CIRANO
Centre interuniversitaire de recherche
en analyse des organisations

Série Scientifique
Scientific Series

97s-23

Contrat dynamique de partage de risque avec contraintes d'engagement et épargne

Karine Gobert, Michel Poitevin

Montréal
Mai 1997

CIRANO

Le CIRANO est une corporation privée à but non lucratif constituée en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du ministère de l'Industrie, du Commerce, de la Science et de la Technologie, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche. La *Série Scientifique* est la réalisation d'une des missions que s'est données le CIRANO, soit de développer l'analyse scientifique des organisations et des comportements stratégiques.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Québec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the Ministère de l'Industrie, du Commerce, de la Science et de la Technologie, and grants and research mandates obtained by its research teams. The Scientific Series *fulfils one of the missions of CIRANO: to develop the scientific analysis of organizations and strategic behaviour.*

Les organisations-partenaires / The Partner Organizations

- École des Hautes Études Commerciales
- École Polytechnique
- McGill University
- Université de Montréal
- Université du Québec à Montréal
- Université Laval
- MEQ
- MICST
- Avenor
- Banque Nationale du Canada
- Bell Québec
- Caisse de dépôt et placement du Québec
- Fédération des caisses populaires Desjardins de Montréal et de l'Ouest-du-Québec
- Hydro-Québec
- Raymond, Chabot, Martin, Paré
- Société d'électrolyse et de chimie Alcan Ltée
- Téléglobe Canada
- Ville de Montréal

ISSN 1198-8177

Contrat dynamique de partage de risque avec contraintes d'engagement et épargne*

Karine Gobert†, *Michel Poitevin*‡

Résumé / Abstract

Dans ce papier on regarde l'effet de la combinaison de différents moyens d'assurance sur l'efficacité du lissage de la consommation et les conséquences de l'engagement incomplet. Dans un contrat de partage de risque auto-exécutoire du type développé par Thomas et Worrall (1988), on introduit un compte d'épargne accessible à l'agent qui a de l'aversion pour le risque. L'accumulation d'épargne sert alors de collatéral et le lissage de la consommation est améliorée. De plus, l'utilisation judicieuse du compte d'épargne permet de relâcher les contraintes d'engagement de l'autre agent. Ces résultats dépendent du fait que le stock d'épargne est parfaitement observable et que les taux de préférence pour le présent sont égaux pour les deux agents, ce qui rend épargne et dette envers l'autre agent parfaitement substituables. Si on relâche ces hypothèses, le lissage de la consommation effectué par le contrat est moins efficace mais il reste meilleur que ce qu'on obtient sans épargne.

This paper studies the effect of combining different insurance schemes on the efficiency of consumption smoothing in an environment without commitment. A savings account is introduced into the self-enforcing risk-sharing model of Thomas and Worrall (1988). The risk averse agent's savings play the role of a collateral, thereby improving consumption smoothing. Furthermore, the optimal use of the savings account relaxes the other agent's self-enforcing constraints. These results depend on the fact that savings are perfectly observable and that the rate of time preference are the same for the two agents making savings and debt substitutable. If these assumptions are relaxed, consumption smoothing worsens but is still better that what is obtained without savings.

Mots Clés : Consommation, épargne, contrainte de crédit endogène

Keywords : Consumption, savings, endogenous liquidity constraint

JEL : C61, D11, D92, E21

---

* Adresse de correspondance : Michel Poitevin, CIRANO, 2020 rue University, 25e étage, Montréal, Qc, Canada H3A 2A5 Tél: (514) 985-4027 Tcp: (514) 985-4039 courrier-e: poitevim@cirano.umontreal.ca
Nous sommes reconnaissants de l'appui financier accordé par le C.R.S.H. et le CIRANO à ce projet.

† Université de Montréal, CRDE et CIRANO

‡ Université de Montréal, CRDE et CIRANO

1 Introduction

L'incomplétude des marchés explique pourquoi les individus, pourtant considérés comme ayant de l'aversion pour le risque, sont souvent imparfaitement assurés. Si les marchés sont complets, chacun peut trouver un portefeuille capable de garantir le lissage intertemporel de sa consommation étant donné l'environnement aléatoire auquel il est soumis. Or, les données aussi bien macro- que micro-économiques montrent que la consommation est très variable. L'hypothèse que les agents consomment à chaque période leur revenu permanent est d'ailleurs rejetée par les tests empiriques. Les agents sont incapables de s'assurer parfaitement contre des variations aléatoires de leur revenu.

Les contraintes de liquidité sont souvent avancées comme exemple de l'incomplétude des marchés. Ces contraintes restreignent l'accès au crédit des agents à qui il devient impossible de construire les portefeuilles de prêts et emprunts nécessaires pour assurer la consommation contre des chocs de revenu. Ces contraintes sont très réalistes ; le montant qu'un individu peut emprunter en pratique, par le biais des banques en particulier, est toujours limité, conditionnel à des dépots de garanties ou offert à un taux supérieur à celui auquel l'agent pourrait lui-même prêter. Les modèles de consommation avec agent représentatif ont largement utilisé les contraintes de liquidité pour expliquer l'échec de la théorie du revenu permanent. Garcia, Lusardi et Ng (1995) montrent par des tests empiriques sur des données micro-économiques que les contraintes de liquidité sont l'explication la plus convaincante de la sensibilité de la consommation au revenu courant. Deaton (1991) a simulé des trajectoires de consommation et d'épargne assez proches des données agrégées à partir d'un modèle de consommation et d'épargne avec contrainte de liquidité.

Un autre aspect de l'incomplétude des marchés émerge dans la théorie des contrats. On trouve que l'imperfection des marchés empêche les contrats d'atteindre leur solution de premier rang. Dans ce cas, les imperfections proviennent souvent de l'asymétrie d'information. Les problèmes d'aléa moral ou d'anti-sélection contraignent les échanges bilatéraux, comme les partages de risque, à s'établir à des niveaux inefficaces. Les problèmes d'information sont d'ailleurs aussi soulevés pour expliquer le rejet empirique de la théorie du revenu permanent (Pischke, 1995).

L'impossibilité d'engager les parties est une autre source d'imperfection des contrats. Celle-ci provient de l'incapacité du législateur d'étendre son contrôle à tous les aspects de la vie économique. Beaucoup de contrats ne peuvent pas être exécutés par les cours, que ce soit parce que les frais de justice sont trop élevés ou parce qu'aucun juge n'a la compétence nécessaire pour vérifier la réalisation des contingences stipulées dans les contrats. L'effet des problèmes d'engagement sur la performance du partage de risque est déjà bien connu. Thomas et Worrall (1988) ont développé un contrat de partage de risque avec contraintes d'engagement dans le cadre du marché du travail. Ils montrent que le lissage de la consommation est rendu imparfait par l'absence d'engagement si le taux d'escompte est suffisamment loin de 1. Dans toutes les périodes, la consommation de l'agent riscophobe est soumise à une borne supérieure et à une borne inférieure dépendantes de la réalisation des chocs exogènes. Ces bornes sont directement reliées au défaut d'engagement et limitent les possibilités de lissage intertemporel. Gauthier, Poitevin et González (1996) étudient un modèle de contrat auto-exécutoire où les parties peuvent effectuer un paiement ex-ante, c'est-à-dire effectuer des transferts en début de période, avant la réalisation de l'état de la nature. Ces paiements permettent de relâcher considérablement les contraintes auto-exécutoires et d'améliorer la performance du lissage de la consommation.

Le modèle développé ici part de l'idée que les agents cherchent à lisser au mieux leur consommation. Il semble que même si l'incomplétude des marchés touche toutes les formes d'assurance auxquelles peut avoir accès un consommateur, la combinaison des différents moyens de lissage peut permettre d'en réduire l'effet. Il ne devrait donc pas se limiter à une seule forme d'assurance. Or les modèles d'épargne avec contrainte de liquidité ignorent la possibilité pour les individus de recourir au partage de risque en empruntant et les modèles de contrats ne permettent pas aux agents d'épargner. Il est pourtant réaliste de supposer qu'un agent engagé dans un contrat de partage de risque imparfait n'est pas empêché de compléter son assurance, en dehors du contrat, par un compte d'épargne. La question est de savoir si l'interaction de ces deux modes de répartition intertemporelle de la consommation améliore réellement cette répartition. Dans cette étude, on introduit l'épargne comme opportunité externe de l'une des parties d'un contrat auto-exécutoire et l'on observe que cela contribue à relâcher les contraintes auto-exécutoires, du moins pour l'un des agents.

Marcet et Marimon (1992) ont déjà introduit une possibilité d'accumulation dans un contrat auto-exécutoire et ont trouvé que le rôle du contrat s'en trouvait diminué. C'est-à-dire que les transferts entre les deux agents à l'optimum sont minimes. Cependant ils ont considéré un modèle de croissance où l'agent riscophobe accumule du capital par une technologie d'investissement risquée. Ce capital entre ensuite comme input dans une fonction de production qui génère le bien consommé ou investi. Dans leur modèle l'agent neutre au risque est complètement engagé et l'accumulation d'épargne n'a pas un rôle de lissage mais un rôle de croissance. Leur modèle souligne donc plutôt l'effet du problème d'engagement de l'agent riscophobe sur les possibilités de croissance. Dans ce travail, on s'intéresse surtout aux conséquences des possibilités externes d'accumulation sur les effets de l'engagement incomplet. En d'autres termes, l'introduction de l'épargne relâche-t-elle les contraintes d'engagement ?

Le contrat de partage de risque évoqué ici, est un contrat de financement. Il décrit les transferts nécessaires pour qu'un individu puisse répartir sa consommation sur son horizon de vie indépendamment des chocs exogènes de revenu qu'il peut subir. Les deux agents dont on parle ici peuvent être vus comme une banque et un entrepreneur. L'entrepreneur soumis aux aléas de la production et des marchés doit recourir au financement d'une banque pour lisser les entrées d'argent dans sa compagnie. Le contrat représente la relation de long terme dans laquelle s'installent la banque et l'entrepreneur. La banque est censée refinancer l'entrepreneur chaque fois qu'il connaît des chocs négatifs de recette. Elle n'est cependant pas tenue de la faire : elle peut décider à n'importe quel moment de cesser de refinancer l'entreprise. L'entrepreneur peut accumuler des réserves financières. Il peut également déclarer faillite et refuser de payer ses dettes à la banque. Les contraintes d'engagement sont donc partie intégrante de leur relation.

Le contrat avec opportunités externes d'épargne peut aussi s'interprêter dans d'autres contextes comme le marché du travail où l'employeur accumule une partie des paiements dûs aux travailleurs dans des fonds de pension. Le compte d'épargne représente alors le fonds de pension accumulé par le travailleur. Les contrats de dette internationaux sont l'exemple où le problème d'engagement est le plus évident. Les placements financiers (l'épargne) des pays emprunteurs sur les marchés internationaux devraient avoir un effet sur les possibilités des contrats et les incitations à les briser.

Dans la section suivante, on décrit le modèle et dans celle qui suit, on dérive les propriétés qui le caractérisent. La dernière section discute les résultats.

2 Le modèle

Nous considérons un environnement où un agent (l'agent 1) est soumis à un revenu exogène aléatoire. Il existe un ensemble discret d'états de la nature $\mathcal{S} = \{1, \ldots, S\}$ invariant dans le temps. Ces états de la nature sont identiquement et indépendamment distribués et à chacun d'eux correspond une réalisation du revenu aléatoire y^s. On note p^s la probabilité de l'état s, $\sum_{s\in\mathcal{S}} p^s = 1$. On suppose $y^1 < \ldots < y^S$. L'agent 1 est riscophobe et ses préférences sur sa consommation sont représentées par une fonction d'utilité u identique à chaque période. La fonction est définie sur $[0,\gamma]$ et bornée pour ces valeurs. Elle est continue, strictement croissante, strictement concave et continûment différentiable telle que $u' > 0$, $u'' < 0$ et $u'(0) = \infty$.

L'agent 1 possède par ailleurs un compte d'épargne sur lequel il peut faire des dépôts à chaque période. Notons A_t son stock d'épargne en fin de période $t-1$. Cette épargne génère des intérêts au taux r par période. L'agent 1 peut utiliser son compte d'épargne pour lisser sa consommation dans le temps. Cependant, il est soumis à une contrainte de liquidité et ne peut en aucun cas emprunter au taux r.

L'agent 1 peut toutefois emprunter par le biais d'un autre agent, l'agent 2. L'agent 2 est neutre vis-à-vis du risque, doté d'une fonction d'utilité linéaire $v(b) = b$. Il reçoit une dotation e par période. Nous supposerons $e = 0$ sans perte de généralité. Il existe des gains à l'échange entre les deux individus parce que l'agent 1 est prêt à effectuer des paiements à l'agent 2 pour voir la variabilité de sa consommation diminuer tandis que l'agent 2 peut supporter une partie du risque subi par l'agent 1 sans voir son utilité décroître. Les deux agents ont un horizon de vie infini.

Les deux agents signent à la date $t = 0$ un contrat de partage de risque qui stipule des transferts b_t^s de l'agent 1 vers l'agent 2 pour toutes les dates $t = 1, \ldots, \infty$, en fonction de toutes les réalisations possibles de l'état de la nature s à ces dates. Le transfert b_t^s peut être positif ou négatif. Les deux agents ont le même taux de préférence pour le présent : δ. Nous supposons ici que $r = \delta$. Le facteur d'escompte est $\beta = \frac{1}{1+\delta}$.

Notons $h_t = (s_0, \ldots, s_t)$ l'histoire des réalisations des états de la nature jusqu'en t et H_t l'ensemble des histoires possibles en t. Soit π un plan de consommation. π est un ensemble de fonctions $\pi_t : H_t \to R^2$ telles que $\pi_t(h_{t-1}, s_t) = (A_{t+1}^{\pi s_t}, b_t^{\pi s_t})$. Le plan π donne à chaque période un niveau d'épargne et un niveau de transfert en fonction de l'état de la nature réalisé dans la période et de l'histoire passée. Notons $\mathcal{U}_t(\pi, h_t)$ et $\mathcal{V}_t(\pi, h_t)$ les sommes espérées des utilités futures escomptées des agents 1 et 2 respectivement, à la période t sous le plan π. Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_t(\pi, h_t) &= u(c_t^{\pi s_t}) + \mathrm{E}_t \textstyle\sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^\tau u(c_{t+\tau}^{\pi s_{t+\tau}}),\\ \mathcal{V}_t(\pi, h_t) &= b_t^{\pi s_t} + \mathrm{E}_t \textstyle\sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^\tau b_{t+\tau}^{\pi s_{t+\tau}}.\end{aligned}$$

Ici, E_t est l'opérateur d'espérance selon l'information disponible en période t, h_t. Et la consommation est déterminée par $c_t^{\pi s_t} = y^{s_t} + (1 + r)A_t^{\pi s_{t-1}} - A_{t+1}^{\pi s_t} - b_t^{\pi s_t}$.

L'existence du compte d'épargne va entrer en compte dans les possibilités de partage de risque offertes par le contrat. Afin de bien comprendre comment les comportements de consommation avec épargne peuvent jouer sur les réalisations du contrat, on commence par rappeler les principaux résultats du modèle d'épargne simple avec contrainte de liquidité. Ceux-ci ont été étudiés entre autres par Schechtman (1976) et Escudero et Schechtman (1977).

2.1 Le modèle d'épargne avec contrainte de liquidité

L'agent 1 bénéficie toujours de son revenu aléatoire iid et fait des choix d'épargne de façon à maximiser son utilité sur tout l'horizon. En début de période t il possède un montant d'épargne $(1+r)A_t$ et reçoit une dotation y^s ; il répartit ce revenu disponible entre sa consommation c_t^s et son épargne pour la période suivante A_{t+1}^s. Il doit donc toujours respecter l'équation budgétaire suivante : $c_t^s + A_{t+1}^s = y^s + (1+r)A_t \ \forall\ t = 1, 2, \ldots$.

La contrainte de liquidité à laquelle est soumis l'agent est une contrainte de crédit. Elle signifie que l'agent peut désépargner pour soutenir sa consommation mais seulement dans la limite de l'actif qu'il possède sur son compte. Il ne peut pas emprunter au taux où il épargne, c'est-à-dire qu'il ne peut pas atteindre un stock d'épargne négatif. La contraindre s'écrit donc : $A_{t+1}^s \geq 0,\ \forall\ s_t \in S,\ t = 0, 1, \ldots$.

Ce problème est un problème d'optimisation dynamique standard. On peut trouver les séquences optimales $\{c_t^{s_t}\}_{t=0}^{\infty}$ et $\{A_{t+1}^{s_t}\}_{t=0}^{\infty}$, $\forall\ s_t \in S$ en résolvant l'équation fonctionnelle suivante selon le principe de Bellman :

$$g(A_t, y^s) = \max_{A_{t+1}^s \in \Gamma(A_t, s)} \ u(y^s + (1+r)A_t - A_{t+1}^s) + \beta \mathrm{E}_z g(A_{t+1}^s, y^z) \tag{1}$$

où , $(A_t, s) = \{A_{t+1}^s \ / \ A_{t+1}^s = y^s + (1+r)A_t - c_t^s \geq 0\} \ \ \forall\, s \in S$.
La fonction de valeur $g(A_t, y^s)$ donne la valeur optimale de l'utilité future espérée de l'agent 1 en début de période t quand l'état s s'est réalisé. Sous nos hypothèses, $g(., y^s)$ est continue, strictement croissante, strictement concave et continûment différentiable. De plus, l'ensemble $\{A_{t+1}^{s*} \ / \ g(A_t, y^s) = u(y_t^s + (1+r)A_t - A_{t+1}^{s*}) + \beta \mathrm{E}_z g(A_{t+1}^{s*}, y^z),\ \forall\ A_t \in R^+, \forall\, s \in S\}$ est décrit par une fonction continue : $a(A_t, s) = A_{t+1}^{s*}$ et donc $c(A_t, s) = c_t^{s*} = y_t^s - A_{t+1}^{s*} + (1+r)A_t$.

Notons μ_t^s le multiplicateur de la contrainte $A_{t+1}^s \geq 0$, exprimée dans , (A_t, s). Les condition de premier ordre et condition enveloppe donnent l'ensemble de conditions suivant pour l'optimum au temps t :

$$\begin{array}{ll} u'(c_t^s) = \beta \mathrm{E}_z g_A(A_{t+1}^s, y^z) + \mu_t^s & \forall\ s \in S \\ g_A(A_t, y^s) = (1+r)\ u'(c_t^s) & \forall\ s \in S \\ u'(c_t^s) = \beta(1+r)\mathrm{E}_z u'(c_{t+1}^z) + \mu_t^s & \forall\ s \in S \end{array}$$

où g_A dénote la dérivée de g par rapport à son premier argument. La dernière de ces conditions est la condition d'Euler. Elle détermine le lissage optimal de la consommation sous la contrainte de liquidité prise en compte par μ_t^s. À partir de ces conditions, on peut établir les résultats suivants :

- L'individu épargne et consomme plus dans les états où son revenu est plus élevé. La fonction de valeur est partout plus élevée dans les meilleurs états de la nature. C'est-à-dire, pour tout $A_t \geq 0$ et tous les états s et z tels que $y^s > y^z$, on a :
  $\begin{cases} & a(A_t, s) > a(A_t, z) \\ \text{ou bien} & a(A_t, s) = a(A_t, z) = 0 \end{cases}$
  $c(A_t, s) > c(A_t, z)$
  $g(A_t, y^s) > g(A_t, y^z)$
  $g_A(A_t, y^s) < g_A(A_t, y^z)$

- L'individu épargne dans les bons états de la nature et désépargne dans les mauvais. C'est-à-dire :
  $$\begin{array}{ll} a(A_t, S) > A_t & \forall\ A_t \geq 0 \\ a(A_t, 1) < A_t & \text{si } A_t > 0 \\ a(A_t, 1) = A_t & \text{si } A_t = 0 \end{array}$$
  et il existe un état $\bar{s}$ tel que pour $s < \bar{s}$, $a(A_t, s) < A_t$ (sauf si $a(A_t, s) = A_t = 0$) et pour $s > \bar{s}$, $a(A_t, s) > A_t$.

- $a(A_t, s)$ et $c(A_t, s)$ sont des fonctions croissantes de A_t.

- Enfin, Schechtman (1976) a mis en évidence que dans le cas où le taux d'intérêt sur l'épargne est égal au taux de préférence pour le présent, le lissage optimal de la consommation demande que le stock d'épargne tende presque sûrement vers l'infini dans le temps. Lorsque le taux d'intérêt est plus faible que le taux de préférence pour le présent, l'épargne devient coûteuse pour l'agent et ce résultat ne se retrouve pas.

La consommation n'est jamais parfaitement lissée par l'épargne, elle est toujours supérieure dans les périodes où le bon état se réalise. Il reste donc pour l'agent 1 des gains à l'échange avec l'agent 2 à travers un contrat de partage de risque.

2.2 Le contrat

Le contrat va établir un partage des gains à l'échange entre les deux agents. Nous nous attachons au cas où aucun des agents ne peut se commettre à respecter le contrat. Chacun peut à tout moment le briser si le paiement qu'il a à faire n'est pas compensé par une utilité future suffisante. Le problème doit donc incorporer des contraintes auto-exécutoires qui garantissent qu'à chaque période, quel que soit l'état de la nature, les agents ont une espérance d'utilité future plus grande s'ils restent dans le contrat que s'ils en sortent. On suppose que si l'une des parties brise le contrat, elle est condamnée à l'autarcie pour tout le reste de l'horizon. L'expression des contraintes auto-exécutoires va donc dépendre des conditions d'autarcie. Pour l'agent 2, l'autarcie représente une utilité nulle à chaque période. En autarcie, l'agent 1 touche encore son revenu aléatoire et peut continuer à assurer un certain lissage de sa consommation en dehors du contrat en choisissant des niveaux optimaux d'épargne à chaque période. Dans ce cas, les conditions d'autarcie sont pour lui les conditions du modèle d'épargne avec contrainte de liquidité. La fonction de valeur $g(A_t, y^s)$ donne l'espérance des utilités futures escomptées que l'agent 1 peut s'assurer optimalement en sortant du contrat en période t avec le stock d'épargne A_t, avant de faire le paiement b_t^s mais après la réalisation de l'état de la nature s. La contrainte auto-exécutoire de l'agent 1 doit donc imposer que son utilité intertemporelle dans le contrat, à chaque période et quel que soit l'état de la nature s réalisé, soit toujours au moins égale à $g(A_t, y^s)$. On rajoute une hypothèse sur la punition pour bris de contrat.

Hypothèse: la punition pour bris de contrat de la part de l'agent 1 comprend la saisie de ses actifs.

S'il ne respecte pas le contrat, l'agent 1 entre donc en autarcie avec un stock d'épargne nul. Quant à l'agent 2, il a intérêt à rester dans le contrat tant que celui-ci lui donne une utilité intertemporelle positive. Sous ces conditions, les contraintes auto-exécutoires s'écrivent alors :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{U}_t(\pi, (h_{t-1}, s_t)) \geq g(0, y^{s_t}) & \forall\, t,\ \forall\, (h_{t-1}, s_t) \in H_t \\ \mathcal{V}_t(\pi, (h_{t-1}, s_t)) \geq 0 & \forall\, t,\ \forall\, (h_{t-1}, s_t) \in H_t \end{array}$$

Un contrat efficace doit être tel qu'on n'en trouve pas un autre qui donne au moins autant d'espérance d'utilité aux deux individus et strictement plus à l'un. On résout donc un problème parétien en $t = 0$ qui définit un plan π, c'est-à-dire une suite $\{A_{t+1}^{\pi s_t}, b_t^{\pi s_t}\}_{t=0,1,\ldots}$ de stocks d'épargne et de transferts pour chaque date t et chaque histoire h_t possible des réalisations des états. S'il est efficace en $t = 0$, le contrat doit être efficace à chaque période, après toutes les histoires possibles de la relation. En effet, si le contrat n'est pas efficace en t, alors on peut faire varier les transferts en t et $t+1$ de façon à augmenter l'utilité de l'agent 2, neutre vis-à-vis du risque, sans faire varier celle de l'autre. Ces variations respectent les contraintes auto-exécutoires puisqu'elles augmentent l'utilité que l'agent 2 retire du contrat, réduisant ainsi ses incitations à le briser. Ceci fait varier les espérances d'utilité en $t=0$ de la même façon et c'est que le contrat initial n'était pas efficace en $t=0$. Le problème est donc parétien à chaque période. Un contrat efficace est alors obtenu en maximisant à chaque date t l'utilité intertemporelle d'un agent sous la contrainte que l'utilité intertemporelle de l'autre à partir de la date t soit au moins égale à une certaine borne et sous les contraintes auto-exécutoires et la contrainte de liquidité de l'agent 1. On peut donc écrire le problème pour chaque date t :

$$
\begin{array}{lll}
\max_{\pi^t} & \mathcal{U}_t(\pi^t, h_t) & \\
\text{s/c} & \mathcal{V}_t(\pi^t, h_t) \geq V_t^{s_t} & (2) \\
 & \mathcal{U}_\tau(\pi^t, h_\tau) \geq g(0, y^{s_\tau}) \quad \forall\, h_\tau,\ \forall\, \tau \geq t & (3) \\
 & \mathcal{V}_\tau(\pi^t, h_\tau) \geq 0 \quad \forall\, h_\tau,\ \forall\, \tau \geq t & (4) \\
 & c_\tau^{\pi^t s_\tau} = y^{s_\tau} + (1+r) A_\tau^{\pi^t} - A_{\tau+1}^{\pi^t s_\tau} - b_\tau^{\pi^t s_\tau} \ \forall\, h_\tau,\ \forall\, \tau \geq t & (5) \\
 & A_{\tau+1}^{\pi^t s_\tau} \geq 0 \quad \forall\, h_\tau,\ \forall\, \tau \geq t & (6)
\end{array}
$$

où π^t est la continuation du plan π après l'histoire h_t. $V_t^{s_t}$ est le surplus futur minimum accordé à l'agent 2 quand s_t se réalise en t. À la période t, il doit être concrétisé par un transfert $b_t^{s_t}$ et une espérance de surplus futur V_{t+1}. On note que $V_t^{s_t}$ est toujours limité par les gains à l'échange possibles. Dans une période et après une histoire particulière h_t, $V_t^{s_t}$ ne peut pas être plus grand que le total du surplus généré par le contrat sur tout l'horizon.

Appelons , $(A_t, V_t^{s_t}, s_t)$ la correspondance qui donne pour s_t réalisé en t, les variables $A_{t+1}^{s_t}$ et $\{V_{t+1}^{s_{t+1}}\}_{s_{t+1} \in \mathcal{S}}$ issues de la continuation π^t qui vérifie les contraintes (2), (3), (4), (5) et (6) en t. La correspondance , $(A_t, V_t^{s_t}, s_t)$ est à valeurs non vides parce qu'un contrat qui pose $b_t^s = 0$ pour tout t et pour tout s vérifie les contraintes pour $V_t^{s_t} = 0$. Si $V_t^{s_t} > 0$ alors $V_t^{s_t}$ est limité par le total des gains à l'échange possibles en t et on note $\bar{V}_t$ ce maximum. Mais s'il existe des gains à l'échange, alors il existe une suite de transferts $\{b_\tau\}_{\tau=t,\cdots\infty}$ qui peut donner tous les gains $(\bar{V}_t)$ à l'agent 2 et accorder à l'agent 1 exactement ce qu'il aurait en autarcie. Alors pour toute valeur $V_t^{s_t}$ inférieure à $\bar{V}_t$ les contraintes peuvent être respectées avec cette suite de transferts. La correspondance , $(A_t, V_t^{s_t}, s_t)$ est aussi continue et à valeurs compactes. Alors on sait qu'il existe une fonction de valeur unique qui donne le maximum de $\mathcal{U}_t(\pi^t, h_t)$ à chaque période en fonction de A_t, V_t, de l'état s_t réalisé en t et des contraintes. Cette fonction de valeur que nous noterons $f^{s_t}(A_t, V_t)$ est à la fois une frontière de Pareto qui nous donne la valeur maximale de $\mathcal{U}_t$ étant donné une valeur minimale V_t de $\mathcal{V}_t$ et l'état de la nature réalisé dans la période et une fonction de valeur standard qui permet de choisir les stocks A_{t+1} et V_{t+1} qui maximisent l'utilité intertemporelle de 1 étant donné le stock d'épargne accumulé A_t et l'utilité promise à l'agent 2 pour la période t, V_t. On remarque que, dans le programme ci-dessus, les contraintes auto-exécutoires pour $\tau = t$ sont automatiquement vérifiées, on peut donc se contenter d'écrire les contraintes pour $\tau > t$. Alors la solution au problème s'écrit en terme de l'équation de Bellman suivante :

$$f^{s_t}(A_t^{s_{t-1}}, V_t^{s_t}) = \max_{A_{t+1}^{s_t}, b_t^{s_t}, \{V_{t+1}^{s_{t+1}}\}_{s_{t+1}=1}^{S}} u(y^{s_t} + (1+r)A_t^{s_{t-1}} - A_{t+1}^{s_t} - b_t^{s_t}) + \beta \mathrm{E}_{s_{t+1}} f^{s_{t+1}}(A_{t+1}^{s_t}, V_{t+1}^{s_{t+1}})$$

sous les contraintes :

$$f^{s_{t+1}}(A_{t+1}^{s_t}, V_{t+1}^{s_{t+1}}) \geq g(0, y^{s_{t+1}}) \quad \forall\, s_{t+1} \in \mathcal{S} \tag{7}$$

$$V_{t+1}^{s_{t+1}} \geq 0 \quad \forall\, s_{t+1} \in \mathcal{S} \tag{8}$$

$$b_t^{s_t} + \beta \mathrm{E}_{s_{t+1}} V_{t+1}^{s_{t+1}} \geq V_t^{s_t} \tag{9}$$

$$A_{t+1}^{s_t} \geq 0 \tag{10}$$

Les notations tiennent compte du fait que le stock d'épargne A_t disponible en t est une variable de décision de la période $t-1$ qui dépend de l'état de la nature s_{t-1}. À la période $t-1$, on a aussi décidé de la valeur que prendrait V_t dans chaque état réalisable en t. La valeur de V_t prise en compte ainsi que la fonction f considérée, dépendent de l'état de la nature réalisé en t : s_t. Cette séquence des décisions est entraînée par la fonction d'utilité qui incorpore $A_{t+1}^{s_t}$ comme argument dans l'état s_t. À la période t, une solution du contrat donne $A_{t+1}^{s_t}$ et $b_t^{s_t}$ ainsi que l'ensemble des valeurs $\{V_{t+1}^s\}_{s \in \mathcal{S}}$ optimales pour la période prochaine. Dans cette expression du problème, la contrainte parétienne (2) est remplacée par la contrainte de cohérence temporelle (9). Ces deux contraintes ont le même effet dans deux contextes différents. La contrainte de cohérence temporelle assure que l'agent 2 reçoit bien en t au moins l'utilité qu'on lui a promise en $t-1$. Cette contrainte doit être serrée à la solution. Elle joue le rôle de la contrainte parétienne puisque le calcul de $b_t^{s_t}$ et de $V_{t+1}^{s_{t+1}}$ prend en compte le niveau minimum acceptable de V_t. La proposition suivante donne certaines propriétés de la fonction f^s.[1]

Proposition 1. *La fonction $f^s(A, V)$ est croissante en A, décroissante*

1. Toutes les preuves se retrouvent en appendice.

en V, concave et continûment différentiable en (A, V).

Comme le problème est bien concave, on en dérive le lagrangien pour trouver les conditions de premier ordre. On note s l'état réalisé en t et on indice par z les états réalisables en $t+1$. Pour le problème à la période t on appelle $\beta p^z \theta_t^z$ et $\beta p^z \lambda_t^z$ les multiplicateurs des contraintes auto-exécutoires (7) et (8), pour tout $z \in \mathcal{S}$. On note ψ_t^s le multiplicateur de la contrainte de cohérence temporelle (9) et μ_t^s le multiplicateur de la contrainte de liquidité (10). On dérive le problème par rapport à A_{t+1}^s, b_t^s et V_{t+1}^z pour tous les z et on écrit les conditions enveloppe. Cela nous donne l'ensemble de conditions suivant.

$$u'(c_t^s) = \beta E_z (1 + \theta_t^z) f_A^z (A_{t+1}^s, V_{t+1}^z) + \mu_t^s \tag{11}$$
$$u'(c_t^s) = \psi_t^s \tag{12}$$
$$(1 + \theta_t^z) f_V^z (A_{t+1}^s, V_{t+1}^z) = -\lambda_t^z - \psi_t^s \quad \forall z \in \mathcal{S} \tag{13}$$
$$f_A^s (A_t, V_t^s) = (1 + r) u'(c_t^s) \tag{14}$$
$$f_V^s (A_t, V_t^s) = -\psi_t^s \tag{15}$$

En écrivant les conditions enveloppe (14) et (15) pour la période $t+1$ dans tous les états z réalisables et en les introduisant dans (11), (12) et (13), on obtient les conditions suivantes :

$$u'(c_t^s) = E_z (1 + \theta_t^z) u'(c_{t+1}^z) + \mu_t^s \tag{16}$$
$$u'(c_t^s) = (1 + \theta_t^z) u'(c_{t+1}^z) - \lambda_t^z \quad \forall z \in \mathcal{S} \tag{17}$$

L'équation (16) est la condition d'Euler affectée par les contraintes auto-exécutoires et la contrainte de liquidité. C'est la condition qui régit le choix optimal d'épargne. L'équation (17) est la condition qui définit le partage de risque optimal entre les deux agents, c'est-à-dire, dans notre cas où l'agent 2 est neutre vis-à-vis du risque, le lissage de la consommation de l'agent 1. On remarque que la condition d'Euler n'est pas affectée par la contrainte auto-exécutoire de l'agent 2. Seules les contraintes qui touchent l'agent 1 affectent son choix d'épargne.

2.3 La fonction de valeur

On s'occupe dans cette section de caractériser le comportement des fonctions de valeur f^s, qui jouent un grand rôle dans la dynamique du problème. Les conditions enveloppe du problème et la définition même de la fonction de valeur nous donnent des résultats importants.

Proposition 2. *Soient deux états de la nature s et z tels que $y^s > y^z$, alors $f^s(A, V) > f^z(A, V)$.*

À stocks d'épargne et de dette équivalents, l'utilité intertemporelle de l'agent 1 est plus élevée dans les états où le revenu courant est supérieur.

Proposition 3. *Pour tout $s \in \mathcal{S}$, la fonction $f^s(A, V)$ peut s'écrire :*

$$f^s(A, V) = h^s((1 + r)A - V)$$

où h^s est une fonction croissante et concave.

Dans chaque état, la fonction de valeur peut s'écrire comme une fonction d'une seule variable. Cette variable est $(1+r)A-V$ et représente l'actif net de l'agent 1. La variable V est en effet le surplus accordé par le contrat à l'agent 2 pour tout le reste de l'horizon, c'est donc aussi l'endettement de l'agent 1 envers l'agent 2. Ainsi, le stock d'épargne ou le surplus dû à l'agent 2 ne sont pas indépendamment responsables de l'utilité intertemporelle de l'agent 1. Ces deux variables sont étroitement liées impliquant que la solution du contrat ne sera pas unique en (A, V) puisqu'une infinité de couples (A, V) donnent la même utilité à l'agent 1. Cependant la solution peut être unique en terme de $(1 + r)A - V$.

Cette propriété des fonctions f^s s'exprime encore d'une autre manière. Comme les conditions enveloppe (14) et (15) se récrivent, avec la condition (12) : $f_A^s(A, V) = -(1 + r)f_V^s(A, V)$ pour tout (A, V) et tout s dans $\mathcal{S}$, alors on peut dire que chaque fonction f^s possède des courbes de niveau linéaires de pente $\frac{dA}{dV} = \frac{-f_V^s(A,V)}{f_A^s(A,V)} = \frac{1}{1+r}$ dans le plan (V, A). La valeur de f^s reste la même tout le long d'une droite de pente $\frac{1}{1+r}$ dans ce plan, ce qui revient à dire que la valeur de f^s dépend de la valeur de l'actif net $(1 + r)A - V$. La valeur de f^s augmente au-dessus de sa courbe de niveau, ce qui revient à dire que la fonction h^s est croissante en $(1 + r)A - V$.

3 Caractérisation de la solution optimale

Dans cette section, on expose la solution du contrat. Les comportements observés à la solution ne sont pas sans rapport avec ceux que Thomas et Worrall (1988) ont obtenu pour un contrat auto-exécutoire sans opportunité d'épargne. Dans ce cas, ils ont trouvé que les contraintes auto-exécutoires restreignent les possibilités de lissage à chaque période en limitant la consommation à l'intérieur d'intervalles. Ces intervalles sont indépendants du temps mais dépendants des états de la nature. Ainsi dans l'état s, à n'importe quelle période, la consommation c_t^s appartient à l'intervalle $[\underline{c}^s, \bar{c}^s]$ dont les bornes sont croissantes en s. Le contrat assure le lissage de la consommation en accordant à l'agent 1, à chaque période, la même consommation qu'à la période précédente, si cela est possible étant donné les bornes à respecter dans l'état réalisé. Chaque fois que l'on heurte la contrainte de l'agent 1 (après un choc positif de revenu), on doit lui accorder le niveau de consommation minimum pour le revenu réalisé. C'est-à-dire que pour tout niveau de consommation inférieur à cette borne l'agent 1 a intérêt à briser le contrat et à retourner en autarcie. Dans ce cas, la consommation de la période est supérieure à celle de la période précédente.

Lorsque l'on frappe la contrainte auto-exécutoire de l'agent 2 (généralement après un choc négatif de revenu), la consommation de l'agent 1 doit diminuer par rapport à la période précédente et on la maintient à sa borne supérieure pour optimiser le lissage. Dans ce cas, la consommation est réduite parce qu'à la période précédente, l'agent 1 (qui avait un revenu élevé) n'a pas pu effectuer le placement optimal de son revenu auprès de l'agent 2 parce que celui-ci aurait quitté le contrat à la période suivante sans le rembourser. Il s'est heurté à la contrainte de l'agent 2 qui a limité ses transferts, ce qui limite aujourd'hui ses possibilités de consommation. On est dans une situation où V_t est très faible, de trop grands transferts positifs vers l'agent 2 impliquent de poser un V_{t+1} négatif pour la période suivante afin de respecter la contrainte de cohérence temporelle (9). Ceci viole la contrainte de l'agent 2 et l'assurance de l'agent 1 est alors limitée.

Thomas et Worrall montrent qu'on peut cependant atteindre un état de lissage parfait de la consommation de l'agent 1 si tous les intervalles de consommation ont une intersection non vide. Dans ce cas, on peut toujours maintenir le niveau de consommation sans frapper les bornes des intervalles. L'existence de cette intersection dépend du facteur d'escompte des agents. Plus celui-ci est grand et plus les surplus futurs promis par le contrat incitent les agents à le respecter. À mesure que le coeficient β grandit, les contraintes auto-exécutoires se relâchent et les intervalles de consommation s'élargissent. Il existe un β^* tel que les intervalles ont une intersection non-vide dans laquelle aboutit la consommation après un nombre fini de périodes.

L'introduction des possibilités d'épargne dans ce modèle transforme les problèmes d'engagement et les bornes sur la consommation. C'est ce que l'on montre à présent.

Proposition 4. *A chaque période, la consommation de l'agent 1 est comprise dans un intervalle qui dépend uniquement de l'état de la nature réalisé dans la période et du stock d'épargne disponible.*

$$c_t^s \in [\underline{c}^s, \bar{c}^s(A_t)]$$

où la borne inférieure $\underline{c}^s$ est indépendante du stock d'épargne et où la borne supérieure $\bar{c}^s(A_t)$ est croissante dans le stock d'épargne.

Proposition 5. *Les bornes de consommation sont croissantes dans le revenu courant, soit :*

$$\bar{c}^s(A_t) > \bar{c}^z(A_t) \text{ pour } s > z$$
$$\underline{c}^s > \underline{c}^z \text{ pour } s > z.$$

Ces deux propositions montrent qu'à l'instar des résultats de Thomas et Worrall (1988), la consommation optimale de l'agent 1 se retrouve dans un intervalle invariable dans le temps. Les bornes de ces intervalles sont croissantes avec les états de la nature. Par contre, la borne supérieure de ces intervalles dépend maintenant de façon croissante du niveau d'épargne de début de période de l'agent 1. La dépendance sur le niveau d'épargne s'explique de la façon suivante. La borne supérieure de consommation dépend des besoins et capacités d'emprunt de l'agent 1. Ces besoins sont réduits lorsque l'agent 1 possède un stock d'épargne sur lequel il peut tirer pour augmenter sa consommation. La borne inférieure ne dépend pas de ce niveau d'épargne puisqu'elle représente une contrainte sur la consommation minimale de l'agent 1, elle-même déterminée par l'utilité que l'agent 1 peut retirer en autarcie. Puisque l'agent 1 perd son épargne s'il opte pour l'autarcie, cette consommation minimale est indépendante du niveau d'épargne.

Proposition 6. *Les contraintes auto-exécutoires de l'agent 2 et la contrainte de liquidité ne sont jamais serrées à l'optimum, soit $\lambda_t^z = \mu_t^s = 0 \; \forall \, z \in \mathcal{S}$ et $\forall \, t$.*

L'existence de l'épargne relâche donc les contraintes auto-exécutoires de l'agent 2 et la borne supérieure sur la consommation de l'agent 1 n'est jamais atteinte. Comme on l'a vu plus haut, dans un contrat sans épargne, la contrainte de l'agent 2 est susceptible d'être serrée lorsque V_t est faible. Si le revenu de l'agent 1 est élevé, le lissage de la consommation de l'agent 1 demande des transferts positifs de l'agent 1 vers l'agent 2. L'agent 1 "place" son revenu auprès de l'agent 2, c'est-à-dire qu'il sacrifie un peu de sa consommation aujourd'hui pour consommer plus demain si le revenu s'avère faible. Mais si V_t, le surplus futur de l'agent 2, est très faible, il est incité à quitter le contrat dès qu'il a empoché le transfert courant positif. Ceci revient à dire que si le surplus futur de l'agent 2 dans le contrat est déjà faible, il n'est pas possible de le faire baisser encore en lui faisant des transfert positifs dans la période courante. Dans le cas de Thomas et Worrall (1988), le transfert de revenu de période à période est donc limité. L'épargne permet de remédier à cela. L'agent 1 peut faire ses transferts vers son compte d'épargne au lieu, ou en plus, de les faire vers l'agent 2. Les placements nécessaires pour assurer le lissage de la consommation peuvent donc être réalisés sans subir la distorsion due à la contrainte auto-exécutoire de l'agent 2. Quand un revenu faible se réalise, le contrat peut permettre à l'agent 1 de désépargner pour garantir le niveau de consommation sans exiger de transfert trop élevé de la part de l'agent 2.

Ce rôle de l'épargne se rapporte à la proposition (4) selon laquelle la borne supérieure sur la consommation dans n'importe quel état, augmente avec le stock d'épargne. Dans le cas où la contrainte auto-exécutoire de l'agent 2 peut être serrante pour un état demain, le contrat recommande de faire un placement sur le compte d'épargne. Ceci augmente le stock d'épargne disponible demain et donc la borne supérieure sur la consommation tout en relâchant la contrainte. Ainsi, la contrainte auto-exécutoire de l'agent 2 n'est, en fait, jamais serrante et on n'est jamais limité par la borne supérieure sur la consommation.

L'introduction des possibilités d'épargne dans le contrat de partage de risque où les agents ne peuvent s'engager rapproche celui-ci d'une solution à la Thomas et Worrall (1988) où l'agent 2 serait parfaitement engagé.[2] L'épargne joue le même rôle que l'engagement complet de l'agent 2 car elle peut être vue comme des paiements faits à l'agent 2 mais que celui-ci ne peut pas empocher (ou doit rembourser). Il ne peut donc pas briser le contrat dans une période en s'en allant avec ces paiements. Le compte d'épargne agit donc comme une tierce partie capable de stocker les transferts afin qu'il ne reste jamais d'incitation pour l'agent 2 à sortir du contrat avec un montant élevé dans une période. On devrait ainsi voir le stock d'épargne augmenter en même temps que le surplus V dû à l'agent 2 puisque l'accumulation d'épargne permet de relâcher la contrainte auto-exécutoire de ce dernier. C'est pourquoi la contrainte de liquidité ne peut pas non plus être serrante. Soulignons ici que l'agent 1 ne peut s'enfuir avec son stock d'épargne puisqu'on a supposé qu'en cas de bris de sa part, l'agent 2 le lui confisquait. La croissance du stock d'épargne ne peut donc pas donner à l'agent 1 des incitations à briser le contrat.

Les contraintes auto-exécutoires de l'agent 1 restent par contre possiblement serrantes. Un choc positif de revenu peut toujours lui donner intérêt à sortir du contrat et à recommencer en autarcie à accumuler de l'épargne. Il reste donc une limite sur les transferts que l'agent 2 peut faire à l'agent 1 dans les mauvais états de la nature. Cependant, les

2. Un tel modèle est développé par Harris et Holmstrom (1982) dans un exemple de détermination des salaires lorsque la firme peut complètement s'engager.

bornes inférieures sur la consommation de l'agent 1 devraient être supérieures à celle que l'on trouve chez Thomas et Worrall dans la mesure où la désépargne permet toujours à l'agent 1 d'améliorer sa consommation quand il n'est plus capable d'emprunter à l'agent 2. Toutefois, le contrat gère étroitement les stocks de dette et d'épargne de l'agent 1 de façon à conserver un niveau optimal d'actif net qui fait qu'il n'est pas possible pour l'agent 1 d'échapper complètement aux effets de ses contraintes auto-exécutoires. Le contrat doit donc poser un niveau de consommation minimum dans chaque état, suffisant pour convaincre l'individu de rester dans la relation. Nous voyons à présent comment se comporte le contrat étant donné l'existence des contraintes auto-exécutoires sur l'agent 1.

Étant donné que $\lambda_t^z = \mu_t^s = 0$ pour tout t, les conditions de premier ordre s'écrivent finalement :

$$\begin{array}{rcll} u'(c_t^s) & = & \beta(1+r)E_z(1+\theta_t^z)h^{z'}((1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^z) & \\ u'(c_t^s) & = & (1+\theta_t^z)h^{z'}((1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^z) & \forall\, z \in \mathcal{S} \\ u'(c_t^s) & = & h^{s'}((1+r)A_t - V_t^s) & \end{array}$$

La consommation est donc constante pour un même niveau d'actif net $X_t^s = (1+r)A_t - V_t^s$, c'est-à-dire le long des courbes de niveau de f^s. D'après la dernière condition, il existe une fonction de consommation $c_t^s = C^s((1+r)A_t - V_t^s)$ où $C^s((1+r)A_t - V_t^s) = u'^{-1}[h^{s'}((1+r)A_t - V_t^s)]$. La consommation en t dans l'état s est donc une fonction croissante de l'actif net $X_t^s = (1+r)A_t - V_t^s$. Les propositions suivantes donnent la dynamique de la consommation dans le contrat.

Proposition 7. *Pour toutes les réalisations s et z possibles en t et $t+1$:*

$$\begin{array}{lcl} \theta_t^z = 0 & \Rightarrow & c_{t+1}^z = c_t^s \\ \theta_t^z > 0 & \Rightarrow & c_{t+1}^z > c_t^s \end{array}$$

La consommation est maintenue constante autant que possible. Cependant, si dans un état la contrainte auto-exécutoire de l'agent 1 est serrée alors la consommation prévue dans cet état doit être plus élevée que la consommation de la période précédente.

Proposition 8. *Soient deux états de la nature, s et z. Le cas $\theta_t^z > 0$ et $\theta_t^s = 0$ est impossible si $y^s > y^z$.*

Corollaire 1. *Pour deux états s et z tels que $y^s > y^z$, il faut que $c_t^s \geq c_t^z$.*

Les deux propositions précédentes signifient qu'il existe une consommation minimum à accorder à l'agent 1 pour respecter sa contrainte d'engagement. Ce niveau de consommation est donné par la valeur de l'actif net telle que la contrainte est juste respectée : $h^z(X^z_{t+1}) = g(0, y^z)$, dans l'état z considéré. On ne frappe la contrainte auto-exécutoire de l'agent 1 qu'après la réalisation d'un choc positif de revenu. S'il n'est pas possible de garder la consommation égale à son niveau passé, on lui donne le niveau minimum nécessaire pour respecter la contrainte dans cet état et ce niveau est forcément supérieur au niveau de consommation passé. Le profil de consommation ne peut être que non-décroissant.

Proposition 9. *Si l'état de la nature s se réalise en t, alors la contrainte auto-exécutoire de l'agent 1 ne peut plus être contraignante dans l'état s dans aucune des périodes suivantes. En terme formel,* $s_t = s \;\Rightarrow\; \theta^s_{t+\tau} = 0 \;\; \forall \tau \geq 0$.

Corollaire 2. *Soit t une période dans laquelle l'état S est réalisé. Alors, à partir de la période $t+1$, les contraintes auto-exécutoires ne sont plus jamais serrées. En terme formel,* $s_t = S \;\Rightarrow\; \theta^s_{t+\tau} = 0 \; \forall s, \; \forall \tau \geq 0$.

Le contrat finit donc par atteindre une situation de lissage parfait. Dès qu'un certain état de la nature s'est réalisé une fois, la consommation atteint un niveau au-dessous duquel elle ne peut plus redescendre dans l'avenir. Tant qu'un état où le revenu est supérieur n'est pas réalisé, la consommation garde sa valeur. Quand l'état de la nature S, dans lequel le revenu est le plus élevé possible, se réalise, on atteint un état de consommation constante qu'on peut appeler solution de premier rang.

Ainsi, chaque fois qu'on atteint un revenu plus élevé, la consommation s'élève et le niveau d'actif net requis par le lissage augmente aussi. Une fois que l'état S a été atteint, la consommation garde pour tout le reste de l'horizon, un niveau constant c. Les fonctions f^s, qui donnent l'utilité intertemporelle de l'agent 1, ont alors toutes la même valeur, dans toutes les périodes. Étant donné que $f^s(A, V) > f^z(A, V)$ pour tout (A, V) et pour $y^s > y^z$, alors $f^s(A, V^s) = f^z(A, V^z)$ entraîne que $V^s > V^z$. Donc, pour un A_t donné en début de période t, les valeurs de V_t conditionnelles à la réalisation du revenu en t sont telles que $V^1_t < \cdots < V^S_t$.

La solution stationnaire est unique en terme de l'actif net de l'agent 1. Supposons qu'on entre dans l'état S pour la première fois dans la période t. Alors $f^S(A^{s_{t-1}}_t, V^S_t) = h^S((1+r)A^{s_{t-1}}_t - V^S_t)$ détermine le niveau stationnaire des fonctions h^s. Ainsi pour tout $\tau \geq t$, $X^1_\tau > \cdots > X^S_\tau$ car $h^1(X^1_\tau) = \cdots = h^S(X^S_\tau)$.

La solution stationnaire en terme de $(A, V^s)_{s \in \mathcal{S}}$ n'est pas unique ; pour une réalisation V^s_t donnée, on a le choix de poser $A^s_{t+1} = A_t$ et $V^z_{t+1} = V^z_t$ pour tout $z \in \mathcal{S}$ ou de choisir des niveaux différents et tels que $(1+r)A^s_{t+1} - V^z_{t+1} = (1+r)A_t - V^z_t$. Dans ce cas, les chemins optimaux de A et V peuvent tendre vers l'infini ou bien croître et décroître sans régularité. On sait que dans les problèmes d'épargne simple, si $r = \delta$ le stock d'épargne a tendance à tendre vers l'infini pour assurer un meilleur lissage. Ici le stock d'épargne n'a pas besoin d'être infini puisque le lissage est assuré par l'agent 2, mais pourtant cela reste une solution possible du contrat. Il existe une infinité de solutions possibles en (A, V), cependant une solution réaliste consiste à retenir $A^s_t = A$ et $V^s_t = V^s$ pour tout s et tout t.

4 Discussion

On peut résumer le comportement du contrat comme suit. La contrainte d'engagement de l'agent 2 n'est jamais contraignante, la contrainte de liquidité non plus. La consommation de l'agent 1 est toujours croissante dans le temps. Quand un certain état a été réalisé, il détermine un niveau minimal de consommation. Chaque fois qu'un état inférieur, ou le même, est de nouveau réalisé, la consommation ne peut pas diminuer et la contrainte de l'agent 1 ne peut pas être de nouveau contraignante. La contrainte ne pourra être contraignante que dans un état où le revenu est plus élevé. Chaque fois qu'un niveau de revenu plus élevé est atteint la consommation s'élève si on heurte la contrainte auto-exécutoire. Sinon c'est que le niveau de consommation était déjà supérieur au niveau minimal pour cet état de la nature. Lorsque le revenu maximal possible se réalise la consommation atteint son niveau stationnaire. Le lissage parfait est donc atteint avec probabilité non nulle en un nombre fini de périodes. Le modèle décrit ici donne les mêmes conclusions qu'un contrat auto-exécutoire sans épargne avec engagement unilatéral de l'agent 2. C'est ce qu'auraient trouvé Thomas et Worrall (1988) s'ils avaient supposé que l'agent 2 pouvait s'engager. Dans un modèle légèrement différent, Harris et Holmstrom (1982) démontrent un résultat similaire. L'épargne représente un moyen implicite de faire des "transferts" à l'agent 2 sans lui permettre d'en bénéficier directement. La conséquence sur le comportement de la dette V est que celle-ci n'est plus bornée par les possibilités de gains à l'échange dans chaque état de la nature. Elle peut augmenter tant que le stock d'épargne augmente en compensation.

Ces résultats dépendent fortement des hypothèses qu'on a faites sur les taux d'escompte et d'intérêt. Quand $r = \delta = (1 - \beta)/\beta$, il y a substituabilité parfaite entre l'épargne et les transferts vers l'agent 2. Un dollar d'épargne en t rapporte $(1 + r) = 1/\beta$ en $t + 1$. Une diminution d'un dollar de l'emprunt auprès de l'agent 2 ($db = 1$) en t réduit de

$1/\beta = (1+\delta)$ dollar la valeur future de la dette accordée à l'agent 2 : $dE_z V_{t+1}^z = -(1/\beta) db_t$. Tant que $\delta = r$ le contrat est indifférent entre emprunt et désépargne (ou entre baisse de l'emprunt et épargne). Il peut arranger les transferts de sorte que l'agent 1 emprunte à l'agent 2 pour épargner ou désépargne pour payer l'agent 2. C'est pour cette raison qu'il est facile de relâcher la contrainte auto-exécutoire de l'agent 2, parce que remplacer des transferts positifs par de l'épargne est complètement neutre. Si on suppose que $\delta \neq r$, alors le contrat ne peut plus gérer aussi facilement les transferts. Les contraintes auto-exécutoires de l'agent 2 et la contrainte de liquidité ne seront plus automatiquement satisfaites.

L'interaction entre le contrat avec l'agent 2 et le compte d'épargne génère une parfaite substituabilité entre l'emprunt et la désépargne. Ce résultat n'est cependant pas aussi trivial qu'il puisse paraître puisque ces deux instruments génèrent des chemins de consommation très différents lorsqu'ils sont pris séparément. Paradoxalement, ce n'est que lorsqu'ils sont complémentaires qu'ils deviennent parfaits substituts. Ils sont donc substituts sur les transferts marginaux.

Il faut aussi souligner que l'on a fait l'hypothèse que l'agent 1 perd toute son épargne en cas de bris de contrat. C'est une punition très forte qui fait du stock d'épargne l'équivalent d'une garantie financière. Dès lors, rien n'empêche le surplus V dû à l'agent 2 de croître à l'infini en autant que le stock d'épargne/garantie financière en fait autant. Étant donné que l'agent 1 perd son actif s'il brise le contrat, le stock d'épargne sert de garantie à l'agent 2. Si l'agent 1 pouvait s'enfuir avec son épargne alors le contrat devrait en limiter l'accumulation afin de réduire les incitations de l'agent 1 à briser la relation. On reviendrait à une situation où l'on ne peut compter sur aucune garantie pour inciter les agents à respecter le contrat. Les contraintes auto-exécutoires des deux parties seraient plus contraignantes. Cependant, même si l'épargne peut toujours être saisie, il peut arriver qu'elle ne puisse pas être contrôlée par l'agent 2 pendant le déroulement du contrat. Dans ce cas, l'agent 1 peut avoir intérêt à dévier et à accumuler des stocks différents de ce que recommande la solution du contrat. L'agent 2, dans ce cas, est certain que le partage de risque n'est pas réalisé dans son intérêt et la solution de l'accord doit être différente de celle qu'on vient de décrire.

Dans les deux sections qui suivent, on examine la solution du problème quand le taux d'intérêt diffère du taux de préférence pour le présent puis quand le stock d'épargne n'est pas observable.

5 Taux d'intérêt sur l'épargne inférieur au taux de préférence pour le présent

Dans cette section on veut étudier le comportement du contrat lorsque l'épargne devient coûteuse. Si $r < \delta$ (ou, de façon équivalente, $\beta(1+r) < 1$), alors l'agent 1 a tendance à vouloir emprunter au taux r pour prêter à l'autre agent.[3] Ceci est bien sûr impossible du fait de la contrainte de liquidité. L'agent 1 veut donc placer le moins possible sur son compte d'épargne et faire l'essentiel de ses placements auprès de l'agent 2. Il sera capable de réaliser ces placements dans la limite des contraintes auto-exécutoires de l'agent 2.

La différence entre r et δ ne transforme pas le problème ni les conclusions sur la forme des fonctions f. On peut toujours écrire les fonctions de valeur comme des fonctions de l'actif net $X = (1+r)A - V$. Les conditions de premier ordre sont les mêmes mais les résultats qu'on en déduit sont changés. Les conditions de premier ordre, à ce stade, s'écrivent :

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z(1+\theta_t^z)h^{z'}(X_{t+1}^z) + \mu_t^s \tag{18}$$

$$u'(c_t^s) = h^{s'}(X_t^s) \tag{19}$$

$$u'(c_t^s) = (1+\theta_t^z)h^{z\prime}(X_{t+1}^z) - \lambda_t^z. \tag{20}$$

Elles nous permettent d'écrire les conditions d'Euler et de lissage :

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z(1+\theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) + \mu_t^s \tag{21}$$

$$u'(c_t^s) = (1+\theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) - \lambda_t^z \qquad \forall\, z \in \mathcal{S}. \tag{22}$$

A présent, $\beta(1+r)$ est inférieur à 1 et on ne peut plus dire que les contraintes auto-exécutoires de l'agent 2 et la contrainte de liquidité ne sont jamais contraignantes. En effet, les conditions (21) et (22) donnent aussi :

$$[1-\beta(1+r)]E_z(1+\theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) = \mu_t^z + E_z\lambda_t^z > 0$$

Si $\mu_t^s = 0$, c'est-à-dire si $A_{t+1}^s \geq 0$, alors il faut que $E_z\lambda_t^z > 0$ c'est-à-dire qu'il existe forcément au moins un état de la nature dans lequel la contrainte de l'agent 2 est serrée pour la période suivante. Ceci s'explique assez bien puisque si $\mu_t^s = 0$ c'est que l'agent 1 épargne ou du moins n'a pas d'incitation dans cette période à désépargner plus que

3. On ne traite pas ici le cas où $r > \delta$ parce qu'il implique que l'épargne croît plus vite que n'est escomptée la consommation future. L'agent 1 a alors tendance à sacrifier sa consommation courante pour épargner. De plus, le contrat permet à l'agent 2 de prêter des fonds à l'agent 1 afin que celui-ci investisse à ce taux avantageux. Le stock d'épargne et l'utilité de l'agent 2 tendent donc vers l'infini.

son stock d'actif ne le lui permet. Or l'épargne est coûteuse et si l'individu épargne c'est que c'est pour lui le seul moyen d'aider au lissage de la consommation sans violer la contrainte auto-exécutoire de l'agent 2 pour la période suivante. En fait, le contrat effectue les transferts de l'agent 1 vers l'agent 2 jusqu'à ce qu'une au moins des contraintes auto-exécutoire de ce dernier tienne avec égalité. Ensuite, les transferts sont affectés vers le compte d'épargne s'il est nécessaire de compléter le lissage pour la période suivante. On effectue ces placements vers le compte d'épargne de façon à respecter :

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z(1+\theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) + \mu_t^s.$$

Cependant, le taux d'intérêt étant faible, le stock d'épargne accumulé est restreint et n'est jamais suffisant pour maintenir le niveau de consommation quand les contraintes de l'agent 2 sont serrées dans les états subséquents (*i.e.,* $c_{t+1}^z < c_t^s$ *si* $\lambda_t^z > 0$*)*.

Si $\lambda_t^z = 0$ pour tout z, c'est que $\mu_t^s > 0$, c'est-à-dire que lorsqu'aucune des contraintes auto-exécutoires de 2 n'est serrée, l'agent 1 (qui n'a pas besoin d'épargne pour lisser sa consommation) réduit son stock d'épargne à zéro et préfèrerait même emprunter au taux r. Le contrat est suffisant pour assurer la consommation.

On retrouve à peu près le même comportement de contrat que dans le cas où $r = \delta$ sauf qu'ici la consommation n'est plus irréversiblement croissante. La condition de lissage (22) entraîne en effet que $c_{t+1}^z < c_t^s$ si $\lambda_t^z > 0$. Vu que la croissance du stock d'épargne est restreinte, le contrat peut atteindre dans certains états, la borne supérieure de la consommation.

Lemme 1. *Si l'état s est celui qui s'est réalisé en t alors $\theta_t^s = 0$.*

On remarque que ceci n'entraîne plus que $\theta_{t+i}^s = 0$ pour $i > 0$. En effet, la consommation pouvant diminuer d'une période à l'autre, il devient possible de frapper dans le futur une contrainte auto-exécutoire de l'agent 1 qui n'est pas saturée aujourd'hui.

Lemme 2. *Si s se réalise en t et que $\lambda_t^s > 0$, alors $A_t > 0$,* i.e. $\mu_{t-1} = 0$.

Si $\lambda_t^s > 0$ quand l'état s se réalise en t, ceci signifie que $c_t^s > c_{t+1}^s = \bar{c}^s(A_{t+1})$. Il faudra alors diminuer le niveau de consommation de l'agent 1 dans la prochaine période si l'état s se réalise de nouveau. Pourtant, la consommation qui lui sera accordée sera maximale étant donné le stock d'épargne (puisque $V_{t+1}^s = 0$). Cela signifie que son stock d'épargne diminue : $A_{t+1}^s < A_t$. Si $A_{t+1}^s > 0$ alors il est encore possible que $\lambda_{t+1}^s > 0$

et ainsi, si l'état s se réalise plusieurs fois de suite, le stock d'épargne décroît jusquà devenir nul.

Lemme 3. *Si* $y^s > y^z$ *alors,* $(\theta_t^s = 0 \ \Rightarrow \ \theta_t^z = 0)$ *et* $(\lambda_t^z = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_t^s = 0)$*.*

Dans le cas où $r < \delta$, on voit que la solution se rapproche de celle de Thomas et Worrall (1988). Il n'est plus optimal de relâcher complètement les contraintes de l'agent 2 si bien que les bornes supérieures sur la consommation peuvent être atteintes. En fait, si δ est assez faible (si β est assez grand), les intervalles de consommation dans les différents états ont une intersection non vide. On peut alors fixer dès la première période un niveau de consommation stationnaire, valable dans tous les états, pour toutes les périodes. Dans ce cas, l'épargne est inutile et $A_t = 0$ pour toutes les périodes t. C'est seulement si δ est trop élevé que le problème d'engagement pèse sur l'efficacité du contrat. Dans ce cas, l'épargne devient nécessaire pour améliorer le lissage de la consommation de l'agent 1. Avec des stocks d'épargne positifs, on accroît les bornes supérieures sur la consommation pour limiter les chutes de consommation qui pourraient suivre des chutes de revenu. La présence de l'épargne améliore donc le lissage par rapport à la solution de Thomas et Worrall (1988). La consommation a la même dynamique que dans leur modèle mais ses variations (du moins ses variations à la baisse) sont réduites par la présence de l'épargne. Mais comme l'épargne est jugée coûteuse par l'agent 1, on en limite les montants et elle est toujours insuffisante pour assurer un lissage parfait de sa consommation.

6 Épargne non observable

Supposons à présent que le contrat ne peut pas contrôler le niveau d'épargne dans la mesure où l'agent 2 ne peut pas observer le comportement d'épargne de l'agent 1. On fait face alors à un problème de risque moral ; l'agent 1 peut avoir des incitations à dévier du niveau d'épargne optimal prescrit par le contrat. Nous montrons tout de suite quelles sont ces incitations.

Dans le contrat, l'épargne est calculée de façon à vérifier l'égalité suivante :[4]

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z(1+\theta_t^z)h^{z'}((1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^z) + \mu_t^s.$$

4. On considère encore que l'épargne peut-être saisie, même si elle n'est pas observable en cours de contrat. En fait, en cas de faillite (de bris de contrat), l'agent 2 peut effectuer des audits ou des perquisitions afin de constater le niveau d'épargne et le saisir. Pour fins de discussion ici, on suppose ces coûts d'audit comme étant nuls.

Or, si l'agent calculait seul son niveau d'épargne, il ne tiendrait pas compte de l'effet de sa contrainte auto-exécutoire. Envisageons l'effet sur le bien-être de l'agent 1 de variations du stock d'épargne A^s_{t+1} autour de l'optimum du contrat caractérisé dans les sections précédentes.

- Supposons une variation $dA_{t+1} > 0$ et calculons la variation de bien-être dBE de l'agent 1. La variation $dA_{t+1} > 0$ affecte le bien-être de l'agent 1 en t de la façon suivante :

  $$dBE = [-u'(c^s_t) + \beta(1+r)E_z h^{z'}((1+r)A^s_{t+1} - V^z_{t+1})]dA^s_{t+1}.$$

  Or, à l'optimum du contrat, d'après les conditions de premier ordre, $u'(c^s_t) \geq \beta(1+r)E_z(1+\theta^z_t)h^{z'}((1+r)A^s_{t+1} - V^z_{t+1}) \geq \beta(1+r)E_z h^{z'}((1+r)A^s_{t+1} - V^z_{t+1})$ et donc, $dBE \leq 0$. À l'optimum du contrat, l'agent 1 n'a pas d'incitation à dévier en épargnant plus que prescrit par le contrat.

- Supposons à présent une déviation $dA_{t+1} < 0$. Dans ce cas, la déviation entraîne la violation immédiate des contraintes auto-exécutoires de l'agent 1 qui étaient serrées à l'optimum. Dans ces états, le gain de bien-être de l'agent 1 est nul puisqu'il sort du contrat et obtient le niveau de bien-être de l'autarcie qui est égal à celui qu'il obtient dans le contrat dans les états où les contraintes sont serrantes. On note $\mathcal{Z} = \{z \in \mathcal{S}/h^z((1+r)A^s_{t+1} - V^z_{t+1}) = g(0, y^z)\}$. $\mathcal{Z}$ est l'ensemble des états dans lesquels la contrainte auto-exécutoire de l'agent 1 est serrée, c'est-à-dire pour lesquels θ^z_t est positif. Le gain de bien-être est donc :

  $$dBE = [-u'(c^s_t) + \beta(1+r)\sum_{w \notin \mathcal{Z}} p^w h^{w'}((1+r)A^s_{t+1} - V^w_{t+1})]dA^s_{t+1}.$$

  En utilisant les conditions de premier ordre de l'optimum du contrat, on voit que cette expression est positive. L'agent 1 a donc un incitatif à dévier et à épargner moins (ou désépargner plus) que ce qui est recommandé par le contrat.

Donc, si l'agent 2 ne peut pas contrôler le montant d'épargne, l'agent 1 déviera forcément et choisira ses montants d'épargne de façon à vérifier :

$$u'(c^s_t) = \beta(1+r)E_z u'(c^z_{t+1}) + \mu^s_t$$

plutôt que :

$$u'(c^s_t) = \beta(1+r)E_z(1+\theta^z_t)u'(c^z_{t+1}) + \mu^s_t.$$

Un contrat où l'épargne n'est pas observable doit tenir compte de ce comportement. Dans l'état où le revenu est le plus élevé, le problème ne se pose pas (lorsque $\delta = r$). On atteint l'état stationnaire et aucune des contraintes auto-exécutoires de l'agent 1 n'est serrée. Le stock d'épargne choisit par l'agent 1 est donc le même que celui que recommanderait le contrat. Dans l'état de la nature le plus défavorable, il est certain que l'agent ne voudra pas épargner et le contrat devrait poser $A_t = 0$ pour éviter les déviations. Mais dans les états intermédiaires, l'agent lui-même a besoin d'un peu d'épargne pour améliorer le lissage de sa consommation. Le contrat doit en fait vérifier les conditions suivantes :

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z h^{z'}(X_{t+1}^z) + \mu_t^s \tag{23}$$

$$u'(c_t^s) = h^{s'}(X_t^s) \tag{24}$$

$$(1+\theta_t^z)h^{z'}(X_{t+1}^z) - \lambda_t^z = h^{s'}(X_t^s) \quad \forall\, z \in \mathcal{S}. \tag{25}$$

Ces conditions sont des conditions de premier ordre transformées pour tenir compte du problème d'incitation de l'agent 1. La condition (23) est compatible avec les incitations de l'agent 1 puisqu'elle représente le comportement optimal de l'agent 1 vis-à-vis de son épargne lorsque celle-ci n'est pas observable par les autres. Les deux autres conditions sont les conditions d'optimalité habituelles pour le choix de $\{V_{t+1}^z\}$ et b_t^s.

On constate alors que même si $\beta(1+r) = 1$, il n'est plus possible de trouver que $\mu_t^s = \lambda_t^z = 0\ \forall\, z$. La consommation oscille en fonction de l'histoire des états et des contraintes auto-exécutoires. La solution du contrat est sous-optimale par rapport à ce qu'elle est quand l'agent 2 peut parfaitement observer le stock d'épargne. Le lissage est imparfait à cause d'un problème de risque moral.

7 Conclusion

Si le taux d'intérêt sur l'épargne est égal au taux de préférence pour le présent, l'introduction d'une opportunité externe d'épargne dans le contrat auto-exécutoire a le même effet que le plein engagement de l'agent neutre vis-à-vis du risque dans la relation. L'épargne n'est pas vraiment une opportunité externe ici dans la mesure où elle est entièrement gérée par le contrat de manière à alléger le problème d'engagement. L'épargne agit dans le contrat comme un collatéral et évolue de façon à relâcher les contraintes d'engagement des agents. Ainsi, la combinaison du partage de risque et de l'épargne permet de diminuer l'effet négatif de l'incomplétude des marchés sur les possibilités de lissage de la consommation pour les agents. Cependant, ce résultat est très dépendant des hypothèses posées sur le modèle. Si le taux d'intérêt sur l'épargne est inférieur au taux de préférence pour le présent, alors l'épargne ne joue plus aussi bien son rôle de collatéral. Le stock d'épargne est limité autant que possible et le lissage peut rester très imparfait. De même, si le stock d'épargne n'est pas parfaitement observable par l'autre agent, l'efficacité du contrat est freinée par la nécessité de fournir à l'emprunteur les incitations à respecter ses recommandations en terme d'épargne.

Il reste une hypothèse que nous n'avons pas relâchée et qui est celle que l'épargne puisse être saisie par l'agent 2 si l'agent 1 ne respecte pas le contrat. La question de la saisie totale du stock d'épargne est à remettre en cause étant donné que, dans la plupart des relations financières, les débiteurs arrivent souvent à dissimuler au moins une partie de leurs avoirs au moment des faillites. Cette hypothèse est pourtant cruciale pour nos résultats. Si l'agent 1 peut s'enfuir avec son stock d'épargne, alors sa situation en autarcie dépend du montant qu'il peut accumuler avant de briser le contrat. Celui-ci doit donc limiter les montants épargnés ce qui limite l'efficacité du contrat en terme de lissage. Il est d'ailleurs impossible d'effectuer un tel contrôle si le stock d'épargne n'est pas observable.

Pour l'instant, avec les hypothèses qu'on a faites, on ne peut pas dire que l'introduction dans le contrat d'un second moyen d'assurance, comme le compte d'épargne, réduit les problèmes d'engagement. On peut juste conclure que si on peut engager un collatéral dans les contrats auto-exécutoires, ceux-ci deviennent immédiatement plus efficaces. Supposer que le stock d'épargne n'est pas saisissable permettrait de voir l'effet pur d'une combinaison des moyens de lissage.

Références

Carroll, C.D. (1994) "How does Future Income Affect Current Consumption?," *Quarterly Journal of Economics* **109**, 111-147.

Deaton, A. (1991) "Saving and Liquidity Constraints," *Econometrica* **59**, 1221-1248.

—— (1992) *Understanding Consumption*. Clarendon Press, Oxford.

Escudero, V.L. and J. Schechtman (1977) "Some Results on 'An Income Fluctuation Problem'," *Journal of Economic Theory* **16**, 151-166.

Garcia, R., A. Lusardi, and S. Ng (1995) "Excess Sensitivity and Asymmetries in Consumption: An Empirical Investigation," Mimeo, Centre de Recherche et Développement en Économique, Université de Montréal.

Gauthier, C., M. Poitevin, and P. González (1996) "Using Ex Ante Payments in Self-Enforcing Risk-Sharing Contracts," Mimeo, Université de Montréal.

Harris, M. and B. Holström (1982) "A Theory of Wage Dynamics," *Review of Economic Studies* **49**, 315-333.

Hayashi, F. (1987) "Tests for Liquidity Constraints: A Critical Survey and Some New Obbservations," *Advances in Econometrics: Fifth World Congress* **2**, 91-120.

Kimball, M.S. (1990) "Precautionary Saving in the Small and in the Large," *Econometrica* **58**, 53-73.

Marcet, A. and R. Marimon (1992) "Communication, Commitment, and Growth," *Journal of Economic Theory* **58**, 219-249.

Pischke, J-S (1995) "Individual Income, Incomplete Information, and Aggregate Consumption," *Econometrica* **63**, 805-840.

Schechtman, J. (1995) "An Income Fluctuation Problem," *Journal of Economic Theory* **12**, 218-241.

Thomas, J. and T. Worrall (1988) "Self-Enforcing Wage Contracts," *Review of Economic Studies* **55**, 541-554.

—— (1990) "Income Fluctuations ans Asymmetric Information: An Example of a Repeated Principal-Agent Problem," *Journal of Economic Theory* **51**, 367-390.

Zeldes, S.P. (1989a) "Optimal Consumption with Stochastic Income: Deviations from Certainty Equivalence," *Quarterly Journal of Economics* **104**, 275-298.

—— (1989b) "Consumption and Liquidity Constraints: An Empirical Investigation," *Journal of Political Economy* **97**, 305-346.

Appendice

Preuve de la proposition 1 : Lorsque V augmente, l'ensemble des contrats réalisables diminue, réduisant ainsi l'utilité maximale que l'agent 1 retire du programme de maximisation. La fonction f^s est donc décroissante en V.

L'ensemble des contraintes (2), (3), (4), (5) et (6) est strictement convexe et u est strictement concave et continûment différentiable. Ceci entraîne que f^s est concave et différentiable en (A, V). *Q.E.D.*

Preuve de la proposition 2 : Dans le programme de maximisation, le revenu y^s n'entre que dans la fonction-objectif u. Puisqu'elle est strictement croissante en y^s, la fonction de valeur f^s l'est également. *Q.E.D.*

Preuve de la proposition 3 : Récrivons les conditions enveloppe (14) et (15) comme suit : $f^s_A + (1+r)f^s_V = 0$. Ceci est une équation différentielle partielle linéaire homogène dont la solution générale s'écrit sous la forme $f^s(A, V) = h^s((1+r)A - V)$. Ici, on doit vérifier les conditions suivantes sur les dérivés de f^s :

$$f^s_A(A, V) = (1+r)h^{s\prime}((1+r)A - V) > 0$$

$$f^s_V(A, V) = -h^{s\prime}((1+r)A - V) < 0$$

$$f^s_{AA}(A, V) = (1+r)^2 h^{s\prime\prime}((1+r)A - V) < 0$$

$$f^s_{VV}(A, V) = h^{s\prime\prime}((1+r)A - V) < 0$$

$$f^s_{AV}(A, V) = -(1+r)h^{s\prime\prime}((1+r)A - V) > 0$$

ce qui entraîne $h^{s\prime} > 0$ et $h^{s\prime\prime} < 0$. *Q.E.D.*

Preuve de la proposition 4 : La part de surplus accordée à l'agent 2 est limitée par les contraintes auto-exécutoires. $V^s_t \in [0, \bar{V}^s(A_t)]$ avec $\bar{V}^s(A_t)$ tel que $h^s((1+r)A_t - \bar{V}^s(A_t)) = g(0, y^s)$ et donc $\bar{V}^s(A_t) = (1+r)A_t - h^{s^{-1}}[g(0, y^s)]$. La borne supérieure sur V^s_t est une fonction linéaire croissante de A_t. Les bornes sur la consommation de l'agent 1 dépendent directement des bornes sur le surplus accordé à l'agent 2 par la condition de premier ordre : $u'(c^s_t) = h^{s'}((1+r)A_t - V^s_t)$ qui donne la valeur minimale de c^s_t quand $V^s_t = \bar{V}^s(A_t)$: $\underline{c}^s = u'^{-1}[h^{s'}((1+r)A_t - \bar{V}^s(A_t))] = u'^{-1}[h^{s'}(h^{s^{-1}}[g(0, y^s)]]$ et la valeur maximale de c^s_t quand $V^s_t = 0$: $\bar{c}^s(A_t) = u'^{-1}[h^{s'}((1+r)A_t)]$, fonction croissante de A_t. *Q.E.D.*

Preuve de la proposition 5 : Pour la consommation maximale, le résultat est direct et dû au fait que $V = 0$ et $y^s > y^z$ avec u'^{-1} et $h^{s'}$ décroissantes. Pour la consommation minimale, on utilise le fait que $g(0, y^s) > g(0, y^z)$ et que $h^{s^{-1}}$ est croissante. *Q.E.D.*

Preuve de la proposition 6 : Les conditions (16) et (17) entraînent $\mu_t^s = -E_z\lambda_t^z$. Les multiplicateurs de Lagrange étant positifs ou nuls, on doit avoir $\lambda_t^z = \mu_t^s = 0 \; \forall \, z \in \mathcal{S}$. *Q.E.D.*
Preuve de la proposition 7 : Avec $\lambda_t^z = 0$, la condition (17) devient $u'(c_t^s) = (1+\theta_t^z)u'(c_{t+1}^z)$. La concavité de u entraîne le résultat. *Q.E.D.*
Preuve de la proposition 8 : Supposons que $\theta_t^z > 0$ et $\theta_t^s = 0$ avec $s > z$. Alors : $f^z(A_{t+1}, V_{t+1}^z) = g(0,z) < g(0,s) \leq f^s(A_{t+1}, V_{t+1}^s)$. Et aussi : $c_{t+1}^s < c_{t+1}^z$ par la proposition 7. Soit $(A_{t+2}^*, \{V_{t+2}^{*w}\}_{w\in\mathcal{S}})$ et $(A_{t+2}^{'}, \{V_{t+2}^{'w}\}_{w\in\mathcal{S}})$ les solutions en $t+1$ si respectivement s et z se réalisent. Alors :

$$\begin{aligned} f^s(A_{t+1}, V_{t+1}^s) &= u(c_{t+1}^s) + \beta E_w f^w(A_{t+2}^*, V_{t+2}^{*w}) \\ &< u(c_{t+1}^z) + \beta E_w f^w(A_{t+2}^*, V_{t+2}^{*w}) \\ &\leq u(c_{t+1}^z) + \beta E_w f^w(A_{t+2}^{'}, V_{t+2}^{'w}) \\ &= f^z(A_{t+1}, V_{t+1}^z) \end{aligned}$$

et il y a contradiction. *Q.E.D.*
Preuve du corollaire 1 : Ce corollaire est directement entraîné par la preuve précédente. *Q.E.D.*
Preuve de la proposition 9 : On note X_t^s l'actif net $(1+r)A_t - V_t^s$. En t, la contrainte auto-exécutoire est vérifiée dans l'état s et la consommation est optimale : $\Rightarrow$ (a) $h^s(X_t^s) \geq g(0, y^s)$ et (b) $u'(c_t^s) = h^{s'}(X_t^s)$
Supposons que $\theta_{t+\tau}^s > 0$ pour $\tau \geq 0$: $\Rightarrow$ (c) $h^s(X_{t+\tau+1}^s) = g(0,y^s)$ et (d) $u'(c_{t+\tau+1}^s) = h^{s'}(X_{t+\tau+1}^s)$
et la proposition (7) pour $\theta_{t+\tau}^s > 0$ nous donne : (e) $c_{t+\tau+1}^s > c_{t+\tau} \geq c_t^s$.
i) : (a), (c) et (e) $\Rightarrow h^s(X_t^s) \geq h^s(X_{t+\tau+1}^s)$
ii) : (b), (d) et (e) $\Rightarrow h^{s'}(X_t^s) > h^{s'}(X_{t+\tau+1}^s)$
ce qui contredit la concavité de h. *Q.E.D.*
Preuve du corollaire 2 : Ce corollaire découle entièrement des propositions précédentes. *Q.E.D.*
Preuve du lemme 1 : Si $\theta_t^s > 0$, alors $c_{t+1}^s > c_t^s$ et $h^{s'}((1+r)A_t - V_t^s) > h^{s'}((1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^s)$. Or, comme $\theta_t^s > 0$ implique que $h^s((1+r)A_t - V_t^s) \geq g(0,y^s) = h^s((1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^s)$, il est impossible de vérifier les deux conditions si h est concave. *Q.E.D.*
Preuve du lemme 2 : Si la contrainte de l'agent 2 est serrée dans l'état s, c'est que le contrat lui accorde le plus petit surplus possible dans cet état : $V_{t+1}^s = 0 \leq V_t^s$. De plus, la condition (19) donne que $u'(c_t^s) < u'(c_{t+1}^s)$ ce qui entraîne : $h^{s\prime}((1+r)A_t - V_t^s) < h^{s\prime}((1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^s)$. Comme $h^{s\prime}$ est décroissante on a $(1+r)A_t - V_t^s > (1+r)A_{t+1}^s$ et donc

$$(1+r)[A_t - A_{t+1}^s] > V_t^s \geq 0.$$

Pour que ceci soit respecté il faut donc que A_t soit positif. *Q.E.D.*

Preuve du lemme 3 : Supposons $\theta^s_{t-1} = 0$ et $\theta^z_{t-1} > 0$. Alors par la condition de lissage, on sait que $c^s_t = c_{t-1} < c^z_t$ ce qui entraîne que $h^{s\prime}((1+r)A_t - V^s_t) > h^{z\prime}((1+r)A_t - V^z_t)$. Or, si seule la contrainte dans l'état z est serrée, on a : $h^s((1+r)A_t - V^s_t) \geq g(0, y^s) > g(0, y^z) = h^z((1+r)A_t - V^z_t)$. Ces deux inégalités ne sont pas compatibles si h est concave.
De même, supposons que $\lambda^z_{t-1} = 0$ et $\lambda^s_{t-1} > 0$. Alors, $h^{s\prime}((1+r)A_t - V^s_t) > h^{z\prime}((1+r)A_t - V^z_t)$ et donc $(1+r)A_t - V^s_t < (1+r)A_t - V^z_t$ ce qui entraîne $V^z_t - V^s_t = V^z_t < 0$ ce qui est impossible. *Q.E.D.*

Liste des publications au CIRANO *

Cahiers CIRANO / *CIRANO Papers* (ISSN 1198-8169)

96c-1 Peut-on créer des emplois en réglementant le temps de travail ? / par Robert Lacroix

95c-2 Anomalies de marché et sélection des titres au Canada / par Richard Guay, Jean-François L'Her et Jean-Marc Suret

95c-1 La réglementation incitative / par Marcel Boyer

94c-3 L'importance relative des gouvernements : causes, conséquences et organisations alternative / par Claude Montmarquette

94c-2 Commercial Bankruptcy and Financial Reorganization in Canada / par Jocelyn Martel

94c-1 Faire ou faire faire : La perspective de l'économie des organisations / par Michel Patry

Série Scientifique / *Scientific Series* (ISSN 1198-8177)

97s-23 Contrat dynamique de partage de risque avec contraintes d'engagement et épargne / Karine Gobert et Michel Poitevin

97s-22 Comparing Open-Loop with Markov Equilibria in a Class of Differential Games / Ngo Van Long, Koji Shimomura et Harataka Takahashi

97s-21 Efficiency Inducing Taxation for Polluting Oligopolists / Hassan Benchekroun et Ngo Van Long

97s-20 Tests of Conditional Asset Pricing Models in the Brazilian Stock Market / Marco Bonomo et René Garcia

97s-19 Nonparametric Methods and Option Pricing / Eric Ghysels, Valentin Patilea, Éric Renault et Olivier Torrès

97s-18 Availability and Accuracy of Accounting and Financial Data in Emerging Markets: The Case of Malaysia / Jean-Marc Suret, Cameron Morrill et Janet Morrill

97s-17 L'évolution des structures financières des grandes entreprises canadiennes / Jean-Marc Suret et Jean-François L'Her

97s-16 Le régime d'épargne-actions du Québec : Vue d'ensemble et évaluation / Jean-Marc Suret et Élise Cormier

97s-15 Liberalization, Political Risk and Stock Market Returns in Emerging Markets / Jean-Marc Suret, Jean-François L'Her

97s-14 Methods of Pay and Earnings: A Longitudinal Analysis / Daniel Parent

97s-13 A Note on Hedging in ARCH and Stochastic Volatility Option Pricing Models / René Garcia et Éric Renault

97s-12 Equilibrium Asset Prices and No-Arbitrage with Portfolio Constraints / Jérôme B. Detemple et Shashidhar Murthy

* Vous pouvez consulter la liste complète des publications du CIRANO et les publications elles-mêmes sur notre site World Wide Web à l'adresse suivante :
http://www.cirano.umontreal.ca/publication/page1.html