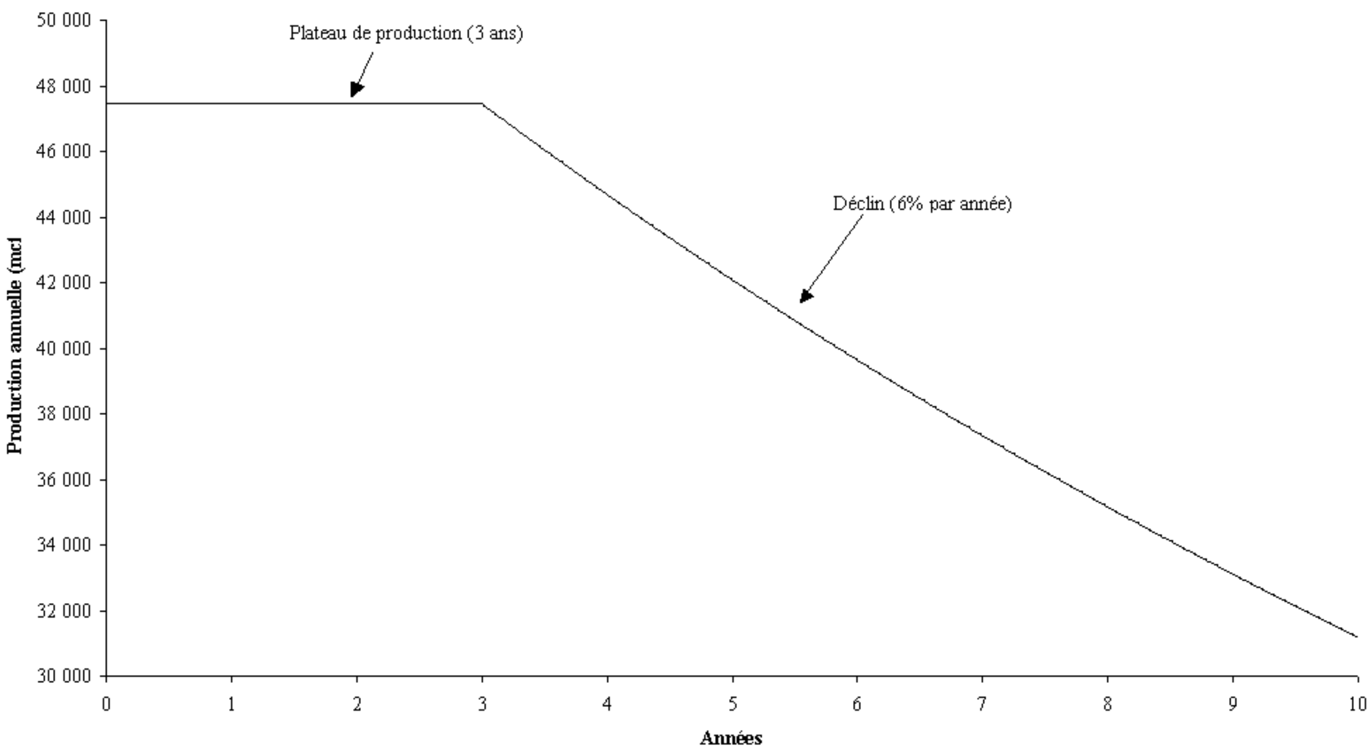


ILLUSTRATION DU PROFIL DE PRODUCTION

De plus, il coûte C dollars par jour pour traiter et livrer le gaz et des royautés de v doivent être payées au gouvernement pour chaque dollar de gaz vendu. Par conséquent, à l'instant t, la fonction de profit $\pi(t)$ en termes annuels se caractérise comme suit :

$$\pi(t) = P_t q_t (1 - v) - C \qquad (14.3)$$

où P_t est le prix à l'instant t. En résumé, l'entreprise a l'option sur une période de T années de mettre en production à un coût de I un puits de gaz naturel qui pourra produire q_t mcf de gaz à un coût de C et des royautés de v devront être prélevées sur chaque dollar de gaz vendu.

1.2 - Étape 2 : l'identification et la caractérisation des différentes sources d'incertitude

Pour simplifier, nous supposons que la seule source d'incertitude est le prix du gaz P_t qui suit un mouvement de retour à la moyenne (MRM). Tel que discuté, un MRM veut que le prix sur le marché, bien qu'aléatoire, soit continuellement attiré vers son prix d'équilibre à long terme, tendance qui peut s'expliquer comme suit : suite à un choc à la hausse du prix, les activités d'exploration s'intensifieront, des puits plus coûteux seront mis en service et il est fort probable que certains consommateurs choisiront un substitut énergétique moins coûteux. Par conséquent, l'augmentation de l'offre et la diminution de la demande devrait entraîner une pression à la baisse sur le prix qui aura tendance à revenir à son niveau d'équilibre de long terme. Des phénomènes inverses similaires se produiront lors d'un choc à la baisse du prix et ce, jusqu'à ce que le marché retrouve son équilibre de long terme.

Un processus MRM réplique le phénomène de convergence vers l'équilibre sans toutefois exclure des chocs à court terme (température, bris de pipeline, etc.) qui se produisent continuellement. Dans ce cas, le MRM choisi est :

(14.4)
$$dY_t = \eta(\alpha - Y_t)dt + \sigma dz_t$$

où $Y_t = \log P_t$, $dZ_t = \varepsilon_t\sqrt{dt}$ avec $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Tel que mentionné, le lien entre α et le prix moyen de long terme $\bar{P}$ est le suivant :

(14.5)

$$\alpha = ln\bar{P} - \frac{\sigma^2}{4\eta}$$

Pour sa part, le paramètre η caractérise la force du retour à la moyenne : plus η est petit, plus les écarts entre le prix actuel et le prix moyen sont persistants. Finalement, rappelons que la fonction de densité (log-normale) de $P_{t+\Delta t}$ s'écrit comme suit (conditionnelle à P_t) :

(14.6)

$$f(P_{t+\Delta t}|P_t) = \frac{1}{P_{t+\Delta t}b_{t+\Delta t}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{lnP_{t+\Delta t}-\alpha_{t+\Delta t}}{b_{t+\Delta t}}\right)^2}$$

où

(14.7)
$$\alpha_{t+\Delta t} = \alpha + (Y_t - \alpha)e^{-\eta\Delta t}$$

et

(14.8)

$$b_{t+\Delta t}^2 = \frac{\sigma^2\left(1 - e^{-2\eta\Delta t}\right)}{2\eta}$$

Pour simuler des trajectoires de prix, nous utilisons l'équation suivante :

(14.9)

$$P_t = exp\left\{Y_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \alpha\left(1 - e^{-\eta\Delta t}\right) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}.N(0,1)\right\}$$

où $N(0,1)$ est un tirage d'une distribution normale standard. Finalement, nous supposons dans cette section que le processus de prix est dans sa forme équivalent-certain et que le taux d'actualisation utilisé est le taux sans risque.

1.3 - Étape 3 : l'identification des sources de flexibilité

Pour ce projet, deux sources de flexibilité peuvent être identifiées. La première source de flexibilité est celle de pouvoir retarder la mise en service du puits, i.e. l'option d'attendre (timing) au maximum T années avant de prendre la décision d'investir ou non. En effet, à chaque instant où l'entreprise étudie la possibilité de mettre le puits en production, deux états sont possibles :

1. la VAN du projet de mise en production est nulle ou positive;
2. la VAN du projet de mise en production est négative.

Dans le premier cas, le critère de la VAN amène le décideur à débuter ou continuer le projet et dans le deuxième cas à l'abandonner car il est sans valeur. Cependant, s'il y a incertitude et si on a la possibilité de reporter temporairement l'investissement, la stratégie prescrite par la VAN peut être sous-optimale. Voyons pourquoi.

Même si la VAN est positive, il se peut qu'il soit optimal d'attendre avant d'investir afin d'éviter pendant un certain temps de se lancer dans une aventure qui présente des risques de revirements élevés. Tel que mentionné dans les chapitres précédents, la valeur de l'option d'attendre avant d'investir est positivement liée au niveau d'incertitude dans les prix et au degré d'irréversibilité des dépenses en capital. En effet, s'il est possible de récupérer la totalité des sommes investies (réversibilité parfaite de l'investissement), il n'est pas nécessaire d'attendre car le capital investi pourra être transféré sans coûts à des activités plus rentables si le projet s'avère négativement affecté par l'évolution de l'environnement.

Quand la VAN est initialement positive, le coût d'attendre est égal à la valeur des flux monétaires qui seraient autrement réalisés pendant la période d'attente. La méthodologie des options réelles permet de maximiser la valeur du projet en effectuant un arbitrage optimal entre le coût et le bénéfice d'attendre.

Dans le deuxième cas, la VAN est initialement négative mais l'option d'attendre peut quand même avoir une valeur car il est possible qu'un revirement favorable dans l'avenir incite le gestionnaire à investir dans le projet. Il est donc important de ne pas abandonner un projet avant son échéance simplement parce que la VAN est négative. La meilleure stratégie est de procéder à une évaluation options réelles du projet car la valeur (positive) des options qu'il comprend peut être supérieure à la valeur (négative) identifiée par la VAN. Mentionnons que si la fenêtre de report est limitée, la VAN redevient le critère optimal au moment où retarder l'investissement n'est plus possible.

Pour sa part, la deuxième source de flexibilité est celle de pouvoir interrompre temporairement la production si les revenus sont inférieurs aux coûts. Dans ce cas, en supposant que les coûts d'interrompre et de redémarrer la production sont négligeables, le gestionnaire produit seulement quand le revenu est supérieur aux coûts, la fonction de (14.3) devient donc :

$$\pi(t) = Max[P_t q_t (1 - v) - C, 0]. \tag{14.10}$$

1.4 - Étape 4 : la combinaison des éléments des étapes 2 et 3 pour évaluer la valeur du projet conditionnel à une gestion optimale de la flexibilité

Comme dans tous les exemples de ce type, il s'agit de procéder récursivement. La première étape consiste à évaluer la valeur d'un puits productif en considérant le fait que le gestionnaire a l'option de produire ou non à chaque instant t. Pour sa part, la deuxième étape est celle où l'on évalue la valeur de l'option de mettre le puits en production et où on détermine s'il est optimal d'investir maintenant ou attendre.

Au temps t, si on produit seulement quand les revenus sont supérieures aux coûts de production et si les coûts d'interrompre de redémarrer la production sont négligeables, la fonction de profits et termes «annuel» du puits s'écrit comme suit (en supposant que les décisions sont prises en temps continue) :

$$(14.11) \qquad \pi(t) = Max[P_t q_t(1-v) - C, 0]$$

Par conséquent, au temps $t = 0$ quand le prix est égal à P_0, la valeur espérée $V(P_0, t)$ de produire au temps t est égale à :

$$V(P_0,t) = e^{-rt}\int_0^{\infty} \frac{Max[P_t q_t(1-v) - C, 0]}{P_t b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{lnP_t-\alpha}{b}\right)^2} dP$$

$$= e^{-rt} \int_{\frac{C}{q_t(1-v)}}^{\infty} \frac{[P_t q_t(1-v) - C, 0]}{P_t b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{lnP_t-\alpha}{b}\right)^2} dP$$

(14.12)

Après avoir effectué quelques changements de variables, l'intégrale (12) devient :

(14.13)

$$V(P_0,t) = e^{-rt}[q_t(1-v)e^{\alpha+\frac{1}{2}b^2}\Phi(d_1) - C\Phi(d_2)]$$

où $\alpha = \alpha + (Y_0 - \alpha)e^{-\eta t}$, $\quad b^2 = \frac{\sigma^2(1-e^{-2\eta t})}{2\eta}$ $\quad$ avec $d_1 = \frac{b^2+\alpha-\ln\left(\frac{C}{q_t(1-v)}\right)}{b}$ $\quad$ et $\quad d_2 = d_1 - b$

L'expression (14.13) représente la valeur de l'option de produire au temps t conditionnel à P_0. L'expression ci-haut ressemble beaucoup à la formule de Black et Scholes utilisée pour évaluer la valeur d'une option de type «call Européen ». En effet, le prix d'exercice dans ce cas est le coût de production et la valeur du sous-jacent est le produit de la vente du gaz net des royautés.

L'hypothèse implicite derrière (14.13) est qu'il est impossible de stocker le gaz dans les périodes où vendre n'est pas optimal. Quoique simplificatrice et plus ou moins réaliste, l'hypothèse de non-stockage nous permet de simplifier la solution du problème ce qui permet quand même d'illustrer l'importance de considérer la flexibilité de produire ou non.

Pour sa part, la valeur espérée des flux monétaires provenant de l'exploitation du puits est donc égale à la somme de toutes les options de production ce qui s'écrit comme suit :

(14.14)

$$VP(P_0) = \int_0^{\infty} V(P_0,t)\, dt$$

L'intégrale (9) doit être calculée numériquement. Pour ce faire, décomposons (14.14) comme suit :

$$VP(P_0) = \underbrace{\int_0^{t_p} e^{-rt}\left[q_0(1-v)e^{\alpha(t)+\frac{1}{2}b(t)^2}\Phi\big(d_1(t)\big)\right]dt}_{1} + \underbrace{\int_{t_p}^{\infty} e^{-rt}\left[q(t)(1-v)e^{\alpha(t)+\frac{1}{2}b(t)^2}\Phi\big(d_1(t)\big)\right]dt}_{2}$$

$$\underbrace{-C\int_0^{\infty} e^{-rt}\Phi(d_2(t))dt}_{3}$$

(14.15)

Pour l'intégrale 1, effectuons le changement de variable $x = \frac{2t-t_p}{t_p}$ afin d'obtenir :

(14.16)

$$\frac{t_p}{2}\int_{-1}^{1} e^{-r\left(\frac{t_p(x+1)}{2}\right)}\left[q_0(1-v)e^{\alpha\left(\frac{t_p(x+1)}{2}\right)+\frac{1}{2}b\left(\frac{t_p(x+1)}{2}\right)^2}\Phi\left(d_1\left(\frac{t_p(x+1)}{2}\right)\right)\right]dx$$

nous permettant d'appliquer la méthode d'intégration numérique de *Gauss-Legendre*. Pour l'intégrale 2, effectuons les changements de variables $x = t - t_p$ et $z = rx$ pour obtenir :

(14.17)

$$\frac{e^{-rt_p}}{r}\int_0^{\infty} e^{-z}\left[q\left(\frac{z}{r}+t_p\right)(1-v)e^{\alpha\left(\frac{z}{r}+t_p\right)+\frac{1}{2}b\left(\frac{z}{r}+t_p\right)^2}\Phi\left(d_1\left(\frac{z}{r}+t_p\right)\right)\right]dz$$

nous permettant d'appliquer la méthode d'intégration numérique de *Gauss-Laguerre*. Finalement, pour l'intégrale 3, substituons $x = rt$ pour obtenir :

(14.18)

$$\frac{1}{r}\int_0^{\infty} e^{-x}\mathrm{C}\Phi\left(d_2\left(\frac{x}{r}\right)\right)dx$$

nous permettant d'appliquer encore une fois la méthode d'intégration numérique de *Gauss-Laguerre*.

Il arrive fréquemment que l'option de produire ou non et la volatilité ne soient pas considérées dans l'évaluation de la valeur actualisée des flux monétaires d'un projet autrement que par un ajustement du taux d'actualisation. En effet, un scénario moyen est souvent utilisé ce qui signifie qu'implicitement, la valeur est calculée en supposant qu'il y aura toujours production même quand le coût est supérieur aux revenus.

Dans le cas présent, au prix moyen, la valeur du puits en production VP_{option} en ignorant l'option d'interrompre la production peut s'écrire comme suit :

(14.19)

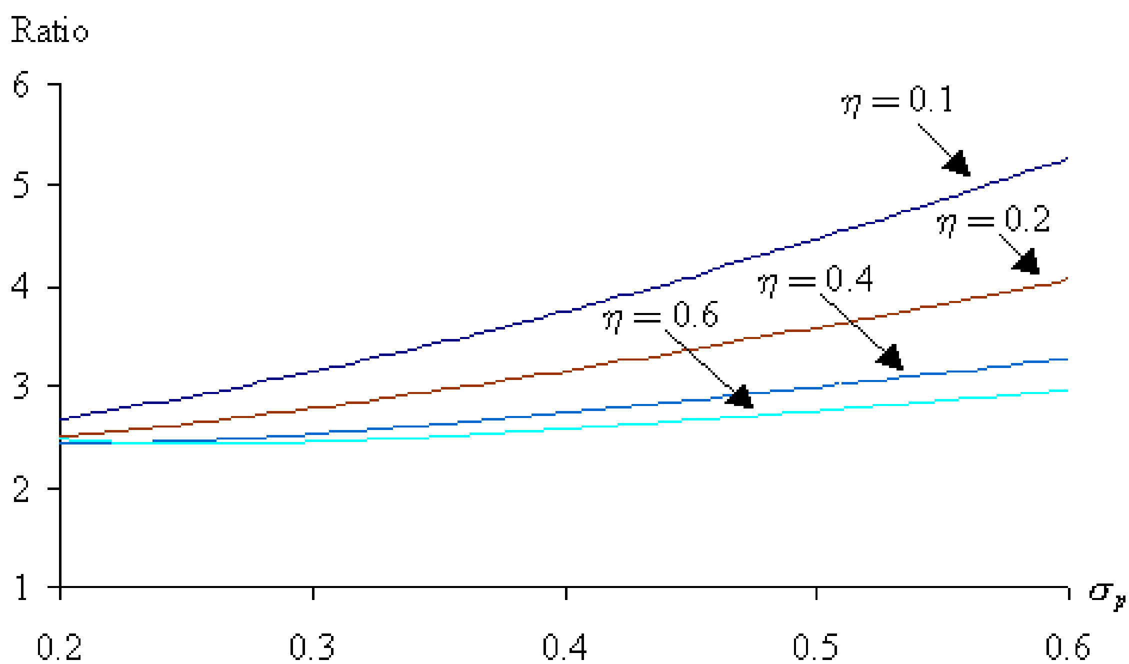
$$VP_{option} = \int_0^{\infty} [\bar{P}q_t(1-v) - \mathrm{C}]e^{-rt}dt$$

$$= \int_0^{t_p} \bar{P}q_0(1-v)e^{-rt}dt + \int_{t_p}^{\infty} \bar{P}q_0 e^{-u_p(t-t_p)}(1-v)e^{-rt}dt - C\int_0^{\infty} e^{-rt}dt$$

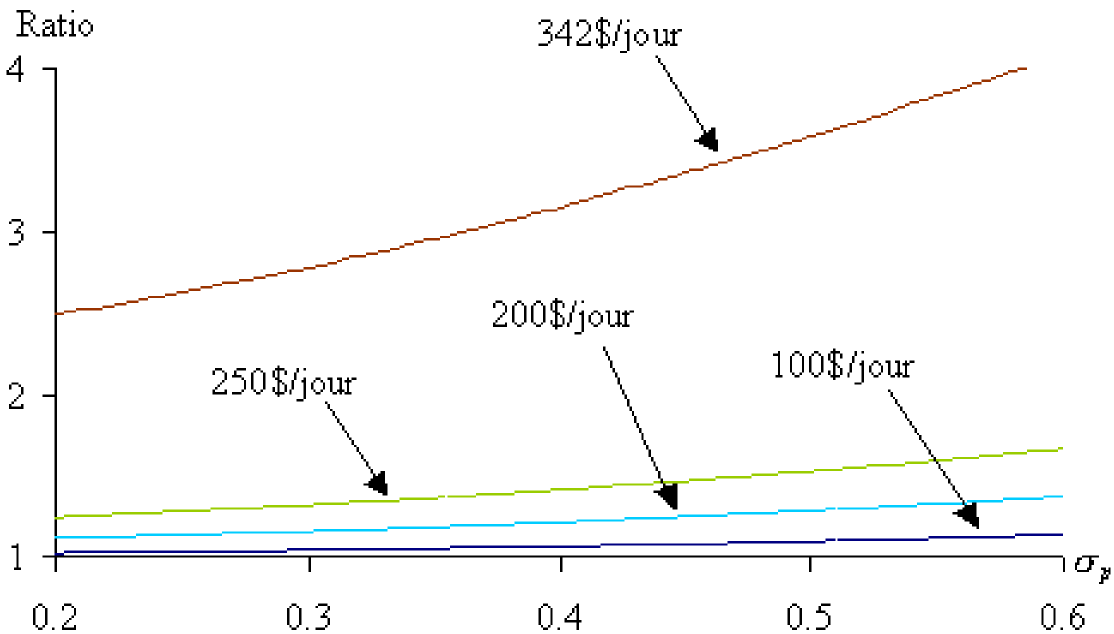
$$= \frac{\bar{P}q_0(1-v)}{r(u_q+r)}\left[u_q(1-e^{-rt_p}) + r\right] - \frac{C}{r}$$

Pour apprécier la valeur de l'option d'interrompre la production, comparons la valeur obtenue en considérant l'option de livrer ou non (A) caractérisée par l'expression (14) à la valeur des flux de revenus nets selon un scénario moyen (B) définie par l'équation (19). Les valeurs des paramètres utilisés sont : $r = 0.08$, $\nu = 0.10$, $\bar{P} = 5\$/mcf$, $P_0 = \bar{P}$ et $C \in \{100, 200, 250, 342\}$.

Le graphique 1 illustre le ratio A/B en fonction de la volatilité du prix du gaz pour différentes valeurs du paramètre de force de retour à la moyenne et $C = 342\$/jour$. Pour sa part, le graphique 2 illustre le même ratio en fonction de la volatilité pour différents coûts de production avec $\eta = 0.2$.



GRAPHIQUE 1. RATIO A/B EN FONCTION DU NIVEAU DE VOLATILITÉ DES PRIX, AVEC UN COÛT DE PRODUCTION DE 342\$/JOUR ET DIFFÉRENTES FORCES DE RETOUR À LA MOYENNE



GRAPHIQUE 2. RATIO A/B EN FONCTION DU NIVEAU DE VOLATILITÉ DES PRIX, AVEC UNE FORCE DE RETOUR À LA MOYENNE DE 0.2 ET DIFFÉRENTS COÛTS DE PRODUCTION

Dans tous les cas, la valeur en considérant l'option d'interrompre la production est supérieure à celle d'une production continue au prix moyen et cet écart s'accentue avec la volatilité du prix du gaz. En effet, une plus grande volatilité augmente, *ceteris paribus*, le potentiel de revenus sans toutefois accroître le niveau des pertes car le gestionnaire a l'option d'interrompre la production.

En examinant le graphique 1, on voit que l'écart s'amplifie quand on diminue la force du retour à la moyenne car les situations défavorables sont plus persistantes et la valeur d'arrêter la production dans ces situations est plus grande. Aussi, d'après le graphique 2, plus les coûts de production journaliers sont élevés plus l'écart est grand. En effet, avec des coûts plus élevés, le domaine où il n'est pas rentable de livrer ce qui accentue la valeur d'une gestion optimale.

Puisque le gestionnaire a la flexibilité de pouvoir retarder la mise en service du puits. La dernière étape après avoir déterminé la valeur de l'actif sous-jacent (valeur du puit productif en tenant compte de l'option d'interrompre la production/livraison du gaz) consiste à évaluer l'option de mise en service et de déterminer s'il est optimal d'investir à $t = 0$.

Pour calculer la valeur de cette option et pour déterminer la date d'investissement optimale, la méthode LSM sera utilisée. Au temps $t = 0$, la valeur de l'option d'investir est égale à :

$$F(P_0, T) = \max_{\tau \in [0,T]} \{e^{-r\tau} E_t[VP(P_\tau) - I]\} \quad (14.20)$$

où T est égal à la date d'échéance de l'option. Pour évaluer $F(P_0, t)$ il s'agit d'appliquer un algorithme décrit dans un autre chapitre en utilisant les valeurs suivantes pour l'expression donnée :

$$x_{w,1} = 1$$

$$x_{w,2} = e^{-\frac{P_{t_n}(w)}{2}}$$

$$x_{w,3} = e^{-\frac{P_{t_n}(w)}{2}}.(1 - P_{t_n}(w))$$

$$x_{w,4} = e^{-\frac{P_{t_n}(w)}{2}}.\left(1 - 2P_{t_n}(w) + \frac{P_{t_n}(w)^2}{2}\right)$$

et l'expression (14.9) du présent chapitre pour générer les trajectoires de prix.

Pour les valeurs de paramètres suivants : $r = 0.08$, $q_0 = 47{,}450\ mcf$, $t_p = 3$, $\mu_q = 0.06$, $\bar{P} = 5\$/mcf$, $\eta = 0.2$, $\sigma = 0.35$, $C = 200\$/jour$, $v = 0.1$, $T = 2\ années$, $I = 1{,}000{,}000\$$ et pour différents P_0, nous avons en supposant que la décision de mettre le puit en service est révisée hebdomadairement.

	VAN	VOR	Décision d'investissement optimale
$P_0 = 3\$/mcf$	-299,010$	30,144$	Attendre
$P_0 = 4\$/mcf$	-136,100$	70,921$	Attendre
$P_0 = 5\$/mcf$	12,922$	127,530$	Attendre
$P_0 = 6\$/mcf$	151,140$	195,670$	Attendre
$P_0 = 7\$/mcf$	281,100$	284,610$	Attendre
$P_0 = 8\$/mcf$	404,550$	402,360$	Investir

VAN VS. VALEUR OPTIONS RÉELLES (VOR) ET DÉCISION D'INVESTISSEMENT OPTIMALE EN FONCTION DE P_0

Quand la VAN est initialement plus grande que 0, le coût de retarder un investissement est la valeur des flux monétaires provenant d'une exploitation immédiate. Avec un MRM, le prix courant est toujours attiré vers son prix d'équilibre à long terme. Par conséquent, le coût de reporter les revenus à tendance à l'emporter sur le bénéfice d'attendre dans des conditions de marché meilleures ce qui explique la faible différence entre la VAN et la VOR une fois que la VAN est positive.

1.5 - Annexe 1 : Importance de la possibilité de stocker le gaz dans les périodes où il est optimal d'interrompre la production

Pour simplifier la solution au problème de mise en production optimale, nous avons supposé que le gestionnaire qui prenait la décision d'interrompre la production ne pouvait pas stocker le gaz. Dans la présente section, nous comparons la valeur d'un puit productif en supposant qu'il est impossible de stocker à celle où il est possible de stocker le gaz.

Pour ce faire, nous allons procéder par simulation Monte-Carlo où N est égal au nombre de trajectoires, T au nombre d'années de production et M au nombre de périodes par année. Nous supposons que la décision de produire où non se prend M fois par année et que pendant chaque intervalle $\Delta = 1/M$ le gaz est vendu (s'il est optimal de le vendre) au prix de début d'intervalle. Par conséquent, pour une trajectoire donnée nous avons $T \cdot M$ points de décision.

Dénotons, $P_{n,m\cdot\Delta}$ comme étant le prix du gaz sur la n-ième trajectoire à la période $m \cdot \Delta$ où m est un entier avec $m \in \{1, 2, \dots, T \cdot M\}$. Sur la n-ième trajectoire à la période $m \cdot \Delta$, il est optimal de produire si :

(A.1)

$$P_{n,m.\Delta} \cdot q_{n,m.\Delta} \cdot (1 - v) - C > 0$$

Dans ce cas, la valeur actualisée de la production est égale à :

(A.2)

$$VA_{prod} = \int_{m.\Delta}^{(m+1).\Delta} \left(P_{n,m.\Delta} \cdot q_{n,m.\Delta} \cdot (1 - v) - \mathrm{C}\right) e^{-rt} dt$$

$$= \frac{\left(P_{n,m.\Delta} \cdot q_{n,m.\Delta} \cdot (1 - v) - \mathrm{C}\right)}{r} . e^{-rm.\Delta}(1 - e^{-r\Delta})$$

Quand il y a production à la période $m \cdot \Delta$ et $\cdot \Delta > t_p$, nous avons :

(A.3)

$$q_{n,(m+1).\Delta} = q_{n,m.\Delta} e^{-u_q \Delta}$$

et si il n'y a pas production :

(A.4)

$$q_{n,(m+1).\Delta} = q_{n,m.\Delta}$$

De plus, quand $m \cdot \Delta < t_p$ et qu'il n'y a pas de production $t_p = t_p + \Delta$, i.e. le plateau est prolongé d'une période. Dans ce cadre, la valeur espérée d'un puit productif est égale à la moyenne de la valeur actualisée des flux monétaires sur chaque trajectoire.

Par exemple, pour les paramètres de l'exemple précédent avec un prix de départ égal à $P_0 = 4\$/mcf$, la valeur du puit sans possibilité de stockage est égale à 862,746$ comparativement à 897,029$ dans le cas avec stockage, une différence de 4%.

Maintenant, pour les mêmes paramètres sauf avec $C = 400\$/jour$, la valeur sans stockage est égale à 367,582$ contre une valeur de 473,252$ avec stockage, une différence de 29%. La plus importante différence dans le deuxième cas est attribuable à une plus grande région où il est optimal d'interrompre la production.